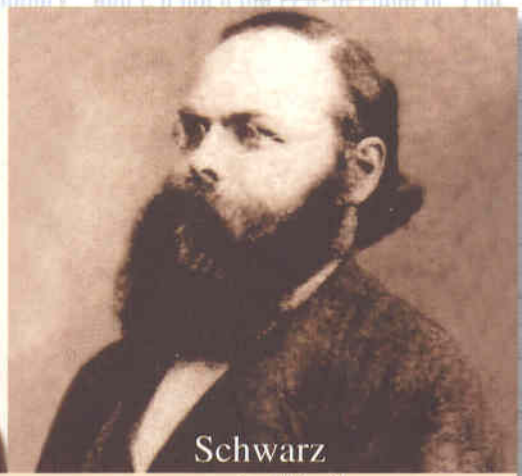
อสมการ
และ
สมการเชิงฟังก์ชัน

(พื้นฐานของอสมการ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต อสมการ Cauchy-Schwarz ฟังก์ชันนูนและอสมการ Jensen อสมการว่าด้วยการจัดเรียง พหุนามสมมาตร พหุนามเอกพันธุ์ อสมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน อสมการที่เกี่ยวข้องกับการนิยามอสมการที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพิเศษของฟังก์ชัน อสมการประเภทอื่นๆ ฟังก์ชัน ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันสมการเชิงฟังก์ชันของโคชี สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต สมการเชิงฟังก์ชันที่นิโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม สมการเชิงฟังก์ชันที่นิโดเมนเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง)



Minkowski

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^r\right\}^{\frac{1}{r}} \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_k^r\right)^{\frac{1}{r}}$$



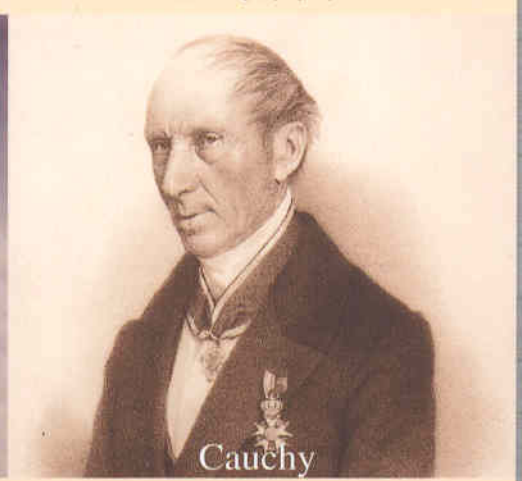
Schwarz

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \le \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$



D-Alembert

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$



Cauchy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

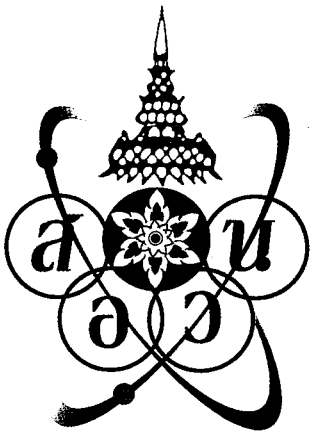
อสมการและสมการเชิงฟังก์ชัน

(พื้นฐานของอสมการ อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต อสมการ Cauchy-Schwarz ฟังก์ชันนูนและอสมการ Jensen อสมการว่าด้วยการจัดเรียง พหุนามสมมาตร พหุนามเอกพันธุ์ อสมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน อสมการที่เกี่ยวข้องกับการนับอสมการที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพิเศษของฟังก์ชัน อสมการประเภทอื่นๆ ฟังก์ชัน ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชันสมการเชิงฟังก์ชันของโคชี สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง)



$$\sum_{n=1} a_n b_n \le \left(\sum_{n=1} a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1} b_n^q\right)^{1/q}$$

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.



มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)

ความเป็นมา

ประเทศไทยส่งนักเรียนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งแรกในปี พ.ศ. 2532 ที่ประเทศเยอรมนี โดยความร่วมมือระหว่างสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา (พระยศในขณะนั้น) ได้พระราชทานเงินส่วนพระองค์จำนวนหนึ่งเพื่อเป็นค่าใช้จ่าย

การคัดเลือกนักเรียนเพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 30 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดคณาจารย์มหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งมาช่วยฝึกอบรมรวมเป็นเวลาประมาณสองเดือน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติมครอบคลุมหลักสูตรที่จะใช้แข่งขัน ซึ่งอยู่ในระดับชั้นปีที่ 1-2 ของมหาวิทยาลัย จากผลสำเร็จในปีแรก ทำให้รัฐบาลเห็นความสำคัญจึงได้จัดสรรงบประมาณให้กับโครงการนี้ผ่านสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 เป็นต้นมา สมทบกับเงินพระราชทานเป็นรายปีจากสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เพื่อสนับสนุนการส่งนักเรียนไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ 5 สาขา จนถึงปัจจุบันรวม 14 ปี นักเรียนไทยได้ทำชื่อเสียงได้เหรียญทองรวม 17 เหรียญ เหรียญเงิน 53 เหรียญ เหรียญทองแดง 93 เหรียญ และเกียรติคุณประกาศอีก 35 ราย รวมทั้งสิ้น 198 รางวัล จากจำนวนนักเรียนที่ส่งไปเข้าแข่งขัน 276 คน (72%)

อย่างไรก็ตาม จากการที่ประเทศไทยดำเนินการจัดส่งนักเรียนเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ตั้งแต่ พ.ศ.2532 จนถึงปัจจุบัน ทำให้เห็นว่ามาตรฐานการศึกษาด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของไทยยังต่ำกว่ามาตรฐานสากล การเตรียมตัวของนักเรียนยังใช้เวลาน้อยเกินไป

เพื่อให้การส่งเสริมและสนับสนุนโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นสมเด็จพระเจ้า พี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จึงมีพระดำริให้จัดตั้งมูลนิธิ สอวน. และได้รับอนุมัติจากกระทรวงมหาดไทยเมื่อวันที่ 12 ตุลาคม 2542 โดยมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการ

วัตถุประสงค์

1. ส่งเสริมให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วประเทศที่มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีโอกาสได้รับการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ฟิสิกส์ และชีววิทยา ตามความถนัดทั้งด้านทฤษฎีและทักษะด้านปฏิบัติ ให้สามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยจัดให้มีศูนย์อบรมทั่วประเทศเป็นการเพิ่มเวลาฝึกอบรม เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความพร้อมที่จะเข้ารับการคัดเลือกไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ตามพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ องค์ประธานมูลนิธิ สอวน.
2. เพื่อนำประสบการณ์ที่ได้จากการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษาของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าระดับสากล

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) ได้ร่วมมือกับคณาจารย์มหาวิทยาลัยของรัฐ 20 แห่ง และกระทรวงศึกษาธิการ ดำเนินการจัดตั้งศูนย์ สอวน. ในภูมิภาค 12 ศูนย์ และในกรุงเทพฯ 1 ศูนย์ (5 โรงเรียน) เพื่อพัฒนาศักยภาพทางปัญญาของนักเรียนที่มีความพร้อมในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์จากทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนได้มีความรู้ความสามารถเทียบเท่ามาตรฐานสากล และพร้อมที่จะสอบคัดเลือกเป็นผู้แทนประเทศไทยไปร่วมการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศในสาขาวิชาต่างๆได้และเพื่อขยายผลจากประสบการณ์ที่ได้เข้าแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าสากล

ในการอบรมนักเรียนของศูนย์ สอวน. มูลนิธิ สอวน.ได้พิจารณาเห็นว่าตำราที่มีความสมบูรณ์ของเนื้อหาตามหลักสูตรของ สอวน. จะช่วยพัฒนาศักยภาพของนักเรียนในศูนย์สอวน.ให้สูงยิ่งขึ้นได้ นอกจากนั้นตำราเรียนในวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสมบูรณ์ถูกต้องยังขาดแคลน นักเรียนและครูสามารถนำตำราที่พัฒนาขึ้นมานี้ไปใช้เป็นหนังสืออ้างอิงประกอบการเรียนการสอนได้อีกด้วย มูลนิธิ สอวน. จึงได้มี "โครงการจัดทำตำราส่งเสริมพัฒนาศักยภาพของนักเรียนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์" ขึ้น เพื่อผลิตตำราคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ที่มีเนื้อหาหลักสูตรตามมาตรฐานสากล โดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นที่ระลึกในมหามงคลสมัยที่สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ทรงเจริญพระชนมายุ 80 พรรษา ซึ่งพระองค์ทรงมีพระมหากรุณาธิคุณต่อโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศและทรงสนับสนุนการดำเนินงานเพื่อพัฒนามาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยอย่างหาที่สุดมิได้

2. เพื่อผลิตหนังสือคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายถึงระดับชั้นปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยให้มีคุณภาพเทียบเท่าสากล เรียบเรียงโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัยของรัฐที่มีประสบการณ์สูงและที่มีส่วนร่วมในการฝึกอบรมนักเรียนในค่าย สอวน. ค่าย สสวท. และควบคุมนักเรียนไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ เนื้อหาในหนังสือเน้นกระบวนการคิดแบบวิทยาศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและประยุกต์ได้โดยจัดพิมพ์บนกระดาษอาร์ตอย่างดีและมีภาพสีประกอบคำบรรยาย

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ รวม 5 เล่ม คอมพิวเตอร์ 3 เล่ม เคมี 4 เล่ม ชีววิทยา 6 เล่ม และฟิสิกส์ 3 เล่ม รวมทั้งสิ้น 20 เล่ม หนังสือแต่ละเล่มจะพิมพ์จำนวนเล่มละ 3,000 ฉบับ จึงมีหนังสือที่จะพิมพ์ทั้งสิ้น 60,000 ฉบับ โดยหนังสือชุดแรกที่พิมพ์เสร็จแล้ว 7 เล่ม ได้นำขึ้นทูลเกล้าถวายเพื่อทอดพระเนตรในวันที่ 6 มิถุนายน 2547 ซึ่งเป็นวันประชุมสามัญประจำปี พ.ศ. 2547 ของคณะกรรมการบริหาร และสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เสด็จเป็นองค์ประธานที่ประชุม ส่วนที่เหลืออีก 13 เล่ม กำลังดำเนินการพิมพ์ให้ครบทั้ง 20 เล่ม สมเด็จพระพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จะพระราชทานหนังสือดังกล่าวให้โรงเรียนมัธยมศึกษา ประมาณ 2,700 โรงเรียน รวมทั้ง คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยของรัฐที่เป็นศูนย์ สอวน. ทั่วประเทศ นอกจากนั้นคณะกรรมการโครงการผลิตตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายจะผลิตตำราที่มีคุณภาพสูงนี้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัย เพื่อวางรากฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพื่อสร้างแรงบันดาลใจและความสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์แก่เยาวชนอีกด้วย หากได้รับความอนุเคราะห์ช่วยเหลือด้านงบประมาณจากภาครัฐและเอกชน

คณะจัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์หวังว่าโครงการตำราคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. จะมีส่วนร่วมในการปฏิรูปการเรียนรู้และยกระดับมาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้เทียบเท่ากับระดับสากลเพื่อสนองพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

****

คำนำ

หนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นเพื่อเผยแพร่เนื้อหาวิชาในหัวข้อสองหัวข้อทางคณิตศาสตร์ ที่พบเสมอในโจทย์การสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ได้แก่ อสมการ (Inequalities) ในส่วนแรก และ สมการเชิงฟังก์ชัน (Functional Equations) ในส่วนหลัง (โดยกำกับเลขที่บทแยกออกจากกัน) วิธีการนำเสนอในที่นี้เน้นการแก้โจทย์ปัญหาระดับที่ใช้ในการแข่งขัน โดยมีทฤษฎีบท และคำบรรยายแทรกอยู่เป็นระยะ ๆ

ความรู้พื้นฐานในการอ่านศึกษา และทำความเข้าใจหนังสือเล่มนี้ คือ ความรู้ในเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่ปรากฏในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย อย่างไรก็ตาม มีบางจุด เช่นในการพิสูจน์อสมการว่าด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิตถ่วงน้ำหนัก (Weighted Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality) ที่ใช้ทฤษฎีบทว่าด้วยค่ามัชฌิม (Mean-value Theorem) ในวิชาคณิตวิเคราะห์เชิงจริง (Real Analysis) ระดับมหาวิทยาลัยตอนต้น ซึ่งผู้อ่านอาจยอมรับไปก่อนได้

เนื่องจากโจทย์ตัวอย่าง และแบบฝึกหัดที่ปรากฏในหนังสือเล่มนี้ เกือบทั้งหมดเป็นโจทย์ที่มาจากการสอบแข่งขันหลายระดับแตกต่างกัน ผู้อ่านจะพบว่าบางตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัด สามารถทำความเข้าใจได้อย่างรวดเร็ว ในขณะที่มีตัวอย่าง หรือแบบฝึกหัดอีกเป็นจำนวนมาก เป็นต้นว่าที่ใช้ในการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ (International Mathematical Olympiads) ซึ่งต้องอ่าน และทำความเข้าใจอย่างช้า ๆ ซ้ำหลายครั้ง และละเอียดรอบคอบ ทั้งนี้เนื่องมาจากความซับซ้อน และความยากของโจทย์ปัญหา ผู้เขียนแนะว่าผู้อ่านควรจะมีกระดาษทด ดินสอ วงเวียน ไม้บรรทัด ไว้ตรวจสอบรายละเอียด อย่างสม่ำเสมอ เพื่อช่วยตรวจสอบ และทำความเข้าใจให้ถึงแก่นแท้ของโจทย์ การกระทำเช่นว่านี้เป็นสิ่งที่ผู้เขียนถือว่าเป็นแนวทางหลักในการอ่าน ก่อนที่จะทำแบบฝึกหัด เพื่อเสริมสร้างประสบการณ์ในการแก้โจทย์ปัญหาในลำดับถัดไป

การใช้คำไทยแทนคำศัพท์ทางวิชาการ หรือชื่อเฉพาะ ที่ใช้ในหนังสือเล่มนี้ ในหลักการแล้วยึดตามศัพท์คณิตศาสตร์ ฉบับราชบัณฑิตยสถาน พิมพ์ครั้งที่ 7 พ.ศ. 2540 อย่างไรก็ตาม มีศัพท์ทางวิชาการจำนวนไม่น้อย ที่ผู้เขียนแปลขึ้นเองตามความเหมาะสม และชื่อเฉพาะส่วนใหญ่ใช้การแปลทับศัพท์

เนื้อหาในส่วนของอสมการมีทั้งสิ้นสิบเอ็ดบท โดยจำแนกตามประเภทของอสมการที่พบในการแข่งขัน บทแรกเป็นการทบทวนความรู้พื้นฐาน และเทคนิคการจัดรูปอสมการ บทที่สองว่าด้วยอสมการที่รู้จักกันดีที่สุด กล่าวคืออสมการว่าด้วยค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต ทั้งแบบปรกติ และแบบถ่วงน้ำหนัก ซึ่งการพิสูจน์อสมการประเภทหลังนี้เช่นที่เอ่ยถึงข้างต้น จำเป็นต้องใช้ความรู้เกินระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเล็กน้อย เพราะต้องอาศัยแนวคิดว่าด้วยความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บทที่สามว่าด้วยอสมการ Cauchy-Schwarz ซึ่งตีความเป็นอสมการว่าด้วยผลคูณจุด (dot product) ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ได้ บทที่สี่ว่าด้วยอสมการ Jensen ซึ่งเกี่ยวข้องกับสมบัติความนูน (convexity) หรือเว้า (concavity) ของฟังก์ชัน สมบัติดังกล่าวนี้สามารถตรวจได้สะดวกขึ้น หากใช้ผลจากวิชาแคลคูลัส (Calculus) แต่เนื้อหาวิชานี้ถือว่าเกินระดับที่ใช้ในการสอบแข่งขันระหว่างประเทศ บทที่ห้ากล่าวถึง อสมการว่าด้วยการจัดเรียง (rearrangement) ซึ่งอาจนับว่าเป็นของค่อนข้างใหม่สำหรับนักเรียนไทย เพราะเกี่ยวข้องกับการจัดเรียงของลำดับของจำนวนจริง แต่เป็นอสมการที่มีพลังสูงมาก บทที่หกและเจ็ด ว่าด้วยสมบัติสำคัญสองประการของพหุนาม ได้แก่ ความสมมาตร (symmetry) และความเป็นเอกพันธุ์ (homogeneity) ที่ปรากฏในโจทย์อสมการจำนวนมาก สมบัติดังกล่าวสามารถนำมาประยุกต์ใช้เพื่อลดทอนขั้นตอนในการแก้โจทย์อสมการได้ บทที่แปด เก้า และสิบ ว่าด้วยโจทย์อสมการที่จำเป็นต้องใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์สาขาอื่นมาช่วยในการแก้ ได้แก่ ความรู้ทางทฤษฎีจำนวน ทางการนับ ทาง

ฟังก์ชันพิเศษเป็นต้นว่าฟังก์ชันพีชคณิต หรือฟังก์ชันตรีโกณมิติ บทสุดท้ายในส่วนนี้ว่าด้วยอสมการประเภทอื่น ๆ ซึ่งไม่สามารถจำแนกเข้าไปอยู่ในบทก่อนหน้าได้ ถือเป็นบทที่มีเนื้อหาเบ็ดเตล็ดได้

เนื้อหาในส่วนของสมการเชิงฟังก์ชันมีทั้งสิ้นห้าบท บทแรกว่าด้วยฟังก์ชัน ซึ่งมีเนื้อหาเพิ่มเติมจากระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเล็กน้อย บทที่สองว่าด้วยความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชัน นอกจากเป็นการกล่าวถึงวิธีการพื้นฐานที่พบเสมอในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน แล้วยังมีการแก้สมการเชิงฟังก์ชันสองรูปแบบ ได้แก่ สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี (Cauchy's Functional Equation) และสมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต (D'Alembert's Functional Equation) ซึ่งผลดังกล่าวสามารถนำไปอ้างอิงในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันประเภทใกล้เคียงได้ บทที่สามว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนของฟังก์ชันคำตอบ เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเต็ม และมีเนื้อหาว่าด้วยการแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ตลอดจนทฤษฎีบทของบีตี้ (Beatty's Theorem) แสดงความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันภาคจำนวนเต็มและความเป็นอตรรกยะ ซึ่งใช้ช่วยในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันบางประเภทได้ บทที่สี่ว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนของฟังก์ชันคำตอบเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง เช่นเซตของจำนวนตรรกยะ หรือช่วง โดยมีเนื้อหาเพิ่มเติมว่าด้วยการแทนจำนวนจริงด้วยเลขฐาน และในส่วนสุดท้ายเป็นเรื่องของสมการเชิงฟังก์ชันที่ต้องการคำตอบเป็นพหุนาม บทสุดท้ายว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันประเภทอื่นซึ่งไม่สามารถจำแนกด้วยโดเมนของฟังก์ชันคำตอบเช่นในบทที่สาม และสี่ได้ หรือไม่ก็เป็นสมการเชิงฟังก์ชันที่โจทย์ถามถึงสิ่งอื่น ที่ไม่ใช่รูปแบบชัดแจ้งของฟังก์ชันคำตอบ

การอ้างอิงระบบตัวเลขที่ใช้ในหนังสือเล่มนี้ ในกรณีของตัวอย่างที่มีสามจุดนั้น จำนวนแรกแสดงถึงบท จำนวนที่สองแสดงถึงหัวข้อในบท จำนวนที่สามแสดงถึงลำดับของตัวอย่างนั้น เช่น ตัวอย่างที่ 11.2.3 หมายถึงตัวอย่างที่สาม ในหัวข้อที่ 2 ของบทที่ 11 ในกรณีของตัวอย่างที่มีสองจุด เช่น ตัวอย่างที่ 5.9 หมายถึงตัวอย่างที่ 9 ของบทที่ 5 ส่วนชื่อของทฤษฎีบท (หรือทฤษฎีบทประกอบ) นั้น จะกำกับเลขตามชื่อบท และตำแหน่งของทฤษฎีบท เช่น ทฤษฎีบทที่ 2.1 จะหมายถึง ทฤษฎีบทที่หนึ่ง ของบทที่ 2 ส่วนในการกำกับเลขสมการ (หรืออสมการ หรือข้อความที่ต้องการเน้น) จะมีอยู่ด้วยกันสามแบบ ซึ่งจะกำกับตัวเลขโดยขึ้นกับการปรากฏอยู่ ณ ที่ใด กล่าวคือ ในแบบที่หนึ่งจะเป็นตัวเลขสองตัว (โดยจะเป็นตัวเลขที่อยู่ในเนื้อหาของบท แต่ไม่ได้อยู่ในตัวอย่างใด ๆ)เช่น (x.y) หมายความว่า เป็นสมการที่ y ของบทที่ x ส่วนในแบบที่สองเช่น (x.y.z) จะเป็นการกล่าวถึง สมการที่ z ในตัวอย่างที่ x.y และในแบบสุดท้ายนั้นจะอยู่ในรูป x.y.z.w ซึ่งคือสมการ w และอยู่ในตัวอย่างที่ x.y.z ซึ่งเป็นกรณีที่บทที่ x มีหัวข้อย่อย x.y นั่นเอง

สำหรับข้อความในวงเล็บหลังชื่อของตัวอย่างนั้น หมายถึงตัวย่อของที่มาของโจทย์ซึ่งสามารถเปิดดูชื่อเต็มได้ที่หน้า บัญชีที่มาของโจทย์ (หน้าที่ 400) ได้

ISBN 974-93130-8-9

สงวนลิขสิทธิ์

จัดพิมพ์โดย มูลนิธิ สอวน.
พิมพ์ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2550 (2007)
ออกแบบปก หน้ารองปก
โดย ศาสตราจารย์ศักดา ศิริพันธุ์
ศิลปกรรม: นายปรีชา ฉัตระเนตร
พิมพ์ที่ บริษัทด่านสุทธาการพิมพ์ จำกัด
แยกสี เพลท บริษัทอีเล็ฟแว่นคัลเลอร์ส จำกัด

ผู้เขียน
ดร.ภัททิรา เรืองสินทรัพย์
วท.บ.(คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
วท.ม.(คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
วท.ด.(คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นายวัชรพล พิมพ์เสริฐ
วท.บ.(คณิตศาสตร์) เกียรตินิยม มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
วท.ม.(คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

คำนำ

ส่วนที่ 1 อสมการ

บทที่	1	พื้นฐานของอสมการ	1
บทที่	2	อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต –เรขาคณิต	18
		2.1 อสมการ AM-GM	18
		2.2 อสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก	45
บทที่	3	อสมการ Cauchy-Schwarz	50
บทที่	4	ฟังก์ชันนูน และอสมการ Jensen	61
บทที่	5	อสมการว่าด้วยการจัดเรียง	73
บทที่	6	พหุนามสมมาตร	82
บทที่	7	พหุนามเอกพันธุ์	95
บทที่	8	อสมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน	102
บทที่	9	อสมการที่เกี่ยวข้องกับการนับ	117
		9.1 หลักการรังนกพิราบ	117
		9.2 การอุปนัย	123
		9.3 การนับเชิง Combinatorics	134
บทที่	10	อสมการที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพิเศษของฟังก์ชัน	141
		10.1 อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันพีชคณิต	141
		10.2 อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ	153
บทที่	11	อสมการประเภทอื่น ๆ	161
		11.1 อสมการที่เกี่ยวข้องกับลำดับ	161
		11.2 อสมการที่เกี่ยวข้องกับการหาค่า	168
		11.3 อสมการที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์	173

ส่วนที่ 2 สมการเชิงฟังก์ชัน

บทที่	1	ฟังก์ชัน	177
		1.1 สมบัติพื้นฐาน	177
		1.2 ฟังก์ชันต่อเนื่อง	182
		1.3 ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม	185
		1.4 ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียลและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก	188
บทที่	2	ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชัน	190

2.1 พื้นฐานทั่วไป 190
2.2 วิธีการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน 192
2.2.1 การแทนค่า 193
2.2.2 การเปลี่ยนตัวแปร 195
2.2.3 การอุปนัย 199
2.2.4 การใช้สมบัติพิเศษบางประการของฟังก์ชัน 201
2.2.5 การแยกตัวแปรออกจากกัน 207
2.2.6 การใช้เอกลักษณ์ 209
2.2.7 การตรวจพินิจ 213
2.3 สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี 219
2.4 สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต 230
บทที่ 3 สมการเชิงฟังก์ชัน ที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม 237
3.1 โดเมนเป็น เซตของจำนวนนับ หรือเซตของจำนวนเต็มไม่ติดลบ 237
3.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิด 266
3.3 สมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม 277
3.4 โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม 288
บทที่ 4 สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง 299
4.1 โดเมนเป็นเซตของจำนวนตรรกยะ 300
4.2 โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง หรือช่วง 307
4.3 สมการเชิงฟังก์ชันที่มีคำตอบเป็นพหุนาม 355
บทที่ 5 เบ็ดเตล็ด 375

บรรณานุกรม 398
บัญชีสัญลักษณ์ 399
บัญชีที่มาของโจทย์ 400
ดัชนี 401

ส่วนที่ 1

อสมการ

(Inequalities)



$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \Lambda + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \Lambda + f(x_n)}{n}$$

บทที่ 1
พื้นฐานของอสมการ

อสมการที่เป็นอสมการมาตรฐานสากลที่สำคัญมีอยู่หลายรูปแบบ เช่น อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต อสมการของ Cauchy-Schwarz และ อสมการของ Jensen ก่อนที่จะทำการศึกษา พิสูจน์ หรือเรียนรู้วิธีการในการแก้อสมการ หรือ นำอสมการมาตรฐานดังกล่าวมาประยุกต์ใช้ (นอกเหนือจากที่เคยพบมาแล้วในหนังสือเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย) จะขอทบทวน สมบัติพื้นฐานบางประการของอสมการ และ หลักการพื้นฐานในการพิสูจน์ หรือแก้โจทย์อสมการโดยทั่วไป

ทฤษฎีบทที่ 1.1 กำหนดให้ a b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a + c < b + c$ แล้ว $a < b$
4. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

ทฤษฎีบทที่ 1.2 ให้ a b c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
2. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d < b - c$
3. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
4. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd$
5. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
6. ถ้า $a < b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

ทฤษฎีบทที่ 1.3 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < a < b$

1. $a^n < b^n$ สำหรับทุกจำนวน $n \in \mathbb{R}^+$

2. $a^n > b^n$ สำหรับทุกจำนวน $n \in \mathbb{R}^-$

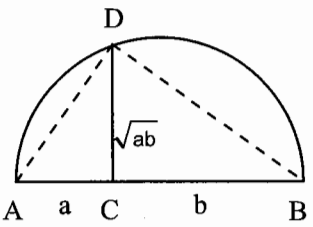
ทฤษฎีบทที่ 1.4 ให้ a , n และ m เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a > 0$ และ $n < m$

1. ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^n < a^m$
2. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^n > a^m$

การพิสูจน์ข้อความในรูปอสมการหรือการแก้อสมการในตัวแปร x ไม่มีหลักเกณฑ์เฉพาะเจาะจง แต่จะมีหลักการพื้นฐานที่สำคัญคือ การจัดรูปทางพีชคณิต หรือ การพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $a , b \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 < a \le b$ จงแสดงว่า $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

วิธีทำ **วิธีที่ 1** พิสูจน์โดยการพิจารณาความหมายทางเรขาคณิต



ให้ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของครึ่งวงกลมที่มีความยาว $a + b$

C เป็นจุดที่ทำให้ $AC = a$, $CB = b$

และ D เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งเส้นตรง DC ตั้งฉากกับ AB ที่จุด C

จะได้ว่า $\Delta ACD \sim \Delta CDB$

ดังนั้น $\frac{a}{CD} = \frac{CD}{b}$ $\therefore (CD)^2 = ab$

นั่นคือ $CD = \sqrt{ab}$

เนื่องจาก $CD \le$ รัศมีของวงกลม $= \frac{a+b}{2}$ ดังนั้น $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

วิธีที่ 2 พิสูจน์โดยการจัดรูปทางพีชคณิต

เนื่องจาก $0 \le (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$

ดังนั้น $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$

จากการพิสูจน์ทั้งสองวิธีพบว่า อสมการจะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $a = b$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้ $a , b , c \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

วิธีทำ **วิธีที่ 1** พิสูจน์โดยการทำย้อนกลับจากสิ่งที่ต้องการ

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

คูณตลอดทั้งอสมการด้วย 2 จะได้อสมการต่อไปนี้สมมูลกัน

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ca + c^2) + (b^2 - 2bc + c^2) \geq 0$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \geq 0$$

ซึ่งอสมการสุดท้ายเป็นจริงเสมอ ดังนั้น อสมการที่ต้องการเป็นจริงด้วย

วิธีที่ 2 ในบางครั้งการพิสูจน์ข้อความในรูปอสมการ อาจจะใช้นิยามเริ่มต้นของอสมการคือ

$$A \leq B \quad \text{สมมูลกับ} \quad A - B \leq 0$$

เนื่องจากอสมการมีความสมมาตรในตัวแปร a , b และ c ดังนั้นเราสามารถสมมุติให้ $a \geq b \geq c$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &= a(a - b) + b(b - c) - c(a - c) \\ &= a(a - b) + b(b - c) - c(a - b + b - c) \\ &= a(a - b) + b(b - c) - c(a - b) - c(b - c) \\ &= (a - c)(a - b) + (b - c)^2 \quad \geq \quad 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

นอกจากนี้จากการพิสูจน์ทั้งสองวิธีจะได้ว่า อสมการจะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a = b = c$

ตัวอย่าง 1.3 กำหนดให้ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ จงพิสูจน์ว่า $\cos^2 x + x \sin x < 2$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2 - \cos^2 x - x \sin x &= 2 - (1 - \sin^2 x) - x \sin x \\ &= 1 + \sin^2 x - x \sin x \\ &= 1 - 2 \sin x + \sin^2 x + 2 \sin x - x \sin x \\ &= (1 - \sin x)^2 + (2 - x) \sin x \end{aligned}$$

เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2} < 2$ จะได้ว่า $2 - x > 0$ และ $\sin x > 0$

ดังนั้น $2 - \cos^2 x - x \sin x > 0$

ทำให้ได้ว่า $\cos^2 x + x \sin x < 2$

ตัวอย่าง 1.4 กำหนดให้ $a , b , c \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $0 \leq a , b , c \leq 1$ จงแสดงว่า

$$\frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{c + a + 1} + \frac{c}{a + b + 1} + (1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq 1 \qquad (1.4.1)$$

วิธีทำ การกระจายพจน์ทางขวามือของอสมการโดยตรงจะได้รูปพีชคณิตที่ยุ่งยากมาก ดังนั้นโดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติให้ $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ จะได้ว่า

$$\frac{a}{b + c + 1} + \frac{b}{c + a + 1} + \frac{c}{a + b + 1} \leq \frac{a}{a + b + 1} + \frac{b}{a + b + 1} + \frac{c}{a + b + 1} = \frac{a + b + c}{a + b + 1}$$

และถ้าเราพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \qquad (1.4.2)$$

อสมการ (1.4.1) ที่ต้องการก็เป็นจริงด้วย

อสมการ (1.4.2) อยู่ในรูปที่ง่ายขึ้นแต่ก็ยังคงยุ่งยาก และอาจจะไม่จริงเพราะเราลดรูปลงมาทำให้เกิดการตัดทอนค่อนข้างมาก อย่างไรก็ตามลองพิจารณาอสมการ (1.4.2) ว่าเป็นจริงหรือไม่

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) &= \frac{a+b+1}{a+b+1} + \frac{c-1}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)\\ &= 1 - \frac{1-c}{a+b+1}\,[\,1-(1+a+b)(1-a)(1-b)\,] \leq 1\end{aligned}$$

เนื่องจาก $0 \leq (1+a+b)(1-a)(1-b) \leq (1+a+b+ab)(1-a)(1-b)$

$$= (1+a)(1+b)(1-a)(1-b) = (1-a^2)(1-b^2) \leq 1$$

และ $0 \leq \dfrac{1-c}{a+b+1} \leq 1$

นั่นคืออสมการ (1.4.2) เป็นจริง ดังนั้นอสมการ (1.4.1) เป็นจริงด้วย

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a_i \geq 1$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

จงแสดงว่า $(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq \dfrac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)$

วิธีทำ การพิสูจน์สามารถทำได้หลายวิธี ซึ่งการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์บน n ก็เป็นวิธีหนึ่งแต่วิธีจัดรูปพีชคณิตต่อไปนี้จะดูง่ายกว่ามาก

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) &= 2^n\left(\frac{1+a_1}{2}\right)\left(\frac{1+a_2}{2}\right)\cdots\left(\frac{1+a_n}{2}\right)\\ &= 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}\right)\left(1+\frac{a_2-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n-1}{2}\right)\\ &\geq 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)\\ &\geq 2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right)\\ &= \frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.6 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

วิธีทำ พิจารณา

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \qquad (1.6.1)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) \qquad (1.6.2)$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของ $\frac{1}{k!}$ ใน (1.6.1) และ (1.6.2) จะได้ว่า เมื่อ $k = 0, 1, \ldots, n$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$

ดังนั้น

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

ตัวอย่าง 1.7 (Canadian MO 1979) ให้

(i) $a, b \in \mathbb{R}^+$

(ii) a, A_1, A_2, b เป็นลำดับเลขคณิต

(iii) a, G_1, G_2, b เป็นลำดับเรขาคณิต

จงแสดงว่า $A_1A_2 \geq G_1G_2$

วิธีทำ จาก (ii) ได้ $A_1 = a + \frac{b-a}{3}$, $A_2 = a + \frac{2(b-a)}{3}$

ดังนั้น

$$A_1A_2 = ab + \frac{2(b-a)^2}{9}$$

จาก (iii) ได้

$$G_1 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}, G_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}$$

ดังนั้น $G_1G_2 = ab$

เพราะฉะนั้น

$$A_1A_2 - G_1G_2 = \frac{2(b-a)^2}{9} \geq 0$$

ตัวอย่าง 1.8 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกที่มีสมบัติว่า abc = 1 และให้

$$S(x,y) := \frac{a^x b^x}{a^y + b^y + a^x b^x} + \frac{b^x c^x}{b^y + c^y + b^x c^x} + \frac{c^x a^x}{c^y + a^y + c^x a^x} \qquad (x, y > 0)$$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x \le 2y$ แล้ว $S(x,y) \le 1$ และถ้า $x > 2y$ แล้ว $S(x,y) \ge 1$

วิธีทำ สังเกตว่า

$$a^y + b^y = a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} \left\{ a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3} \right\} + \left\{ a^{(2y-x)/3} - b^{(2y-x)/3} \right\} \left\{ a^{(x+y)/3} - b^{(x+y)/3} \right\}$$

ถ้า $x \le 2y$ แล้ว

$$a^y + b^y = a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} \left\{ a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3} \right\}$$

ซึ่งให้ว่า

$$S(x,y) \le \sum \frac{a^x b^x}{a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} (a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3}) + a^x b^x}$$

$$= \sum \frac{1}{a^{(y-2x)/3} b^{(y-2x)/3} (a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3}) + 1}$$

$$= \sum \frac{c^{(y-2x)/3}}{a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3} + c^{(y-2x)/3}} = 1$$

ถ้า $x > 2y$ แล้ว $a^y + b^y \le a^{(x+y)/3} b^{(x+y)/3} \left\{ a^{(y-2x)/3} + b^{(y-2x)/3} \right\}$ ข้อโต้แย้งเช่นในกรณีที่แล้ว ยังใช้ได้เพียงแต่อสมการกลับทิศทาง

ตัวอย่าง 1.9 จงพิสูจน์ว่า $(x^3 + x^2 + 3)^2 > 4x^3(x-1)^2$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

วิธีทำ กรณีที่ $x \le 0$ อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน จากนี้ไปพิจารณาเพียง $x > 0$

เนื่องจาก $\{p(x) + q(x)\}^2 \ge 4p(x)q(x)$ สำหรับทุก $p(x), q(x)$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(x^3 + x^2 + 3)^2 &= (x^3 + 2x + 2 + x^2 - 2x + 1)^2 \\ &\ge 4(x^3 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 1) \\ &> 4x^3(x-1)^2 \qquad \text{ตามต้องการ}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.10 ให้ u, v เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับอสมการ $u^2 < c^2$ และ $v^2 < c^2$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\frac{u+v}{1 + (\frac{uv}{c^2})} \right)^2 < c^2$$

วิธีทำ $\{(u+v)(1+uv/c^2)^{-1}\}^2 < c^2 \Leftrightarrow (u+v)^2 < c^2(1+uv/c^2)^2$

$$\Leftrightarrow u^2 + 2uv + v^2 < c^2(1 + 2uv/c^2 + u^2v^2/c^4) = c^2 + 2uv + \frac{u^2v^2}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow c^2u^2 + c^2v^2 < c^4 + u^2v^2$$
$$\Leftrightarrow 0 < c^4 + u^2v^2 - c^2u^2 - c^2v^2$$
$$\Leftrightarrow 0 < (c^2 - u^2)(c^2 - v^2)$$

อสมการท้ายนี้เป็นจริง จากสมมุติฐานที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 1.11 (AMOC 1997) ให้ m, n เป็นจำนวนนับ > 1 จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} > 1$$

วิธีทำ โดยทฤษฎีทวินาม ได้ว่า $(1 + x)^m > 1 + mx$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x ซึ่งให้ว่า

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^m > 1 + n$$

ดังนั้น $\sqrt[m]{n+1} < 1 + \frac{n}{m}$ ในทำนองเดียวกัน ได้

$$\sqrt[n]{m+1} < 1 + \frac{n}{m}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m+1}} > \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$$

ตัวอย่าง 1.12 ถ้า $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ แล้ว จงแสดงว่า $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} \geq 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $x^4 > 0$ เมื่อ $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ดังนั้น อสมการที่ต้องการสมมูลกับอสมการ

$$x^{12} - x^9 - x^3 + 1 \geq 0$$

อสมการหลังนี้เป็นจริง เพราะ

$$x^{12} - x^9 - x^3 + 1 = x^9(x^3 - 1) - (x^3 - 1) = (x^3 - 1)(x^9 - 1) = (x^3 - 1)^2(x^6 + x^3 + 1)$$
$$= (x^3 - 1)^2 \left\{\left(x^3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\} \geq 0$$

ตัวอย่าง 1.13 ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_6 \in [0, 1]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x_1^3}{x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + x_6^5 + 5} + \ldots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 + x_5^5 + 5} \leq \frac{3}{5}$$

วิธีทำ เงื่อนไข $x_1, x_2, \ldots, x_6 \in [0, 1]$ ชี้ว่า นิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการที่ต้องการมีค่า

$$\leq \frac{x_1^3}{x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_6^5 + 4} + \frac{x_2^3}{x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_6^5 + 4} + \cdots + \frac{x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_6^5 + 4}$$

$$= \frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_6^3}{x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_6^5 + 4} \le \frac{3}{5}$$

อสมการสุดท้ายเป็นจริง เพราะ $3t^5 + 2 \ge 5t^3 \iff (t-1)^2(3t^3 + 6t^2 + 4t + 2) \ge 0$ สำหรับทุก $t \ge 0$

ตัวอย่าง 1.14 จงแสดงว่า $\frac{1}{2} \le \frac{a(c-d)+2d}{b(d-c)+2c} \le 2$ สำหรับทุกจำนวนจริง $a, b, c, d \in [1, 2]$

วิธีทำ เราแยกการพิจารณาออกเป็นสองกรณี

- กรณี $c - d \ge 0$ อสมการที่ต้องการ เป็นผลตามมาโดยตรงจากกลุ่มของอสมการต่อไปนี้

$$2 \le 2d \le a(c-d) + 2d \le 2(c-d) + 2d = 2c \le 4$$

$$4 \ge 2c \ge b(d-c) + 2c \ge 2(d-c) + 2c = 2d \ge 2$$

- กรณี $c - d < 0$ เป็นไปในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 1.15 จงพิสูจน์ว่า $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \ge 2(x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2})$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x, y, z ที่มีสมบัติว่า $xyz = 1$

วิธีทำ เมื่อใช้เงื่อนไข $xyz = 1$ ได้ว่า $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 2(x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2})$

$= (x^2 + 1/x - 2x^{1/2}) + (y^2 + 1/y - 2y^{1/2}) + (z^2 + 1/z - 2z^{1/2})$

$= (x^{3/2} - 1)^2/x + (y^{3/2} - 1)^2/y + (z^{3/2} - 1)^2/z \ge 0$

ตัวอย่าง 1.16 (APMO 1991) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k + b_k} \ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k$

วิธีทำ เพื่อความสะดวก กำหนดสัญลักษณ์ $\sum x$ แทน $\sum_{k=1}^{n} x_k$ ดังนั้น อสมการที่ต้องการพิสูจน์เขียนได้ในรูป

$\sum \frac{x^2}{x+y} \ge \frac{1}{2}\sum x$ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า $\sum x = \sum y$ เมื่อ $x, y > 0$

พิจารณา

$$\sum \frac{x^2}{x+y} = \sum \frac{x^2 + xy - xy}{x+y} = \sum x - \sum \frac{xy}{x+y} \ge \frac{1}{2}\sum x \iff \frac{1}{2}\sum x \ge \sum \frac{xy}{x+y}$$

อสมการสุดท้ายนี้เป็นจริง เพราะว่าจาก $(x-y)^2 \ge 0$ ได้ $(x+y)^2 \ge 4xy$ ซึ่งให้ว่า

$$\frac{xy}{x+y} \le \frac{1}{4}(x+y)$$

เพราะฉะนั้น $\sum \frac{xy}{x+y} \le \frac{1}{4}\sum (x+y) = \frac{1}{4}(2\sum x) = \frac{1}{2}\sum x$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.17 จงพิสูจน์ว่า ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า $a < b + c$ แล้ว

$$\frac{a}{1+a} < \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

วิธีทำ
$$\frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} - \frac{a}{1+a} = \frac{b(1+a)(1+c) + c(1+a)(1+b) - a(1+b)(1+c)}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$= \frac{abc + 2bc + b + c - a}{(1+a)(1+b)(1+c)} > \frac{abc + 2bc}{(1+a)(1+b)(1+c)} > 0$$

ตัวอย่าง 1.18 ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \le 3$

วิธีทำ
$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2$$
$$= 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$$
$$= 3 - (a + b + c)^2 \le 3$$

ตัวอย่าง 1.19 ถ้า $x_k \ge 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$x_n^{\,n} \ge x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2)\ldots\{nx_n - (n-1)x_{n-1}\}$$

วิธีทำ ขั้นแรก เราจะพิสูจน์ว่า ถ้า $x_k \ge 0$ แล้ว

$$x_k^{\,k} \ge \{kx_k - (k-1)x_{k-1}\}x_{k-1}^{\,k-1} \qquad (1.19.1)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_k = x_{k-1}$

ถ้า $x_k \ge x_{k-1}$ แล้ว $x_k^{\,k-1} + x_k^{\,k-2}x_{k-1} + x_k^{\,k-3}x_{k-1}^{\,2} + \cdots + x_{k-1}^{\,k-1} \ge kx_{k-1}^{\,k-1}$ แต่ถ้า $x_k \le x_{k-1}$ แล้ว อสมการดังกล่าวนี้กลับข้าง ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม เราได้ว่า

$$x_k^{\,k} - x_{k-1}^{\,k} \ge kx_{k-1}^{\,k-1}(x_k - x_{k-1}) \qquad (1.19.2)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_k = x_{k-1}$ จากนี้เห็นชัดเจนว่า (1.19.1) เป็นผลตามมาโดยตรงจาก (1.19.2)

ขั้นต่อไป แทนค่า $k = n, n-1, \ldots, 2$ ใน (1.19.1) ตามลำดับ แล้วจัดรูป ได้

$$x_n^{\,n} \ge x_1(2x_2 - x_1)(3x_3 - 2x_2)\cdots\{nx_n - (n-1)x_{n-1}\} \qquad (1.19.3)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_k = x_{k-1}$ $(k = 2, \ldots, n)$

ตัวอย่าง 1.20 จงพิสูจน์ว่า $2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n} \le n - 1 + 2^{a_1+a_2+\ldots+a_n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ≥ 2 และ $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{N}$

วิธีทำ เมื่อ $n = 2$ อสมการคือ $2^{a_1} + 2^{a_2} \le 1 + 2^{a_1+a_2}$ ซึ่งสมมูลกับ $(1 - 2^{a_1})(1 - 2^{a_2}) \ge 0$

อสมการหลังนี้เป็นจริงอย่างชัดเจน สมมุติว่าอสมการที่ต้องการพิสูจน์ เป็นจริง เมื่อ n = k ดังนั้น

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{k+1}} \le k - 1 + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_k} + 2^{a_{k+1}} \le k + 2^{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}$$

ตัวอย่าง 1.21 (Canadian MO 1978, AMOC 1985) ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 3$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $-1 \le z \le \frac{13}{3}$

วิธีทำ จาก $x+ y + z = 5$ ได้ $(x + y)^2 = (5 - z)^2$

จาก $xy + yz + zx = 3$ ได้ $xy = 3 - z(x + y) = 3 - z(5 - z)$

ดังนั้น

$$0 \le (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = (5 - z)^2 - 4[3 - z(5 - z)] = -3z^2 + 10z + 13 = (13 - 3z)(1 + z)$$

ซึ่งให้ว่า $-1 \le z \le \frac{13}{3}$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.22 ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0$ มีสมบัติว่า

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \sum_{1\le j<k\le n} (x_j x_k)^2 = \frac{n(n+1)}{2} \qquad (1.22.1)$$

เมื่อผลบวกทั้งสองกระทำเหนือทุกดรรชนี 1, 2, ..., n อย่างสมมาตร ครบทุกดรรชนี

(i) จงหาค่าสูงสุดของ $\sum_{k=1}^{n} x_k$

(ii) จงพิสูจน์หรือแสดงให้เห็นว่าเป็นเท็จว่าค่าต่ำสุดของ Σx_1 คือ $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2}$

วิธีทำ (i) สมการ (1.22.1) ที่กำหนดให้ เป็นจริงเมื่อ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$ ดังนั้น ค่าสูงสุดของ $\sum_{k=1}^{n} x_k$ จึง $\ge n$

จากอสมการ $2t - t^2 \le 1$ $(t \in \mathbb{R})$ ได้ว่า

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} x_k\right\}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1\le j<k\le n} x_j x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{1\le j<k\le n} x_j x_k + \sum_{1\le j<k\le n} \left\{(x_j x_k)^2 - (x_j x_k)^2\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 2 \sum_{1\le j<k\le n} x_j x_k - \sum_{1\le j<k\le n} (x_j x_k)^2 \le \frac{n(n+1)}{2} + \sum_{1\le j<k\le n} 1 = n^2$$

ซึ่งให้ $\sum_{k=1}^{n} x_k \le n$

ดังนั้นค่าสูงสุดของของ $\sum_{k=1}^{n} x_k$ คือ n

(ii) เมื่อ n = 1 เห็นได้ชัดเจนว่า ค่าต่ำสุดของ $\sum_{k=1}^{n} x_k$ คือ 1

เมื่อ n = 2 จากเงื่อนไข $x_1^2 + x_2^2 + (x_1x_2)^2 = 3$ ได้ว่า

$$x_1x_2 \le \sqrt{3} < 2$$

ซึ่งให้ว่า

$$(x_1 + x_2)^2 = 3 + x_1x_2(2 - x_1x_2) \ge 3$$

กล่าวคือ $x_1 + x_2 \ge \sqrt{3}$

เนื่องจากอสมการนี้เป็นสมการ เมื่อ $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 0$ จึงได้ว่าค่าต่ำสุดของ $\sum_{k=1}^{n} x_k$ คือ $\sqrt{3}$

เมื่อ n = 3 สมมุติว่า $\max \{x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3\} > 2$

ถ้า $x_1x_2 > 2$ แล้ว

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge x_1 + x_2 \ge 2(x_1x_2)^{1/2} > 2\sqrt{2} > \sqrt{6}$$

ไม่เช่นนั้น จะได้ว่า

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 6 + x_1x_2(2 - x_1x_2) + x_1x_3(2 - x_1x_3) + x_2x_3(2 - x_2x_3) \ge 6$$

กล่าวคือ $x_1 + x_2 + x_3 \ge \sqrt{6}$

เนื่องจาก อสมการนี้เป็นสมการ เมื่อ $x_1 = \sqrt{6}$, $x_2 = x_3 = 0$ ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ $\sum_{k=1}^{n} x_k$ คือ $\sqrt{6}$

ในกรณีที่ $n \ge 4$ เราจะแสดงว่าอสมการที่อ้างถึงไม่เป็นจริง

สังเกตว่าสมการ (1) เป็นจริงเมื่อ $x_1 = x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{\sqrt{2n(n+1)+4} - 2\right\}}$, $x_3 = x_4 = \ldots = x_n = 0$

อย่างไรก็ตาม

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sqrt{2\left\{\sqrt{2n(n+1)+4} - 2\right\}} < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{1/2}$$

ทั้งนี้ เพราะ อสมการท้ายนี้ ลดรูปเป็น $n(n + 1) > 16$ ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $n \ge 4$

ตัวอย่าง 1.23 (APMO 1993) ให้ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ และ $g(x) = c_{n+1}x^{n+1} + c_nx^n + \cdots + c_1x + c_0$ เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามศูนย์ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับ $g(x) = (x - r)f(x)$ สำหรับบาง $r \in \mathbb{R}$

ถ้า $a = \max \{ |a_n| , \ldots , |a_0| \}$, $c = \max \{ |c_{n+1}| , \ldots , |c_0| \}$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{c} \le n + 1$

วิธีทำ แยกการพิจารณาเป็นสองกรณี

- กรณีที่หนึ่ง $|r| \le 1$:

สัมประสิทธิ์ $a_n, a_{n-1}, \ldots , a_0$ ของ $f(x) = \frac{g(x)}{x - r}$ มีค่าเท่ากับ $c_{n+1}, rc_{n+1} + c_n, \ldots , r^nc_{n+1} + \ldots + c_1$

ดังนั้น $a \le (n + 1)c$

- กรณีที่สอง $|r| > 1$: ให้ $y = \frac{1}{x}$

ดังนั้น $(y - \frac{1}{r})(a_0y^n + \ldots + a_n) = -\frac{c_0}{r}y^{n+1} - \cdots - \frac{c_{n+1}}{r}$

สังเกตว่า $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$ เมื่อใช้ผลของกรณีที่แล้ว ได้ว่า

$$a \le (n+1)\frac{c}{|r|} < (n+1)c$$

ตัวอย่าง 1.24 ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}_0$ จงพิสูจน์ว่า $4(a^3 + b^3) \ge (a+b)^3$

วิธีทำ $4(a^3 + b^3) \ge (a+b)^3 \iff 4(a^2 - ab + b^2) \ge (a+b)^2 \iff a^2 - 2ab + b^2 \ge 0$

$\iff (a-b)^2 \ge 0$ ซึ่งเป็นจริงเสมอ

ตัวอย่าง 1.25 ให้ $a \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $3(1 + a^2 + a^4) \ge (1 + a + a^2)^2$

วิธีทำ $3(1 + a^2 + a^4) - (1 + a + a^2)^2 = (1-a)^2 + (a - a^2)^2 + (a^2 - 1)^2 \ge 0$

ตัวอย่าง 1.26 (AMOC 1981) ให้ $n \in \mathbb{N}$, a และ $x \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$, $a^{n+1} \le x \le 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$P(x) := \frac{(x-a)(x-a^2)\cdots(x-a^n)}{(x+a)(x+a^2)\cdots(x+a^n)} \le \frac{(1-a)(1-a^2)\cdots(1-a^n)}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} := P$$

วิธีทำ ถ้า $x = a^j$ สำหรับบาง j แล้ว

$$P(x) = 0 < P(1) = P$$

ถ้า $0 < a < x \le 1$ แล้ว สำหรับ จำนวนจริง b ใด ๆ ที่ $b < x$ จะได้ว่า

$$0 < \frac{x-b}{x+b} = 1 - \frac{2b}{x+b} \le 1 - \frac{2b}{x+b} = \frac{1-b}{1+b}$$

ดังนั้น $P(x) \le P$

ถ้า $a^{n+1} \le x < a$ แล้ว จะมี j เพียงหนึ่งเดียวในช่วง $0 \le j \le n$ ที่ทำให้ $a^{j+1} < x < a^j$

สังเกตว่าในนิพจน์ที่โจทย์ให้พิจารณา แต่ละพจน์ต่อไปนี้เป็นลบ $\frac{x-a}{x+a}, \ldots, \frac{x-a^j}{x+a^j}$ ในขณะที่พจน์ที่เหลือเป็นบวก ดังนั้น ผลคูณจะเป็นลบ เมื่อ j เป็นคี่ และ เป็นบวก เมื่อ j เป็นคู่

ดังนั้น จึงเพียงพอที่จะพิจารณา กรณีที่ j เป็นคู่ ซึ่งได้ว่า

$$0 < \prod_{r=1}^{j}\frac{x-a^r}{x+a^r} = \prod_{r=1}^{j}\frac{a^r - x}{a^r + x} < \prod_{r=1}^{j}\frac{a^r - a^{j+1}}{a^r + a^{j+1}} = \prod_{r=1}^{j}\frac{1-a^{j+1-r}}{1+a^{j+1-r}} = \prod_{r=1}^{j}\frac{1-a^r}{1+a^r}$$

เนื่องจาก $0 < \prod_{r=j+1}^{n}\frac{x-a^r}{x+a^r} < \prod_{r=j+1}^{n}\frac{1-a^r}{1+a^r}$ เมื่อคูณด้วยจำนวนบวกสองจำนวน จะได้ผลที่ต้องการ

สังเกตว่า เงื่อนไข $a^{n+1} \le x$ ถูกใช้ในกรณีที่ $j = n$

ตัวอย่าง 1.27 (IMO 1972) จงหาคำตอบทั้งหมด $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ ของระบบอสมการ

$$(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) \le 0$$
$$(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) \le 0$$
$$(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) \le 0$$
$$(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) \le 0$$
$$(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) \le 0$$

วิธีทำ สังเกตว่าแต่ละอสมการของโจทย์อยู่ในรูป

$$(x_i^2 - x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) \le 0$$

เมื่อดรรชนี อ่านแบบ modulo 5 กล่าวคือ $x_{j+5} = x_j$ ถ้าเราคูณกระจายแต่ละนิพจน์ทางซ้ายมือ แล้วบวกอสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน จะได้ทั้งสิ้น $\binom{5}{4} = 10$ พจน์ ที่อยู่ในรูป $x_i^2x_j^2$ $(i \ne j)$ ปรากฏในผลบวก ร่วมกับพจน์ไขว้ 5 พจน์ในรูป $-x_i^2x_{i+1}x_{i+3}$ และมีอีก 5 พจน์ในรูป $-x_i^2x_{i+2}x_{i+4}$ เหล่านี้แนะว่าผลบวก น่าจะเขียนได้เป็นผลบวกของกำลังสองในรูป $\frac{1}{2}\{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{10}^2\}$ โดยที่แต่ละพจน์ไขว้ เราจับคู่กับ y

ยกตัวอย่างเช่น พจน์ไขว้ $x_2^2x_3x_5$ จับคู่กับ $y_1 = x_2x_3 - x_2x_5$ เพราะทราบว่า พจน์ $x_2^2x_3^2$, $x_2^2x_5^2$ ที่ปรากฏอยู่ใน y_1^2 ปรากฏในผลบวกด้วย ดังนั้น จะได้การแทนเป็นผลบวกของอสมการเหล่านี้เป็น

$$0 \ge \sum_{i=1}^{5} (x_i^2 - x_{i+2}x_{i+4})(x_{i+1}^2 - x_{i+2}x_{i+4}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5} \{(x_ix_{i+1} - x_ix_{i+3})^2 + (x_{i-1}x_{i+1} - x_{i-1}x_{i+3})^2\}$$

เนื่องจากผลบวกของกำลังสอง ไม่เป็นลบ เราสรุปได้ว่า มันต้องเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่า แต่ละพจน์เป็นศูนย์ สิ่งนี้ชี้ว่า $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5$ กล่าวคือ ทุกเซตของจำนวนบวกเป็นคำตอบของระบบอสมการที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 1.28 (USAMO 1999) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 3)$ เป็นจำนวนจริง ที่มีสมบัติว่า

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n \quad \text{และ} \quad a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \ge n^2$$

จงพิสูจน์ว่า $\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \ge 2$

วิธีทำ ให้ $b_i = 2 - a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $S := b_1 + \cdots + b_n$, $T := b_1^2 + \ldots + b_n^2$

ดังนั้น เงื่อนไขทั้งสองของโจทย์ คือ

$$(2 - b_1) + \ldots + (2 - b_n) \ge n \quad \text{และ} \quad (4 - 4b_1 + b_1^2) + \ldots + (4 - 4b_n + b_n^2) \ge n^2$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$S \le n \quad \text{และ} \quad T \ge n^2 - 4n + 4S$$

เมื่อใช้อสมการคู่นี้ พร้อมกัน ได้

$$T \ge n^2 - 4n + 4S \ge (n - 4)S + 4S = nS$$

ในทำนองกลับกัน ถ้า $b_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ แล้ว

$$b_i < b_1 + \cdots + b_n = S \leq n$$

ดังนั้น

$$T \leq b_1^2 + \cdots + b_n^2 < nb_1 + \ldots + nb_n = nS$$

ซึ่งชี้ว่าเป็นไปไม่ได้ที่ $b_i > 0$ สำหรับทุก i ดังนั้น มีบาง i ที่ให้ $b_i \leq 0$ กล่าวคือ $a_i \geq 2$ สำหรับ i ค่านี้ ซึ่งคือสิ่งที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง 1.29 (USAMO 1997) สำหรับทุกจำนวนจริงบวก a, b, c

จงพิสูจน์ว่า $(a^3 + b^3 + abc)^{-1} + (b^3 + c^3 + abc)^{-1} + (c^3 + a^3 + abc)^{-1} \leq (abc)^{-1}$

วิธีทำ จากอสมการ $(a - b)(a^2 - b^2) \geq 0$ ได้ว่า $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$

ดังนั้น
$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{ab(a+b) + abc} = \frac{c}{abc(a+b+c)}$$

ในทำนองเดียวกัน
$$\frac{1}{b^3 + c^3 + abc} \leq \frac{1}{bc(b+c) + abc} = \frac{a}{abc(a+b+c)}$$

และ
$$\frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{ca(c+a) + abc} = \frac{b}{abc(a+b+c)}$$

เมื่อบวกอสมการทั้งสามนี้เข้าด้วยกัน ได้

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{a+b+c}{abc(a+b+c)} = \frac{1}{abc}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 1.30 (AMOC 1997) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$

(ii) $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 1$

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \dfrac{1}{k}$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots, k$

วิธีทำ สังเกตว่าสำหรับแต่ละ i ในช่วง $1 \leq i \leq k$ จากเงื่อนไข (i) ได้ว่า $a_1 + \cdots + a_i \leq ia_{i+1}$

ดังนั้น

$$(i + 1)(a_1 + \ldots + a_i) \leq i(a_1 + \ldots + a_{i+1})$$

กล่าวคือ

$$\frac{a_1 + \ldots + a_i}{i} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_{i+1}}{i+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{a_1}{1} \leq \frac{a_1 + a_2}{2} \leq \cdots \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \cdots \leq \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = \frac{1}{k}$$

ตัวอย่าง 1.31 (USAMO1991) ให้ $a = \dfrac{m^{m+1} + n^{n+1}}{m^m + n^n}$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนนับ

จงพิสูจน์ว่า $a^m + a^n \geq m^m + n^n$

วิธีทำ ให้ N เป็นจำนวนนับที่ $a \neq N$ ดังนั้น

$$\frac{a^N - N^N}{a - N} = a^{N-1} + a^{N-2}N + \ldots + N^{N-1}$$

ถ้า $0 \leq a < N$ แล้ว $\dfrac{a^N - N^N}{a - N} \leq N^N$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $a > N$ แล้ว $\dfrac{a^N - N^N}{a - N} \geq N^N$

ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม เราได้ว่า

$$a^N - N^N \geq (a - N)N^N \qquad (1.31.1)$$

อสมการนี้เป็นจริงเมื่อ $a = N$ ด้วย ดังนั้น (1.31.1) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $N \geq 0$

เมื่อใช้ (1.31.1) สังเกตว่า

$$(a^m + a^n) - (m^m + n^n) = (a^m - m^m) + (a^n - n^n) \geq (a - m)m^m + (a - n)n^n$$
$$= a(m^m + n^n) - (m^{m+1} + n^{n+1}) = 0$$

ตัวอย่าง 1.32 (Canadian MO 1971) ให้ $x, y \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $x + y = 1$ จงแสดงว่า

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

วิธีทำ เนื่องจาก $0 < x < 1$ จึงได้ว่า

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) \geq 9 \iff (x + 1)(1 - x + 1) \geq 9x(1 - x)$$
$$\iff 2 + x - x^2 \geq 9x - 9x^2$$
$$\iff (2x - 1)^2 \geq 0$$

ซึ่งเห็นชัดเจนว่าเป็นจริง

ตัวอย่าง 1.33 (Canadian MO 1972) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_0$ นิยาม M เป็นผลบวกของทุกผลคูณ a_ia_j เมื่อ $i < j$

กล่าวคือ $M = a_1(a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + a_2(a_3 + a_4 + \ldots + a_n) + \cdots + a_{n-1}a_n$

จงพิสูจน์ว่า กำลังสองของอย่างน้อยหนึ่งจำนวนจาก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ มีค่าไม่เกิน $\dfrac{2M}{n(n-1)}$

วิธีทำ ให้ a เป็นจำนวนค่าน้อยสุดในบรรดา $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ดังนั้น $a_ia_j \geq a^2$ และ

$$M = \sum_{i<j} a_ia_j \geq \binom{n}{2}a^2$$

ซึ่งให้ว่า $a^2 \leq M\Big/\binom{n}{2} = \dfrac{2M}{n(n-1)}$

ตัวอย่าง 1.34 (Canadian MO 1974) ให้ $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $0 \le a_i \le a_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ให้ $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของพหุนาม

$$\{f(x)\}^2 = (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n)^2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + \cdots + b_{2n}x^{2n}$$

จงพิสูจน์ว่า $b_{n+1} \le \frac{1}{2}\{f(1)\}^2$

วิธีทำ จากการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$b_{n+1} = a_1a_n + a_2a_{n-1} + \cdots + a_na_1 \le a_1a_0 + a_2a_0 + \cdots + a_na_0$$

เมื่อบวกเข้าด้วยกันได้

$$\begin{aligned} 2b_{n+1} &\le a_1(a_0 + a_n) + a_2(a_0 + a_{n-1}) + \cdots + a_n(a_0 + a_1) \\ &\le a_1(a_0 + \cdots + a_n) + a_2(a_0 + \cdots + a_n) + \cdots + a_n(a_0 + \cdots + a_n) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n)(a_0 + \cdots + a_n) \\ &\le (a_0 + \cdots + a_n)^2 = \{f(1)\}^2 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a + b + c \ge abc$ จงแสดงว่า $a^2 + b^2 + c^2 \ge abc$

2. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a \ne b$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

3. จงพิสูจน์ว่า $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \ge 2$ สำหรับทุกจำนวนจริง a

4. กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ โดยที่ $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ จงแสดงว่า $-\frac{1}{2} \le ab + bc + ca \le 1$

5. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$

6. ให้ $Q_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{19}{12} - \frac{1}{n+1} < Q_n < \frac{7}{4} - \frac{1}{n} \qquad (n \ge 3)$$

7. ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$

8. เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}_0$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$a^3(b + 1) + b^3(a + 1) \ge a^2(b + b^2) + b^2(a + a^2)$$

9. จงพิสูจน์ว่า $11 \cdot \sqrt[1994]{10} > 10 + \sqrt[1000]{10}$

10. ถ้า $a, b \in \mathbb{R}^+$ แล้ว จงแสดงว่า $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \geq \frac{9}{a+b}$

11. จงพิสูจน์ว่า $\left(1 - \frac{1}{(1993)^3}\right)\left(1 - \frac{1}{(1994)^3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^3}\right) > \frac{1992}{1993}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ≥ 1993

12. จงแก้อสมการ $(x^3 + x^2 + 1)^2 > 4x^3(x-1)^2$

13. ให้ $a_1, \ldots, a_n$ $(n \geq 2)$ เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ จงแสดงว่า
อสมการ $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} > 0$ เป็นจริง สำหรับทุก n-อันดับ ของจำนวนจริง $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$
ก็ต่อเมื่อ $a_2 \geq 2$

14. จงหาจำนวนนับ n ที่ทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง
สำหรับทุก n-อันดับของจำนวนบวก $(a_1, \ldots, a_n)$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i^3 \geq 6 \prod_{i=1}^{n} a_i$$

15. ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left|\frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right|$$

บทที่ 2

อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต

(Arithmetic Mean-Geometric Mean Inequality)

2.1 อสมการ AM-GM

กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $x_i \in \mathbb{R}^+$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้วนิยาม

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) ของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็น $\dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ และ

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean) ของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็น $(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$

ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (harmonic mean) ของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็น $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$

ทฤษฎีบทที่ 2.1 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ จะได้ว่า

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \qquad (2.1)$$

อสมการ (2.1) เรียกว่า **อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต-ฮาร์โมนิก** และเพื่อความสะดวกจะขอเรียกย่อๆว่า **อสมการ AM-GM-HM** หรืออสมการ AM-GM ในส่วนหลังและ GM-HM ในส่วนแรก

อสมการ (2.1) จะเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ เท่ากันทุกจำนวน

วิธีการพิสูจน์อสมการ AM-GM สามารถทำได้หลายทาง ในที่นี้จะขอเสนอวิธีการพิสูจน์ 2 แบบ

พิสูจน์แบบที่ 1 (Cauchy-Forward & Backward Induction)

เราเริ่มต้นโดยการพิสูจน์ว่าอสมการ AM-GM เป็นจริงสำหรับจำนวนจริงบวกสองจำนวน

จากอสมการ $(y_1 - y_2)^2 \geq 0$ จะได้ว่า $y_1^2 + y_2^2 \geq 2y_1y_2$ สำหรับทุก $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$
แทนค่า $y_1^2 = x_1$ และ $y_2^2 = x_2$ จะได้ว่า

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2} \tag{2.2}$$

ดังนั้นอสมการ AM-GM เป็นจริงสำหรับจำนวนจริงบวกใดๆสองจำนวนและ จากเงื่อนไขว่า

$$(y_1 - y_2)^2 = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad y_1 = y_2$$

ทำให้ได้ด้วยว่า อสมการ (2.2) จะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$

ขั้นต่อมา แทนค่า x_1 ด้วย $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ และ แทนค่า x_2 ด้วย $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$ ใน (2.2) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{2} &\geq \left[\frac{(x_1 + x_2)}{2} \cdot \frac{(x_3 + x_4)}{2}\right]^{1/2} \\ &\geq \left[(x_1x_2)^{1/2}\,(x_3x_4)^{1/2}\right]^{1/2} \\ &= (x_1x_2x_3x_4)^{1/4}\end{aligned}$$

ดำเนินการซ้ำเช่นนี้จะทำให้ได้ อสมการ (2.1) เป็นจริง เมื่อ $n = 2, 4, \ldots$ นั่นคือ n เป็นกำลังของสอง การดำเนินการแบบนี้เรียกว่า **forward induction**

ต่อไปจะใช้วิธีการที่เรียกว่า **backward induction** โดยการแสดงว่า ถ้าอสมการเป็นจริงที่จำนวนจริง n จำนวน แล้วจะเป็นจริงที่ $n - 1$ จำนวนด้วย

ให้ $x_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$ โดยที่ $n \geq 2$ และแทนค่า x_n ใน (2.1) จะได้

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n} \geq (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{1/n}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{1/n}$$

เนื่องจาก

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$$

ดังนั้น

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{1/n}\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{1/n}$$

จัดรูปใหม่ได้ว่า

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n} \geq (x_1x_2\cdots x_{n-1})\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq (x_1x_2\cdots x_{n-1})$$

แสดงว่า $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1} \geq (x_1 x_2 \cdots x_{n-1})^{1/(n-1)}$

นั่นคืออสมการ (2.1) เป็นจริงที่ $n-1$ จำนวนด้วย

จากวิธี forward induction เราได้ว่า อสมการ (2.1) เป็นจริงเมื่อ $n = 2, 4, \ldots$ ดังนั้นจากวิธี backward induction ก็จะได้ว่าอสมการ (2.1) เป็นจริงเมื่อ $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ เมื่อรวมทั้งสองขั้นตอนก็จะได้ว่าอสมการ (2.1) เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ □

พิสูจน์แบบที่ 2 (Ehlers's Method)

ขั้นที่ 1 เราเริ่มต้นพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริงใดๆ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$

ถ้า $x_1x_2\cdots x_n = 1$ แล้วจะได้ว่า $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$ โดยใช้การอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ P(n) แทนข้อความ

"สำหรับจำนวนจริงใดๆ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ ถ้า $x_1x_2\cdots x_n = 1$ แล้วจะได้ว่า $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n$"

เมื่อ $n = 1$ เห็นได้ชัดว่า P(1) เป็นจริง

สมมุติให้ P(n) เป็นจริง จะพิสูจน์ว่า P(n+1) เป็นจริงด้วย

ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $x_1x_2\cdots x_{n+1} = 1$

ดังนั้นจะต้องมี x_i , x_j บางจำนวนซึ่ง $x_i \geq 1$ และ $x_j \leq 1$

โดยไม่เสียนัยทั่วไปสมมุติให้ $x_1 \geq 1$ และ $x_2 \leq 1$

ทำให้ได้ว่า $(x_1 - 1)(x_2 - 1) \leq 0$ นั่นคือ $1 + x_1x_2 \leq x_1 + x_2$

เนื่องจาก P(n) เป็นจริง และ $x_1x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}$ เป็นจำนวน n จำนวนซึ่ง $(x_1x_2)x_3\cdots x_{n+1} = 1$

ดังนั้น $x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geq n$

$\therefore\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} \geq 1 + x_1x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geq n + 1$

นั่นคือ P(n+1) เป็นจริงด้วย สรุปได้ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

ขั้นที่ 2 พิสูจน์อสมการ AM-GM โดยให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ และ $x_1x_2\cdots x_n = G > 0$

ให้ $a_1 = \frac{x_1}{\sqrt[n]{G}}$, $a_2 = \frac{x_2}{\sqrt[n]{G}}$, $\ldots$, $a_n = \frac{x_n}{\sqrt[n]{G}}$

ดังนั้น $a_1a_2\cdots a_n = 1$

จากขั้นที่ 1 จะได้ว่า $n \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt[n]{G}}$

$$\therefore\ (x_1x_2\cdots x_n)^{1/n} = \sqrt[n]{G} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

ได้ อสมการ AM-GM เป็นจริง

ต่อไปเป็นการพิสูจน์ส่วนอสมการ GM-HM

เมื่อใช้อสมการ AM-GM กับ $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ ได้ว่า

$$\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}\cdots\frac{1}{x_n}\right)^{1/n}$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

โดยได้เป็นสมการก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \ldots = \frac{1}{x_n}$ กล่าวคือ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ □

ตัวอย่าง 2.1 จงพิสูจน์ว่ารูปสี่เหลี่ยมลูกบาศก์เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีปริมาตรสูงสุด เมื่อกำหนดพื้นที่ผิวคงตัวมาให้ และเป็นรูปทรงที่มีพื้นที่ผิวต่ำสุดเมื่อกำหนดปริมาตรคงตัวมาให้

วิธีทำ กำหนดให้ทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากมี ความกว้าง a หน่วย ความยาว b หน่วย และความสูง c หน่วย ให้ A และ V เป็นพื้นที่ผิวและปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากตามลำดับ
ดังนั้น

$$A = 2(ab + bc + ca) \quad \text{และ} \quad V = abc$$

โดยอสมการ AM-GM จะได้ว่า

$$V^2 = a^2b^2c^2 = (ab)(bc)(ca) \leq \left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right)^3 = \left(\frac{2(ab+bc+ca)}{6}\right)^3 = \left(\frac{A}{6}\right)^3$$

ดังนั้น สำหรับทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากใดๆจะได้ว่า $6(V)^{2/3} \leq A$
และจะได้เป็นสมการก็ต่อเมื่อ $ab = bc = ca$ นั่นคือ $a = b = c$

กรณีที่ 1 เมื่อกำหนดพื้นที่ผิวคงตัว A มาให้ ปริมาตร V สูงสุดที่เป็นไปได้คือ $V = \left(\frac{A}{6}\right)^{3/2}$
ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ $a = b = c$ นั่นคือทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นเป็นลูกบาศก์

กรณีที่ 2 เมื่อกำหนดปริมาตรคงตัว V มาให้ พื้นที่ผิว A ต่ำสุดที่เป็นไปได้คือ $A = 6(V)^{2/3}$
ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อ $a = b = c$ นั่นคือทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากนั้นเป็นลูกบาศก์

ตัวอย่าง 2.2 จงพิสูจน์ว่าสำหรับทุกจำนวน $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$n\left((n+1)^{1/n}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < n-(n-1)n^{-1/(n-1)}$$

วิธีทำ ให้ $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ พิจารณาอสมการแรกทางซ้ายมือ

ต้องการแสดงว่า $$n\left((n+1)^{1/n}-1\right) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} = s_n$$

นั่นคือต้องแสดง ว่า $(n+1)^{1/n} < \frac{n+s_n}{n}$

พิจารณา $\frac{n+s_n}{n} = \frac{(1+1)+(1+\frac{1}{2})+(1+\frac{1}{3})+\cdots+(1+\frac{1}{n})}{n}$

$= \frac{2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{n+1}{n}}{n}$

$> \left(2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)^{1/n} = (n+1)^{1/n}$ ได้ตามที่ต้องการ

พิจารณาอสมการทางขวามือ ต้องการแสดงว่า

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < n-(n-1)n^{-1/(n-1)}$$

นั่นคือต้องได้ว่า $\frac{n-s_n}{n-1} > \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)}$

พิจารณา $\frac{n-s_n}{n-1} = \frac{(1-1)+(1-\frac{1}{2})+(1-\frac{1}{3})+\cdots+(1-\frac{1}{n})}{n-1}$

$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n-1}{n}}{n-1}$

$> \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n}\right)^{1/(n-1)} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/(n-1)}$ ได้ตามที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.3 กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ และ $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ จงพิสูจน์ว่า $abc \le 1$

วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้ $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ จะได้ว่า

$$1 + (a+b+c) + (ab+bc+ca) + abc = 8$$

โดย อสมการ AM-GM จะได้

$a+b+c \ge 3(abc)^{1/3}$ และ $ab+bc+ca \ge 3(a^2b^2c^2)^{1/3} = 3(abc)^{2/3}$

ดังนั้น $8 = 1+(a+b+c)+(ab+bc+ca)+abc$

$\ge 1+3(abc)^{1/3}+3(abc)^{2/3}+abc = \left(1+(abc)^{1/3}\right)^3$

$\therefore \quad 1+(abc)^{1/3} \le 2$ นั่นคือ $(abc)^{1/3} \le 1$ ทำให้ได้ว่า $abc \le 1$

ตัวอย่าง 2.4 กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ และ $x_{n+1} = x_1$

จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right) \le \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\right)^n$

วิธีทำ กรณี $n = 1$ จะได้ว่า $x_2 = x_1$ และ $\frac{x_2}{x_1} = 1 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$ นั่นคือ อสมการเป็นจริง

พิจารณากรณี $n = 2$ โดยอสมการ AM-GM จะได้ว่า

$$\frac{x_2}{x_1} \leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 1^2\right]$$

$$\frac{x_3}{x_2} \leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 + 1^2\right]$$

$$1 = \frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2} \leq \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2\right]$$

เมื่อบวกสมการทั้งสามเข้าด้วยกันได้

$$1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} \leq 1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^2$$

ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ

กรณี $n = 3$ จากอสมการ AM-GM ได้ว่า

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1}\cdot 1 \leq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3 + 1^3\right]$$

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_3}{x_1}\cdot 1 \leq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3 + 1^3\right]$$

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot 1 \leq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3 + 1^3\right]$$

และ $$1 = \frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\frac{x_3}{x_1} \leq \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3\right]$$

เมื่อบวกอสมการทั้งสี่เข้าด้วยกันได้

$$1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \frac{x_1}{x_3} \leq 1 + \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^3 + \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^3 + \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^3$$

ตามต้องการ การพิสูจน์ในกรณี n ใดๆ ทำได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.5 ให้ k, n เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า $n^{kn} \geq (n^k + n^{k-1} + \ldots + n + 1)^{n-1}$

วิธีทำ กรณี $n = 1$ เห็นได้ชัดเจนว่าอสมการที่ต้องการพิสูจน์เป็นสมการ

จากนี้ไปสมมุติว่า $n > 1$ พิจารณา

$$n^k = \frac{(n^{k+1}-1)+1}{n} = \frac{(n-1)(n^k+n^{k-1}+\cdots+1)+1}{n}$$
$$= \frac{(n^k+n^{k-1}+\cdots+1)+\cdots+(n^k+n^{k-1}+\cdots+1)+1}{n} \quad \text{(ในตัวเศษมี } n-1 \text{ พจน์เหมือนกัน)}$$
$$> \sqrt[n]{(n^k+n^{k-1}+\cdots+1)^{n-1}\cdot 1} \quad \text{(โดยอสมการ AM-GM)}$$
$$= (n^k+n^{k-1}+\ldots+1)^{(n-1)/n}$$

เมื่อยกกำลัง n ทั้งสองข้างได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.6 (IMO 2001) จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1 \text{ เมื่อ } a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

วิธีทำ เราคาดว่าจะมีจำนวนจริงบวก s ที่มีสมบัติว่า

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^s}{a^s+b^s+c^s} \qquad (2.6.1)$$

เมื่อพบดังนี้แล้ว โดยการบวกอสมการประเภทเดียวกันกับ (2.6.1) สามครั้ง เทียบกับ a, b, c จะได้อสมการที่ต้องการ

หลังจากทดลองหลาย ๆ ค่า พบว่าใช้ $s = \frac{4}{3}$ ได้ ซึ่งตรวจสอบได้ดังนี้ โดยอสมการ AM-GM

$(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3})^2 - (a^{4/3})^2 = (b^{4/3}+c^{4/3})(2a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}) \geq 2b^{2/3}c^{2/3}.4a^{2/3}b^{1/3}c^{1/3} = 8a^{2/3}bc$

ดังนั้น $(a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3})^2 \geq (a^{4/3})^2 + 8a^{2/3}bc = a^{2/3}(a^2+8bc)$

ซึ่งให้ว่า

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{4/3}}{a^{4/3}+b^{4/3}+c^{4/3}} \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 2.7 ให้ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ เป็นจำนวนจริง ให้ $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ มีสมบัติว่า $|f(0)| = f(1)$ และทุกราก r ของ f เป็นจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับอสมการ $0 < r < 1$ จงพิสูจน์ว่า ผลคูณของรากทั้งหมดของ f มีค่าไม่เกิน $\frac{1}{2^n}$

วิธีทำ ให้ $r_1, r_2, \ldots, r_n$ เป็นรากทั้งหมดของ f ดังนั้น $f(x) = (x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n)$

สังเกตว่า $r_1r_2\ldots r_n = |f(0)| = f(1) = (1-r_1)(1-r_2)\ldots(1-r_n)$

เนื่องจาก $0 < r_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ โดยอสมการ AM-GM ได้

$$(r_1r_2\ldots r_n)^2 = r_1(1-r_1)r_2(1-r_2)\ldots r_n(1-r_n) \leq \left(\frac{r_1+1-r_1+r_2+1-r_2+\cdots+r_n+1-r_n}{2n}\right)^{2n} = \frac{1}{2^{2n}}$$

ดังนั้น $r_1r_2\ldots r_n \leq \frac{1}{2^n}$

ตัวอย่าง 2.8 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่มีค่าอยู่ในช่วง [1, 2] จงแสดงว่า

$$\left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right| \le \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

วิธีทำ ให้ $A = \left|\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right| = \frac{|a-c||a-b||b-c|}{abc}$

โดยความสมมาตรของโจทย์ สามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า $c \le b \le a$

ให้ $x = \frac{c}{a}$, $y = \frac{b}{a}$ ดังนั้น $\frac{1}{2} \le x \le y \le 1$ และโดยอสมการ AM-GM ได้

$$A = \frac{(a-ax)(a-ay)(ay-ax)}{a\cdot ax\cdot ay} = \frac{(1-x)(1-y)(y-x)}{xy} \le \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)(1-y)\left(y-\frac{1}{2}\right)}{\frac{y}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}-\left(y+\frac{1}{2}y\right) \le \frac{3}{2}-\sqrt{2} = \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

ตัวอย่าง 2.9 จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x, y, z ใดๆ

$$(x+y)(x+z)(y+z) \ge 8(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)$$

วิธีทำ ให้ $a = x+y-z$, $b = x+z-y$, $c = y+z-x$ สังเกตว่า มีอย่างมากเพียงจำนวนเดียวจาก a, b, c เท่านั้นที่อาจเป็นลบได้ ซึ่งในกรณีนี้ อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน ดังนั้นจากนี้ไปจึงเพียงพอที่จะพิจารณากรณีที่ $a \ge 0, b \ge 0, c \ge 0$ ซึ่งโดยอสมการ AM-GM ซ้ำสองครั้งให้ว่า

$$\begin{aligned}(x+y)(x+z)(y+z) &= \frac{1}{2}(b+c+2a)\,\frac{1}{2}(a+c+2b)\,\frac{1}{2}(a+b+2c)\\ &\ge \{(b+c)2a\}^{1/2}\{(a+c)2b\}^{1/2}\{(a+b)2c\}^{1/2}\\ &\ge 2a^{1/2}(bc)^{1/4}\,2b^{1/2}(ac)^{1/4}\,2c^{1/2}(ab)^{1/4} = 8abc = 8(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.10 จงพิสูจน์ว่า $1 < \frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\ldots+\frac{1}{3001} < \frac{4}{3}$

วิธีทำ พิจารณาจำนวนจริง 2001 จำนวนในรูป $\frac{1}{k}$ $(1001 \le k \le 3001)$ โดยอสมการ AM-HM ได้

$$\sum_{k=1001}^{3001} k \sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k} \ge \frac{(2001)^2}{\frac{1}{1001}+\cdots+\frac{1}{3001}}\left(\frac{1}{1001}+\cdots+\frac{1}{3001}\right) \ge (2001)^2$$

แต่ $\sum_{k=1001}^{3001} k = (2001)^2$ ดังนั้น $\sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k} > 1$

ในทำนองตรงข้าม เมื่อรวมพจน์ครั้งละ 500 พจน์ ได้

$$\sum_{k=1001}^{3001}\frac{1}{k} < \frac{500}{1000}+\frac{500}{1500}+\frac{500}{2000}+\frac{500}{2500}+\frac{1}{3001} < \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3000} = \frac{3851}{3000} < \frac{4}{3}$$

ตัวอย่าง 2.11 ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0$ โดยที่ $a + b + c + d = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$S := \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM $2a+1 = \frac{1}{2}\{(4a+1)+1\} \geq \sqrt{(4a+1)\cdot 1}$ ดังนั้น $\sqrt{4a+1} \leq 2a+1$ โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $a = 0$ อสมการทำนองเดียวกัน เป็นจริงสำหรับอีกสามพจน์ที่เหลือ เพราะฉะนั้น

$$S < (2a+1)+(2b+1)+(2c+1)+(2c+1) = 2(a+b+c+d)+4 = 6$$

ซึ่งเป็นอสมการแท้เพราะ a , b, c ,d ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ตัวอย่าง 2.12 ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a + b = 1$ จงพิสูจน์ว่า $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$

วิธีทำ $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2 = a^2+\frac{1}{a^2}+b^2+\frac{1}{b^2}+4 = (a+b)^2-2ab+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{2}{ab}+4$

$$= 1-2ab+\frac{1}{a^2b^2}-\frac{2}{ab}+4 = (1-2ab)\left(1+\frac{1}{a^2b^2}\right)+4$$

$$\geq \left(1-\frac{1}{2}\right)(1+16)+4 \quad (\text{เนื่องจาก } ab \leq \{(a+b)/2\}^2 = \frac{1}{4} \text{ โดยอสมการ AM-GM})$$

$$= \frac{25}{2}$$

ตัวอย่าง 2.13 ถ้า $x_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, $x_{n+1} = x_1$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $\prod_{i=1}^{n}(x_i+x_{i+1})^{-1} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^n$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM $\prod_{i=1}^{n}(x_i+x_{i+1}) \leq \left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i+x_{i+1})}{n}\right\}^n = \left(\frac{2}{n}\right)^n$

เมื่อกลับเศษเป็นส่วน ได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.14 จงพิสูจน์ว่า $(\sqrt{2}-1)(\sqrt[3]{6}-\sqrt{2})\cdots(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}) < \frac{n!}{(n+1)^n}$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM

$$1\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt[3]{6}-\sqrt{2})\cdots(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}) < \left(\frac{1+(\sqrt{2}-1)+(\sqrt[3]{6}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!})}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

ตัวอย่าง 2.15 ให้ $a_n = (n!)^{1/n}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณาลำดับ $\{b_n\}$ ที่นิยามโดย $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

จงพิสูจน์ว่า $b_n > 2^{1/(n+1)}$ สำหรับทุก $n > 1$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM $(1\cdot 2\cdots n)^{1/n} < \frac{1+2_1+\cdots+n}{n} = \frac{1}{2}(n+1)$

เมื่อคูณตลอดด้วย n! ได้ $\frac{(n+1)!}{2} > (n!)^{(n+1)/n}$ ซึ่งให้ว่า $a_{n+1}{}^{n+1} > 2a_n{}^{n+1}$ เมื่อเปลี่ยนเป็น b_n ได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.16 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง $\in (0, 1)$ และ $a + b + c = 2$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{1-a}\cdot\frac{b}{1-b}\cdot\frac{c}{1-c} \geq 8$$

วิธีทำ ให้ $x = 1 - a, y = 1 - b, z = 1 - c$

ดังนั้น อสมการที่ต้องการเปลี่ยนรูปเป็น $\frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-y}{y}\cdot\frac{1-z}{z} \geq 8$ ภายใต้เงื่อนไข $x, y, z \in (0, 1)$, $x + y + z = 1$

อสมการนี้สมมูลกับอสมการ $(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geq 8xyz$ เมื่อกระจายนิพจน์ทางซ้ายมือ และใช้เงื่อนไข พบว่า

อสมการกลายเป็น $xy + yz + zx \geq 9xyz$ กล่าวคือ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 9$ สังเกตว่าอสมการท้ายนี้เป็นจริง

จากอสมการ AM-HM โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x = y = z$ กล่าวคือ $a = b = c$

ตัวอย่าง 2.17 ให้ $x_1,\ldots, x_{n+1}$ เป็นจำนวนจริงบวกที่มีสมบัติว่า $\frac{1}{1+x_1} +\ldots+\frac{1}{1+x_{n+1}} = 1$

จงพิสูจน์ว่า $x_1\ldots x_{n+1} \geq n^{n+1}$

วิธีทำ ให้ $a_i = \frac{1}{1+x_i}$ ดังนั้น $x_i = \frac{1-a_i}{a_i}$ และให้ $A = a_1a_2\cdots a_{n+1}$ ดังนั้น

$$x_1x_2\cdots x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n+1}\frac{1-a_i}{a_i} = \frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)$$

จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ได้ $a_1 +\ldots+ a_{n+1} = 1$ ซึ่งให้ว่า $1 - a_i = a_1 +\ldots+ a_{i-1} + a_{i+1} +\ldots+ a_{n+1}$

โดยอสมการ AM-GM $\frac{a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{n+1}}{n} \geq (a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}\cdots a_{n+1})^{1/n}$ ซึ่งให้ว่า

$\frac{1-a_i}{n} \geq \left(\frac{A}{a_i}\right)^{1/n}$ กล่าวคือ $\frac{\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i)}{n^{n+1}} \geq \left(\frac{A^{n+1}}{a_1\cdots a_{n+1}}\right)^{1/n} = A$

เพราะฉะนั้น $x_1\ldots x_{n+1} = \frac{1}{A}\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) \geq n^{n+1}$

ตัวอย่าง 2.18 ให้ x, y แปรไปเหนือเซตของจำนวนจริงไม่ติดลบ ถ้า $x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} = 4$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $x^2y \le 4$

วิธีทำ ถ้า x หรือ y เป็น 0 อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน จากนี้ไปสมมุติว่า ทั้ง x และ y ไม่เป็น 0 โดย อสมการ AM-GM $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y\right) \ge \sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot y}$ ซึ่งให้ว่า $x + y \ge 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3}$

ดังนั้น $\frac{1}{15}(2x^2 + 2xy + 3y^2) = \frac{1}{15}\left\{\left(\frac{2x^2}{8}+\cdots+\frac{2x^2}{8}\right)+\left(\frac{2xy}{4}+\cdots+\frac{2xy}{4}\right)+(y^2+y^2+y^2)\right\}$

$$\ge \left\{\left(\frac{2x^2}{8}\right)^8\left(\frac{2xy}{4}\right)^4(y^2)^3\right\}^{1/15} = \left(\frac{x^{20}y^{10}}{2^{20}}\right)^{1/15}$$

กล่าวคือ $2x^2 + 2xy + 3y^2 \ge 15\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{2/3}$

เพราะฉะนั้น $4 = x + y + \sqrt{2x^2 + 2xy + 3y^2} \ge 3\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3} + \sqrt{15}\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3} > 4\left(\frac{x^2y}{4}\right)^{1/3}$

ตัวอย่าง 2.19 ถ้า $p, q, r \in \mathbb{N}$ แล้ว จงแสดงว่า

$$3^{p+q+r} \ge \left(1+\frac{q+r}{p}\right)^p\left(1+\frac{r+p}{q}\right)^q\left(1+\frac{p+q}{r}\right)^r$$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM

$$\frac{3}{p+q+r} = \frac{\underbrace{\left(\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}\right)}_{p\text{ ครั้ง}}+\underbrace{\left(\frac{1}{q}+\cdots+\frac{1}{q}\right)}_{q\text{ ครั้ง}}+\underbrace{\left(\frac{1}{r}+\cdots+\frac{1}{r}\right)}_{r\text{ ครั้ง}}}{p+q+r}$$

$$\ge \left(\frac{1}{p^pq^qr^r}\right)^{\frac{1}{p+q+r}}$$

ดังนั้น

$$3^{p+q+r} \ge \frac{(p+q+r)^{p+q+r}}{p^pq^qr^r} = \left(1+\frac{q+r}{p}\right)^p\left(1+\frac{r+p}{q}\right)^q\left(1+\frac{p+q}{r}\right)^r$$

ตัวอย่าง 2.20 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาค่าสูงสุดของ $F = \frac{(x^{2n}-a^{2n})(b^{2n}-x^{2n})}{(x^{2n}+a^{2n})(x^{2n}+b^{2n})}$ เมื่อ x แปรไป เหนือจำนวนจริง

วิธีทำ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติว่า $a, b \ge 0$ โดยการตั้งหาร ได้

$$F = -1 + \frac{2(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}}{x^{4n}+(a^{2n}+b^{2n})x^{2n}+a^{2n}b^{2n}} = -1 + \frac{2(a^{2n}+b^{2n})}{x^{2n}+(a^{2n}+b^{2n})+\left(\frac{a^{2n}b^{2n}}{x^{2n}}\right)}$$

โดยอสมการ AM-GM

$$x^{2n} + \frac{a^{2n}b^{2n}}{x^{2n}} + (a^{2n}+b^{2n}) \geq 3\{a^{2n}b^{2n}(a^{2n}+b^{2n})\}^{1/3}$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x^{2n} = \left(\frac{ab}{x}\right)^{2n} = a^{2n}+b^{2n}$ คือเมื่อ $x^2 = ab$ เพราะฉะนั้น

$$F_{max} = \frac{((ab)^n - a^{2n})(b^{2n}-(ab)^n)}{((ab)^n+a^{2n})((ab)^n+b^{2n})} = \frac{(b^n-a^n)^2}{(b^n+a^n)^2}$$

ตัวอย่าง 2.21 ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots$ นิยาม $a_{n+i} = a_i$, $b_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_{i+m}$ จงพิสูจน์ว่า $m^n a_1a_2\cdots a_n < b_1b_2\cdots b_n$ ยกเว้นในกรณีที่ทุก a_i มีค่าเท่ากัน

วิธีทำ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ สมมูลกับ $\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i}{m} > a_1a_2\cdots a_n$ โดยอสมการ AM-GM

$$\frac{b_i}{m} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}a_{i+k} \geq \left(\prod_{k=1}^{m}a_{i+k}\right)^{1/m}$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ ทุก a_{i+k} มีค่าเท่ากัน ดังนั้น

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b_i}{m}\right) > \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{m}a_{i+k}\right)^{1/m} = \left(\prod_{i=1}^{n}a_i^m\right)^{1/m} = a_1a_2\cdots a_n$$

ยกเว้นในกรณีที่ทุก a_i มีค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 2.22 (IMO 2000) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $abc = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$$

วิธีทำ เนื่องจากเงื่อนไข $abc = 1$ ไม่เป็นเอกพันธุ์ แต่สามารถเปลี่ยนเป็นเอกพันธุ์ ได้โดยการเปลี่ยนตัวแปร $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$ โดยที่ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ ซึ่งทำให้เงื่อนไข $1 = abc$ หมดไป และ นิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการที่ต้องการเปลี่ยนรูปเป็น

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)$$

$$= \frac{(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)}{xyz}$$

และอสมการที่ต้องการพิสูจน์ เปลี่ยนเป็น $(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leq xyz$

สังเกตว่า อย่างมากเพียงจำนวนเดียวจาก $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ เป็นลบได้ ทั้งนี้เพราะสองจำนวนใด ๆ จากสามจำนวนดังกล่าวมีผลรวมเป็นบวก

ถ้ามีหนึ่งพจน์พอดีที่เป็นลบ แล้ว $uvw \le 0 < xyz$ ตามต้องการ

จากนี้ไปพิจารณากรณีที่ $u \ge 0, v \ge 0, w \ge 0$ โดยอสมการ AM-GM ได้

$$(uv)^{1/2} = \{(x - y + z)(y - z + x)\}^{1/2} \le \frac{1}{2}\{(x - y + z) + (y - z + x)\} = x$$

ในทำนองเดียวกัน $(vw)^{1/2} \le y$, $(wu)^{1/2} \le z$ เพราะฉะนั้น $uvw \le xyz$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.23 (AMOC 1992) ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1} > n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

วิธีทำ สังเกตว่าอสมการที่ต้องการพิสูจน์ สมมูลกับอสมการ

$$\frac{1}{n}\left(n + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > \sqrt[n]{2}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\left((1+\frac{1}{n}) + (1+\frac{1}{n+1}) + \cdots + (1+\frac{1}{2n-1})\right) &= \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n+1} + \cdots + \frac{2n}{2n-1}\right) \\ &> \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n-1}\right)} \qquad \text{(โดยอสมการ AM-GM)} \\ &= \sqrt[n]{2}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.24 ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \ge 1$

วิธีทำ ให้ $x = b + 2c$, $y = c + 2a$, $z = a + 2b$

ดังนั้น $a = \frac{1}{9}(4y + z - 2x)$, $b = \frac{1}{9}(4z + x - 2y)$, $c = \frac{1}{9}(4x + y - 2z)$

และอสมการที่ต้องการ เปลี่ยนรูปเป็น

$$\frac{4y + z - 2x}{9x} + \frac{4z + x - 2y}{9y} + \frac{4x + y - 2z}{9z} \ge 1$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + 3\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{y}\right) \ge 15$$

อสมการท้ายนี้ เป็นจริง เพราะแต่ละพจน์ในสามพจน์แรก มีค่า ≥ 2 (โดยอสมการ AM-GM) ในขณะที่พจน์ในวงเล็บสุดท้ายทางซ้ายมือ มีค่า ≥ 3 โดยอสมการ AM-GM เช่นกัน ซึ่งให้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.25 จงหาค่าต่ำสุดของ $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}$ เมื่อ (x, y, z) เป็นจุดบนทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM $\frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2) \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2}$ ซึ่งให้ว่า $\frac{-1}{\sqrt{3}} \leq (xyz)^{1/3} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น $\frac{1}{3}\left(\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}\right) \geq (xyz)^{1/3}$ ซึ่งให้ว่า $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq 3(xyz)^{1/3} \geq \frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น ค่าต่ำสุดของ $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x}$ คือ $-\sqrt{3}$ และเกิดเมื่อ $x = y = z = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

ตัวอย่าง 2.26 ให้ $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a_1 \cdots a_n = 1$ และให้ $x_i = (a_1 + \ldots + a_n) - a_i$ $(i = 1, \ldots, n)$

จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} \leq 1$

วิธีทำ ให้ $a_i = b_i^n$ $(i = 1, \ldots, n)$ โดยอสมการ AM-GM ได้

$$b_1b_2 \ldots b_{n-1}(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}) = (b_1^n b_2^n \cdots b_{n-1}^n b_1^n)^{1/n} + (b_1^n b_2^n \cdots b_{n-1}^n b_2^n)^{1/n} + \cdots + (b_1^n b_2^n \cdots b_{n-1}^n b_{n-1}^n)^{1/n}$$

$$\leq \frac{1}{n}(b_1^n + b_2^n + \cdots + b_{n-1}^n + b_1^n) + \frac{1}{n}(b_1^n + b_2^n + \cdots + b_{n-1}^n + b_2^n) + \cdots + \frac{1}{n}(b_1^n + b_2^n + \cdots + b_{n-1}^n + b_{n-1}^n)$$

$$= b_1^n + b_2^n + \cdots + b_{n-1}^n$$

จากอสมการนี้ พร้อมด้วย $b_1b_2 \cdots b_n = 1$ ได้ว่า

$$\frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1 + b_1^n + b_2^n + \cdots + b_{n-1}^n} \leq \frac{1}{1 + b_1b_2 \cdots b_{n-1}(b_1 + \cdots + b_{n-1})} = \frac{b_n}{b_1 + \cdots + b_n}$$

ด้วยเหตุผลทำนองเดียวกัน สรุปได้ว่า

$$\frac{1}{1+x_1} + \ldots + \frac{1}{1+x_1} \leq \frac{b_1}{b_1 + \cdots + b_n} + \cdots + \frac{b_n}{b_1 + \cdots + b_n} = 1$$

ตัวอย่าง 2.27 ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่ประกอบกันเป็นลำดับเลขคณิต เรียงจากน้อยไปมาก

จงพิสูจน์ว่า $(a_1a_n)^{1/2} \leq (a_1a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_n)$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM $(a_1a_2 \ldots a_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$

เนื่องจาก $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ประกอบกันเป็นลำดับเลขคณิต เรียงจากน้อยไปมาก ดังนั้น ค่าทางขวามือของอสมการล่าสุดนี้ คือ $\frac{1}{2}(a_1 + a_n)$ ซึ่งคืออสมการขวามือที่ต้องการ จึงเหลือเพียงการพิสูจน์อสมการทางซ้ายมือ

พิจารณา $(a_1a_2 \ldots a_n)^2 = (a_1a_n)(a_2a_{n-1}) \ldots (a_na_1)$

เนื่องจาก $a_k = a_1 + (k-1)d$, $a_{n-k+1} = a_n - (k-1)d$ (เมื่อ d คือค่าผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต)

ดังนั้น $a_k a_{n-k+1} = a_1 a_n + d(k-1)[\, a_n - a_1) - (k-1)d\,] = a_1 a_n + d(k-1)(a_n - a_k) \geq a_1 a_n$
จึงได้ว่า $(a_1 a_2 \ldots a_n)^2 \geq (a_1 a_2)^n$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.28 (IMO 1969) จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ ที่มีสมบัติว่า $x_1 > 0, x_2 > 0, x_1y_1 - z_1^2 > 0, x_2y_2 - z_2^2 > 0$ อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}$$

และหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอในการที่อสมการนี้ จะเป็นสมการ

วิธีทำ เพื่อความสะดวก กำหนดสัญลักษณ์

$$D_1 = x_1y_1 - z_1^2, \quad D_2 = x_2y_2 - z_2^2, \quad D = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 \qquad (2.28.1)$$

สังเกตว่า จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ $D_i > 0, x_i > 0$ ได้ว่า $y_i > 0 \quad (i = 1,2)$

นอกจากนี้ (2.28.1) ให้ด้วยว่า $x_i = (D_i + z_i^2)/y_i$ และอสมการที่ต้องการพิสูจน์ สมมูลกับ $\dfrac{1}{D_1} + \dfrac{1}{D_2} \geq \dfrac{8}{D}$

พิจารณา

$$D = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2 = x_1y_1 - z_1^2 + x_2y_2 - z_2^2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2$$

$$= D_1 + D_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - 2z_1z_2 = D_1 + D_2 + (D_1 + z_1^2)\frac{y_2}{y_1} + (D_2 + z_2^2)\frac{y_1}{y_2} - 2z_1z_2$$

$$= D_1 + D_2 + D_1\frac{y_2}{y_1} + D_2\frac{y_1}{y_2} + \left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}\right)^2 y_1y_2 > 0$$

ดังนั้นอสมการที่ต้องการพิสูจน์สมมูลกับ

$$(D_1 + D_2)D \geq 8D_1D_2 \qquad (2.28.2)$$

เมื่อแทนค่า D จากที่เพิ่งพบ ได้ว่า (2.28.2) สมมูลกับ

$$(D_1 + D_2)^2 + (D_1 + D_2)\left(\frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2}\right) + (D_1 + D_2)\left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}\right)^2 y_1y_2 \geq 8D_1D_2$$

เมื่อหัก $4D_1D_2$ ออกทั้งสองข้าง ได้ว่า อสมการที่ต้องการ สมมูลกับ

$$(D_1 - D_2)^2 + (D_1 + D_2)\left(\frac{D_1y_2}{y_1} + \frac{D_2y_1}{y_2}\right) + (D_1 + D_2)\left(\frac{z_1}{y_1} - \frac{z_2}{y_2}\right)^2 \geq 4D_1D_2 \qquad (2.28.3)$$

อสมการ (2.28.3) เป็นจริง เพราะพจน์แรก และพจน์ที่สาม ≥ 0 และโดยอสมการ AM-GM

$$D_1 + D_2 \geq 2(D_1D_2)^{1/2}, \quad D_1\frac{y_2}{y_1} + D_2\frac{y_1}{y_2} \geq 2\left(D_1D_2\frac{y_1y_2}{y_1y_2}\right)^{1/2} = 2(D_1D_2)^{1/2} \qquad (2.28.4)$$

ดังนั้น พจน์กลางใน (2.28.3) มีค่า $\geq 4D_1D_2$ โดยที่ (2.28.3) เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $D_1 = D_2$, $D_1\dfrac{y_2}{y_1} = D_2\dfrac{y_1}{y_2}$, $\dfrac{z_1}{y_1} = \dfrac{z_2}{y_2}$ สองสมการแรกชี้ว่า $y_1 = y_2$ สมการที่สามให้ $z_1 = z_2$ ซึ่งให้ว่า $x_1 = x_2$

เพราะฉะนั้น สมการเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2$

ตัวอย่าง 2.29 จงหาค่าสูงสุดของ $x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + \ldots + x_n^2x_1$ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ และ $x_i \in \mathbb{R}_0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $n \geq 3$

วิธีทำ สมมุติว่า $n > 3$ เลือก j ที่มีสมบัติว่า $x_{j+1} \geq x_j$ (โดยมีข้อตกลงว่า $x_{n+1} = x_1$)
พิจารณาลำดับ $(\ldots, x_{j-2}, x_{j-1} + x_j, x_{j+1}, \ldots)$ ซึ่งมีทั้งสิ้น $n - 1$ พจน์
และลำดับนี้ให้ค่าแก่นิพจน์ในโจทย์ไม่น้อยกว่าลำดับเดิมที่มี n พจน์ ทั้งนี้เพราะ

$$x_{j-2}^2(x_{j-1} + x_j) + (x_{j-1} + x_j)^2x_{j+1} \geq x_{j-2}^2x_{j-1} + (x_{j-2}^2 + x_j^2)x_{j+1} \geq x_{j-2}^2x_{j-1} + x_{j-2}^2x_j + x_j^2x_{j+1}$$

ดังนั้น จึงเพียงพอที่จะพิจารณากรณี $n = 3$ ในกรณีนี้ โดยไม่เสียนัยทั่วไป (ทำการเรียงสับเปลี่ยน ถ้าจำเป็น) เราสามารถสมมุติได้ว่า $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ดังนั้น $(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \leq 0 \leq x_1x_2$ ซึ่งให้ว่า

$$x_1^2x_2 + (x_2 - x_1)(x_2 - x_3)x_3 \leq x_1^2x_2 + x_1x_2x_3$$

เมื่อจัดรูปเสียใหม่ ได้ว่า

$$x_1^2x_2 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 \leq (x_1 + x_3)^2x_2 = (1 - x_2)^2x_2$$

$$\leq 4\left(\frac{\frac{1}{2}(1 - x_2) + \frac{1}{2}(1 - x_2) + x_2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27} \qquad \text{(โดยอสมการ AM-GM)}$$

สรุปได้ว่า ค่าสูงสุดคือ $\frac{4}{27}$ ตัวอย่างของการเกิดเช่น $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \ldots, 0)$

ตัวอย่าง 2.30 (AMOC 1993) ให้ $n \in \mathbb{N}$; $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ และ $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s - a_i} \geq \frac{n}{n-1} \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{s - a_i}{a_i} \geq n(n-1)$$

วิธีทำ จากอสมการ AM-HM ได้ $\frac{1}{n}\sum a_i \geq \frac{n}{\sum a_i}$ ซึ่งจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$\sum \frac{s}{a_i} \geq n^2 \qquad (2.30.1)$$

เราจะพิสูจน์อสมการที่สองของโจทย์ก่อน โดยใช้ (2.30.1) ได้

$$\sum \frac{s - a_i}{a_i} = \sum \frac{s}{a_i} - n \geq n^2 - n = n(n-1) \quad \text{ตามต้องการ}$$

ต่อไป สังเกตว่า

$$\sum \frac{a_i}{s - a_i} = \sum\left(\frac{s}{s - a_i} - 1\right) = s\sum \frac{1}{s - a_i} - n \qquad (2.30.2)$$

เมื่อใช้อสมการ AM-HM กับลำดับ $\{s - a_i\}$ ได้

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{s-a_i}} \le \sum \frac{s-a_i}{n} = s - \frac{s}{n} = \frac{s(n-1)}{n}$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น $\sum \frac{1}{s-a_i} \ge \frac{n^2}{s(n-1)}$ เมื่อประยุกต์กับ (2.30.2) ได้

$$\sum \frac{a_i}{s-a_i} \ge \frac{sn^2}{s(n-1)} - n = \frac{n}{n-1}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.31 ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $x^6 + y^6 + z^6 \ge x^2y^4 + y^2z^4 + z^2x^4$

วิธีทำ เมื่อใช้อสมการ AM-GM สามครั้ง พบว่า

$$x^6 + y^6 + y^6 \ge 3(x^6y^6y^6)^{1/3} = 3x^2y^4$$
$$y^6 + z^6 + z^6 \ge 3(y^6z^6z^6)^{1/3} = 3y^2z^4$$
$$z^6 + x^6 + x^6 \ge 3(z^6x^6x^6)^{1/3} = 3z^2x^4$$

เมื่อบวกอสมการทั้งสาม จะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.32 ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $9(a^3 + b^3 + c^3) \ge (a + b + c)^3$

วิธีทำ จาก $4(a^3 + b^3) \ge (a + b)^3$ (ซึ่งพิสูจน์ได้โดยการกระจายโดยตรง)

ในทำนองเดียวกันได้ $4(b^3 + c^3) \ge (b + c)^3$, $4(c^3 + a^3) \ge (c + a)^3$ เมื่อบวกอสมการทั้งสามเข้าด้วยกันได้

$$8(a^3 + b^3 + c^3) \ge a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 + c^3 + 3c^2a + 3ca^2 + a^3$$

ซึ่งให้

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \ge a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2$$

ดังนั้น

$$9(a^3 + b^3 + c^3) \ge 3(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)$$

สังเกตว่า

$3(a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)$

$\ge (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 3c^2a + 3ca^2 + 6abc$

$\Leftrightarrow 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \ge 6abc$

$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \ge 3abc$ ซึ่งเป็นจริงโดยอสมการ AM-GM

ตัวอย่าง 2.33 (IMO 1995) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับ $abc = 1$

จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{3}{2}$

วิธีทำ ให้ $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ 1/c ดังนั้น $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ และ $xyz = \frac{1}{abc} = 1$

นอกจากนี้

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^3}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} + \frac{y^3}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}} + \frac{z^3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$$

$$= \frac{x^3yz}{y+z} + \frac{y^3xz}{x+z} + \frac{z^3xy}{x+y}$$

$$= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \qquad \text{(ใช้ } xyz = 1\text{)}$$

ดังนั้น จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}$

เพื่อการนี้ สังเกตว่า เมื่อ $s, t \in \mathbb{R}^+$ แล้ว

$$t\frac{t^2}{s} \geq \frac{1}{s}\left\{t^2 - \left(t - \frac{s}{2}\right)^2\right\} = \frac{1}{s}\left(ts - \frac{s^2}{4}\right) = t - \frac{s}{4}$$

ดังนั้น

$\frac{t^2}{s} \geq t - \frac{s}{4}$ ซึ่งให้ว่า $\frac{x^2}{y+z} \geq x - \frac{y+z}{4}$, $\frac{z^2}{x+y} \geq y - \frac{x+z}{4}$, $\frac{z^2}{x+y} \geq z - \frac{x+y}{4}$

เมื่อใช้อสมการข้างต้น ร่วมกับอสมการ AM-GM ได้

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \geq x - \frac{y+z}{4} + y - \frac{x+z}{4} + z - \frac{x+y}{4} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

$$\geq \frac{3}{2}(xyz)^{1/3} = \frac{3}{2} \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 2.34 (APMO 1998) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM ได้ $\frac{1}{3}(a+b+c) \geq (abc)^{1/3}$ กล่าวคือ $\frac{1}{(abc)^{1/3}} \geq \frac{3}{(a+b+c)}$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq \frac{1}{(abc)^{1/3}}$ กล่าวคือ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{(abc)^{1/3}}$

เมื่อบวกเข้าด้วยกันได้ $\frac{1}{(abc)^{1/3}} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{3}{(a+b+c)} + \frac{3}{(abc)^{1/3}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{(a+b+c)} \geq \frac{2}{(abc)^{1/3}}2$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a+b+c}\right\} \geq \frac{2(a+b+c)}{(abc)^{1/3}}$$

$$\Leftrightarrow 3+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-3 \geq \frac{2(a+b+c)}{(abc)^{1/3}}$$

$$\Leftrightarrow 1+(\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c})+\frac{abc}{abc} \geq 2\left\{1+\frac{a+b+c}{(abc)^{1/3}}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a}) \geq 2\left\{1+\frac{a+b+c}{(abc)^{1/3}}\right\}$$

ตัวอย่าง 2.35 (APMO 1989) ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ และให้ $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ จงพิสูจน์ว่า

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq 1+S+\frac{S^2}{2!}+\frac{S^3}{3!}+\cdots+\frac{S^n}{n!}$$

วิธีทำ โดยอสมการ AM-GM ได้ว่า

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \leq \left(\frac{n+x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n = \left(1+\frac{S}{n}\right)^n$$

$$= 1+n(S/n)+\{n(n-1)/2\}(S/n)^2+\ldots+(S/n)^n$$

ในนิพจน์ทางขวามือสังเกตว่า สัมประสิทธิ์ของ S^m คือ $\dfrac{n!}{m!(n-m)!n^m}$

เนื่องจาก $(n-m)!n^m \geq n!$ ดังนั้น $\dfrac{n!}{m!(n-m)!n^m} \leq \dfrac{n!}{m!n!} = \dfrac{1}{m!}$ ซึ่งให้อสมการที่ต้องการทันที

ตัวอย่าง 2.36 (APMO 2002) ให้ x, y, z เป็นจำนวนบวกที่มีสมบัติว่า $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ จงแสดงว่า

$$\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{z+xy} \geq \sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร $a=\dfrac{1}{x}$, $b=\dfrac{1}{y}$, $c=\dfrac{1}{z}$ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ กลายเป็น

$$\sqrt{ab+c}+\sqrt{bc+a}+\sqrt{ca+b} \geq 1+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

โดยที่ $a+b+c=1$ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่า $\sqrt{ab+c} \geq c+\sqrt{ab}$

ทั้งนี้เพราะมีอีกสองอสมการที่เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของอสมการนี้ ซึ่งเมื่อบวกเข้าด้วยกัน และใช้เงื่อนไข a+b+c = 1 จะได้อสมการที่โจทย์ต้องการ ในการพิสูจน์อสมการที่เพียงพอจะแสดง สังเกตว่า

$$\sqrt{ab+c} \geq c+\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab+c \geq c^2+ab+2c\sqrt{ab} \Leftrightarrow 1-c \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

(ใช้ $a+b+c=1$)

อสมการสุดท้ายนี้เป็นจริง โดยผลของอสมการ AM-GM

ตัวอย่าง 2.37 (IMO 1984) จงพิสูจน์ว่า $0 \le xy + yz + zx - 2xyz \le \frac{7}{27}$ เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบ ที่มีสมบัติว่า $x + y + z = 1$

วิธีทำ สังเกตว่า $xy + yz + zx - 2xyz = xy(1 - z) + yz(1 - x) + zx \ge 0$ ซึ่งแสดงว่าอสมการทางซ้ายมือเป็นจริง สำหรับอสมการทางขวามือ สังเกตก่อนว่าอย่างน้อยหนึ่งจำนวน

สมมุติว่าเป็น z จะต้องมีค่าไม่มากกว่า $\frac{1}{2}$ โดยอสมการ AM-GM ได้

$$xy \le \frac{1}{4}(x + y)^2 = \frac{1}{4}(1 - z)^2$$

เมื่อใช้ร่วมกับข้อมูลก่อนหน้า ได้

$$xy + yz + zx - 2xyz = z(x + y) + xy(1 - 2z) \le \frac{1}{4}z(1 - z) + (1 - 2z)(1 - z)^2 = \frac{1}{4}(1 - z)(2z^2 + z + 1)$$

อสมการที่ต้องการมีผลตามมาจากความสมมูลต่อไปนี้

$$(1 - z)(2z^2 + z + 1) \le 1 + \frac{1}{27} \iff 2z^3 - z^2 + \frac{1}{27} \ge 0 \iff \left(z - \frac{1}{3}\right)^2\left(2z + \frac{1}{3}\right) \ge 0$$

ตัวอย่าง 2.38 (Putnam 1975) จงแสดงว่า ถ้า $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ แล้ว

(a) $n(n + 1)^{1/n} < n + s_n$ และ

(b) $(n - 1)n^{-1/(n-1)} < n - s_n$ เมื่อ $n > 2$

วิธีทำ (a)
$$\frac{n + s_n}{n} = \frac{(1+1) + \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n}$$
$$> \sqrt[n]{(1+1)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \quad \text{(โดยอสมการ AM-GM)}$$
$$= \sqrt[n]{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}} = (n + 1)^{1/n}$$

(b)
$$\frac{n - s_n}{n - 1} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n - 1}$$
$$> \sqrt[n-1]{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)} \quad \text{(โดยอสมการ AM-GM)}$$
$$= \sqrt[n-1]{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-1}{n}} = n^{-1/(n-1)}$$

ตัวอย่าง 2.39 ให้ $n \geq 2$, $T \geq 2$ เป็นจำนวนเต็มที่กำหนดให้ จงหาจำนวนเต็มบวก a ที่ทำให้อสมการต่อไปนี้

เป็นจริง $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{ka + \frac{a^2}{4}}{s_k} < T^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$ เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนนับ และ $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$

วิธีทำ สังเกตว่า $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{ka + \frac{a^2}{4}}{s_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s_k}\left(\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - k^2\right)$

$$= \frac{1}{s_1}\left(1 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{n^2}{s_n} + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{s_k}\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{s_{k-1}}\right) \qquad (2.39.1)$$

ให้ $t_k = \dfrac{s_{k-1}}{a_k}$ $(k = 2, \ldots, n)$ ดังนั้น

$$\frac{1}{s_k}\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{s_{k-1}} = \frac{1}{(s_{k-1} + a_k)}\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{s_{k-1}} = \frac{1}{a_k(t_k + 1)}\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{a_k t_k}$$

$$= \frac{1}{a_k t_k (t_k + 1)}\left(t_k\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - (t_k + 1)(k-1)^2\right)$$

สังเกตว่า

$$\frac{1}{a_k t_k (t_k + 1)}\left(t_k\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - (t_k + 1)(k-1)^2\right) \leq \frac{(a+2)^2}{4a_k} \qquad (2.39.2)$$

$\Leftrightarrow (2k + a)^2 t_k - 4(t_k + 1)(k-1)^2 \leq (a+2)^2 t_k(t_k + 1)$

$\Leftrightarrow (4k^2 + 4ak + a^2)t_k - 4t_k(k^2 - 2k + 1) - 4(k-1)^2 \leq (a+2)^2 t_k^2 + (a^2 + 4a + 4)t_k$

$\Leftrightarrow (a+2)^2 t_k^2 + t_k(4a + 8 - 4ka - 8k) + 4(k-1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a+2)^2 t_k^2 - 4(a+2)(k-1) + 4(k-1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow [\,(a+2)t_k - 2(k-1)\,]^2 \geq 0$

ซึ่งเป็นจริงเสมอ ดังนั้น

$$\frac{1}{s_k}\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{s_{k-1}} \leq \frac{(a+2)^2}{4a_k}$$

เมื่อบวกอสมการเหล่านี้ ตั้งแต่ $k = 2, \ldots, n$ เราได้

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{s_k}\left(k + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{s_{k-1}}\right) \leq \frac{(a+2)^2}{4}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_k}$$

ซึ่งจาก (4.39.1) ให้ว่า $\sum_{k=1}^{n}\frac{ka+\frac{a^2}{4}}{s_k} \le \frac{(a+2)^2}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{s_n}$ ด้วยเหตุนี้ ถ้าจำนวนนับ a สอดคล้องกับ $a \le 2(T-1)$ กล่าวคือ $\frac{(a+2)^2}{4} \le T^2$ แล้วอสมการ

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ka+\frac{a^2}{4}}{s_k} \le T^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{s_n} < T^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$

เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนนับ $a_1, a_2, \dots, a_n$

ในทำนองกลับกัน เราจะแสดงว่า ถ้า $a > 2(T-1)$ กล่าวคือ $a \ge 2T-1$ แล้ว จะมีจำนวนนับ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ที่ทำให้อสมการดังกล่าวข้างต้นเป็นเท็จ

เริ่มด้วยการเลือก a_1 เป็นจำนวนนับใด ๆ จากนี้ให้ $a_k = \frac{(a+2)s_{k-1}}{2(k-1)}$ $(k = 2,\dots, n)$ แสดงว่า $a_2, \dots, a_n$ กำหนดได้แน่นอนหนึ่งเดียว

เมื่อ $k = 2, \dots, n$ เราได้ว่า

$$t_k = \frac{2(k-1)}{a+2},\quad t_k\left(k+\frac{a}{2}\right)^2 - (t_k+1)(k-1)^2 = \frac{1}{4}(a+2)^2 t_k(t_k+1)$$

และ

$$\frac{1}{s_k}\left(k+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{(k-1)^2}{s_{k-1}} = \frac{(a+2)^2}{4a_k}$$

ดังนั้นจาก (2.39.1)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka+\frac{a^2}{4}}{s_k} &= \frac{1}{4}(a+2)^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{s_n}\\ &= \left(\frac{1}{4}(a+2)^2 - 1\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} + \left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} - \frac{n^2}{s_n}\right\} \qquad (2.39.3)\end{aligned}$$

โดยอสมการ AM-HM $s_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \ge n^2$ ดังนั้น (2.39.3) ชี้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ka+\frac{a^2}{4}}{s_k} \ge \left(\frac{1}{4}(a+2)^2 - 1\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \qquad (2.39.4)$$

เนื่องจาก $a \ge 2T-1$ เรามีว่า $\frac{1}{4}(a+2)^2 - 1 \ge \frac{1}{4}(2T+1)^2 - 1 > T^2$ เพราะฉะนั้น (2.39.4) ให้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{ka+\frac{a^2}{4}}{s_k} > T^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$$ ตามต้องการ

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่เป็นคำตอบคือ $a = 2(T-1)$

ตัวอย่าง 2.40 จงหาค่าสูงสุดของ K ที่ทำให้ อสมการต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนบวก x, y, z

$$\frac{1}{(x+y+z)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\geq\frac{K}{\sqrt{(x+y+z)xyz}}$$

วิธีทำ เมื่อแทน x = y = z ในอสมการ พบว่า $K\leq\frac{28\sqrt{3}}{9}$ เราจะแสดงว่าค่าทางขวามือนี้คือค่าสูงสุดที่ K พึงมีได้ โดยอสมการ AM-GM ได้

$$\frac{1}{(x+y+z)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{9}{(x+y+z)^2}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)$$

$$\geq\frac{4}{9}\sqrt[3]{\frac{9}{x^2y^2z^2(x+y+z)^2}}+\frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}=\frac{4}{9}\sqrt{\frac{3}{xyz(x+y+z)}}+\frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}$$

นิพจน์ท้ายนี้จะมีค่า $\geq\frac{28\sqrt{3}}{9\sqrt{xyz(x+y+z)}}$ ก็ต่อเมื่อ $\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2z^2}}\geq\sqrt{\frac{3}{xyz(x+y+z)}}$

กล่าวคือ $\frac{1}{3}(x+y+z)\geq\sqrt[3]{xyz}$ ซึ่งเป็นจริงเสมอจากอสมการ AM-GM

ตัวอย่าง 2.41 จงหาค่าต่ำสุดของ k > 0 ที่ทำให้อสมการ

$$\frac{ab}{a+b+2c}+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leq k(a+b+c)$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริงบวก a, b, c

วิธีทำ เราจะแสดงว่าค่าต่ำสุดที่ต้องการของ k คือ $\frac{1}{4}$ ขั้นแรกสังเกตว่า เมื่อ x, y > 0 แล้ว โดยอสมการ AM-GM ได้

$$\frac{1}{x+y}=\frac{4xy}{x+y}\cdot\frac{1}{4xy}\leq\frac{(x+y)^2}{x+y}\cdot\frac{1}{4xy}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ x = y ดังนั้น

$$c+\frac{bc}{b+c+2a}+\frac{ca}{c+a+2b}\leq\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)+\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+a}\right)+\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(a+b+c)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ a + b = b + c = c + a กล่าวคือ ก็ต่อเมื่อ a = b = c

ตัวอย่าง 2.42 ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$$

ถามว่าอสมการนี้เป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ ให้ $S := \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} = \frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)} + \frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}$

เมื่อใช้อสมการ $(x+y)^2 \geq 4xy$ (ซึ่งเป็นจริงโดยอสมการ AM-GM) ได้ว่า

$$S \geq 4\left\{\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(a+b+c+d)^2} + \frac{b(a+b)+d(c+d)}{(a+b+c+d)^2}\right\} = 2\frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2} \geq 2$$

โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ตัวอย่าง 2.43 จงหาค่าต่ำสุดของ $x + y - xy$ และ $x + y + xy$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวก ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $(x + y - xy)(x + y + xy) = xy$

วิธีทำ เงื่อนไข $(x + y - xy)(x + y + xy) = xy$ สมมูลกับ $(x + y)^2 = xy(xy + 1)$

โดยอสมการ AM-GM $(x + y)^2 \geq 4xy$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}^+$ ได้ว่า $xy \geq 3$ ดังนั้น

$$x + y - xy = \{xy(xy + 1)\}^{1/2} - xy = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{xy}}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}+1} = 2\sqrt{3} - 3$$

โดยเป็นสมการเมื่อ $x = y = \sqrt{3}$

ในขณะที่ $x + y + xy \geq 2\sqrt{xy} + xy \geq 2\sqrt{3} + 3$ โดยเป็นสมการเมื่อ $x = y = \sqrt{3}$

ตัวอย่าง 2.44 (IMO 1982) พิจารณาลำดับอนันต์ $(x_n)_{n\geq 0}$ ของจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้: $x_0 = 1$ และ $x_{i+1} \leq x_i$ สำหรับทุก $i \geq 0$

a) จงพิสูจน์ว่า สำหรับลำดับประเภทดังกล่าวทุกลำดับ จะมี $n \geq 1$ ที่มีสมบัติว่า

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} \geq 3.999$$

b) จงหาลำดับที่มีสมบัติเช่นที่กล่าวข้างต้น โดยที่

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < 4 \quad \text{สำหรับทุก } n \geq 1$$

วิธีทำ โจทย์สามารถเขียนใหม่ได้เป็น กำหนดให้มีลำดับ X ของจำนวนจริงบวก $1 = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq \cdots$ พิจารณาอนุกรมอนันต์

$$S(X) = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} + \cdots \qquad (2.44.1)$$

สังเกตว่า $S(X)$ เป็นอนุกรมของพจน์ที่เป็นบวก ดังนั้นอนุกรมอนันต์นี้จะต้องมีค่าเป็นบวก $s(X)$ หรือ ∞

โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ว่า $s(X) \geq 4$ สำหรับทุกลำดับ X ประเภทดังกล่าว

เนื่องจากลำดับของผลบวกย่อยของ (2.44.1) มีค่าเพิ่ม ดังนั้น หากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง จะต้องได้ว่าบางผลบวกย่อยของอนุกรมนี้ที่มีค่า $> 4 - \frac{1}{10^3} = 3.999$

ให้ s เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ s(X) เมื่อแปร X ไปเหนือลำดับอนันต์ที่มีสมบัติดังบรรยายข้างต้น และอนุกรม S(X) ลู่เข้า กล่าวคือ

$$s = \inf\{s(X);\ X \text{ แปรไปเหนือลำดับอนันต์ที่มีสมบัติข้างต้น และ } S(X) \text{ ลู่เข้า}\}$$

เนื่องจาก $\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \geq \frac{x_0^2}{x_1} \geq x_{-0} = 1$

ดังนั้น $s(X) \geq 1$ สำหรับทุกลำดับ X ซึ่งชี้ว่า $\inf s(X)$ มีจริง และ $s \geq 1$ ต่อไปจะแสดงว่า $s \geq 4$

โดยสมบัติของการเป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด ได้ว่า สำหรับทุกจำนวนบวก ε จะมีลำดับ X ที่มีสมบัติว่า

$$s + \varepsilon > s(X) \qquad (2.44.2)$$

สำหรับลำดับ $X = (x_n)_{n\geq 0}$ พิจารณาลำดับ $Y = (y_n)_{n\geq 0}$ ที่สร้างโดยให้ $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_1}$ สังเกตว่า

$$1 = y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq \cdots$$

และ

$$s(X) = \frac{1}{x_1} + \left\{\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}} + \cdots\right\} = \frac{1}{x_1} + x_1\left\{\frac{y_0^2}{y_1} + \frac{y_1^2}{y_2} + \cdots + \frac{y_n^2}{y_{n+1}} + \cdots\right\} = \frac{1}{x_1} + x_1 s(Y)$$

เนื่องจาก $s(Y) \geq s$ จาก (2.44.2) ได้ $s + \varepsilon > \frac{1}{x_1} + x_1 s$ โดยอสมการ AM-GM ได้ $s + \varepsilon > 2\sqrt{s}$ เนื่องจาก ε เป็นค่าบวกใด ๆ จึงได้ว่า $s \geq 2\sqrt{s}$ กล่าวคือ $s^2 \geq 4s$ ซึ่งให้ $s \geq 4$ แสดงว่า a) เป็นจริง

การพิสูจน์ส่วน b) เพียงพอที่จะพิจารณา ตัวอย่างของลำดับ $x_n = \frac{1}{2^n}$ $(n = 0, 1, 2,\ldots)$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n^2}{x_{n+1}} = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = 4$$

ตัวอย่าง 2.45 (USAMO 1994) ให้ $a_0, a_1, a_2,\ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า

$$a_{i-1}a_{i+1} \leq a_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3,\ldots)$$

จงแสดงว่า สำหรับแต่ละจำนวนนับ $n > 1$ เรามีว่า

$$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} \geq \frac{a_0 + \cdots + a_{n-1}}{n} \cdot \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

วิธีทำ จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ได้ว่า $\frac{a_0}{a_1} \leq \frac{a_1}{a_2} \leq \cdots \leq \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \leq \frac{a_{n-1}}{a_n}$ ซึ่งให้ว่า

$$a_0a_n \leq a_1a_{n-1} \leq a_2a_{n-2} \leq \cdots \qquad (2.45.1)$$

ให้ $s = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ สมมูลกับ $n^2(s + a_0 + a_n)s \geq (n^2 - 1)(s + a_0)(s + a_n)$

เมื่อกระจาย และจัดรูปแล้ว พบว่าสมมูลกับ

$$(s + a_0)(s + a_n) \geq n^2 a_0 a_n \qquad (2.45.2)$$

การพิสูจน์ทำได้โดยใช้อสมการ AM-GM พร้อมกับ (2.45.1) ดังนี้

$$s = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a_k + a_{n-k}}{2}\right) \geq \sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{a_k a_{n-k}} \geq (n-1)\sqrt{a_0 a_n}$$

ดังนั้น

$$(s + a_0)(s + a_n) = s^2 + (a_0 + a_n)s + a_0 a_n \geq s^2 + 2s\sqrt{a_0 a_n} + a_0 a_n = (s + \sqrt{a_0 a_n})^2 \geq n^2 a_0 a_n$$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}_0$ จงพิสูจน์ว่า $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$

2. ให้ $a_i > 0$ $(i = 1,\ldots, n)$ สอดคล้องกับ $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geq 2^n$$

3. ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0$ จงแสดงว่า $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$

4. (APMC 1963) ให้ $a, b, x, y \in \mathbb{R}_0$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $a^5 + b^5 \leq 1$, $x^5 + y^5 \leq 1$
จงแสดงว่า $a^2x^3 + b^2y^3 \leq 1$

5. (APMC 1971) ให้ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ และ $a, x_1,\ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a^{x_1 - x_2}}{x_1 + x_2} + \frac{a^{x_2 - x_3}}{x_2 + x_3} + \cdots + \frac{a^{x_n - x_1}}{x_n + x_1} \geq \frac{n^2}{2(x_1 + \cdots + x_n)}$$

และหาเงื่อนไขในการที่จะได้สมการ

6. ให้ $a_1,\ldots, a_n, b_1,\ldots, b_n, c_1,\ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i\right)^3 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} c_i^3\right)$$

7. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$2\sqrt{ab + bc + ca} \leq \sqrt{3}\sqrt[3]{(a + b)(b + c)(c + a)}$$

8. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a + b + c}{3} \geq \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{3}}\sqrt[3]{abc}$$

9. ถ้า a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก แล้วจงแสดงว่า หนึ่งในสามอสมการต่อไปนี้ไม่เป็นจริง

$$a + b < c + d, \quad (a + b)(c + d) < ab + cd, \quad (a + b)cd < ab(c + d)$$

10. (Putnam 1998) จงหาค่าต่ำสุดของ $\dfrac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^6-\left(x+\frac{1}{x^6}\right)-2}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)}$ เมื่อ $x \in \mathbb{R}^+$

11. (Bulgarian MC 1997) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ มีสมบัติว่า $abc = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$$

12. (Austrian MO 2002) จงหาค่าสูงสุดของจำนวนจริง C ที่ทำให้อสมการ

$$\frac{\{(x+y)^2-6\}\{(x-y)^2+8\}}{(x-y)^2} \ge C$$

เป็นจริง สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$ ที่มีสมบัติว่า $xy = 2, x \neq y$ และหาด้วยว่า คู่อันดับ (x, y) ที่ทำให้อสมการข้างต้นเป็นสมการ สำหรับค่า C ดังกล่าว

13. (Belarusian 2002) จงหาค่าต่ำสุดของ $S = a_1a_2a_3 + b_1b_2b_3 + c_1c_2c_3$ เมื่อ $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของจำนวนเต็ม 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

14. ให้ $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ นิยาม $A = \dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$, $G = (a_1\cdots a_n)^{1/n}$, $H = \dfrac{n}{a_1^{-1}+\cdots+a_n^{-1}}$

(i) ถ้า n เป็นคู่ แล้ว จงแสดงว่า $\dfrac{A}{H} \le -1 + 2\left(\dfrac{A}{G}\right)^n$

(ii) ถ้า n เป็นคี่ แล้ว จงแสดงว่า $\dfrac{A}{H} \le -\dfrac{n-2}{n} + \dfrac{2(n-1)}{n}\left(\dfrac{A}{G}\right)^n$

15. ให้ $x_1,\ldots, x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับ $x_1 + \cdots + x_n = x_{n+1}$

จงพิสูจน์ว่า $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i(x_{n+1}-x_i)} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_{n+1}(x_{n+1}-x_i)}$

2.2 อสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก

ให้ $a_1,\ldots, a_m \in \mathbb{R}_0$, $m \in \mathbb{N}$ และให้ $q_1,\ldots, q_m \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $q_1 + \cdots + q_m = 1$

อสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก กล่าวว่า

$$a_1^{q_1}\cdots a_m^{q_m} \leq q_1a_1 + \cdots + q_ma_m$$

โดยได้เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = \cdots = a_m$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยบน m

กรณี m = 1 เห็นชัดเจนว่าเป็นจริง

ต่อไปพิจารณา กรณี m = 2 เพื่อความสะดวก ให้ $a_1 = a$, $a_2 = b$, $q_1 = q \in (0, 1)$, $q_2 = 1- q \in (0, 1)$

ถ้า a หรือ b เป็น 0 แล้วอสมการเป็นจริงอย่างชัดเจน ดังนั้น สมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า $0 < a \leq b$ และอสมการที่ต้องการพิสูจน์คือ

$$a^q b^{1-q} \leq qa + (1 - q)b \qquad (2.3)$$

ซึ่งสมมูลกับ

$$b^{1-q} - a^{1-q} \leq (1 - q)(b - a)a^{-q} \qquad (2.4)$$

โดยทฤษฎีบทว่าด้วยค่ามัชฌิม (S.K. Berberian , A First Course in Real Analysis , ทฤษฎีบท 8.5.2 หน้า 130) เมื่อใช้กับฟังก์ชัน $f(x) = x^{1-q}$ ได้ว่ามีจำนวนจริง $r \in (a, b)$ ที่ทำให้

$$b^{1-q} - a^{1-q} = (1 - q)(b - a)\, r^{-q}$$

เนื่องจาก $r^{-q} < a^{-q}$ ดังนั้น (2.4) (และ (2.3)) เป็นจริง โดยได้เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $b = a$

สมมุติว่า อสมการที่ต้องการเป็นจริง สำหรับ 1, 2, ... , m – 1 (m > 2) เราจะพิสูจน์ว่าเป็นจริง ณ m

ให้ $q_1 + q_2 + \cdots + q_{m-1} = q$ ดังนั้น $q + q_m = 1$

ให้ $q_1' = \frac{q_1}{q}$, ... , $q_{m-1}' = \frac{q_{m-1}}{q}$ ซึ่งให้ว่า

$$q_1' + q_2' + \cdots + q_{m-1}' = 1$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการที่ต้องการพิสูจน์ เมื่อจัดรูปและใช้สมมุติฐานของการอุปนัยสองครั้ง ได้

$$a_1^{q_1}\cdots a_{m-1}^{q_{m-1}} a_m^{q_m} = (a_1^{q_1'}\cdots a_{m-1}^{q_{m-1}'})^q a_m^{q_m} \leq q\left(a_1^{q_1'}\cdots a_{m-1}^{q_{m-1}'}\right) + q_ma_m$$

$$\leq q(q_1' a_1 + \cdots + q_{m-1}' a_{m-1}) + q_ma_m = q_1a_1 +\ldots+ q_{m-1}a_{m-1} + q_ma_m$$

โดยได้เป็นสมการ ในอสมการแรก ก็ต่อเมื่อ $a_1^{q_1'}\cdots a_{m-1}^{q_{m-1}'} = a_m$ และในอสมการหลัง ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2 = \cdots = a_{m-1}$ เมื่อรวมเงื่อนไขทั้งสองเข้าด้วยกัน พบว่า ได้สมการในอสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก ก็ต่อเมื่อ ทุก a_i (i = 1,..., m) มีค่าเท่ากัน เป็นการเสร็จสิ้นการพิสูจน์ □

อสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก มีประโยชน์ทางการประยุกต์ที่สำคัญในการพิสูจน์อสมการที่สำคัญสองอสมการคือ อสมการ Hölder และ อสมการ Minkowski

อสมการ Hölder ให้ $p, q \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $n \in \mathbb{N}$; $a_1,\ldots, a_n, b_1,\ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น

$$\sum_{m=1}^{n} a_m b_m \le \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{m=1}^{n} b_m^q\right)^{1/q}$$

โดยอสมการนี้เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

พิสูจน์ เนื่องจากทั้งสองข้างของอสมการเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี 1 (ดูความหมายในบทที่ 7) ทั้งใน a_m และ b_m 1 จึงสามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า (ซึ่งคือการหารตลอดด้วย $(a_1 +\cdots+ a_n)(b_1 +\cdots+ b_n)$ แล้วเปลี่ยนตัวแปร)

$$a_1 + \cdots + a_n = 1 \quad \text{และ} \quad b_1 + \cdots + b_n = 1 \qquad (2.5)$$

ให้ $P = \frac{1}{p}$, $Q = \frac{1}{q}$

ดังนั้น $P + Q = 1$ และ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ สามารถเขียนใหม่ให้ง่ายขึ้นได้เป็น

$$\sum a^P b^Q \le \left\{\sum a\right\}^P \left\{\sum b\right\}^Q$$

โดยอสมการ (2.3) ได้ว่า

$$\sum a^P b^Q \le \sum (Pa + Qb) = P + Q = 1 = \left\{\sum a\right\}^P \left\{\sum b\right\}^Q$$

โดยได้เป็นสมการ $\Leftrightarrow$ ทุก $a_m = b_m$ $(m = 1,\ldots, n)$

เมื่อพิจารณาร่วมกับ (2.5) พบว่า $\Leftrightarrow$ ทุก $\frac{a_m}{a_1+\cdots+a_n}=\frac{b_m}{b_1+\cdots+b_n}$ $(m = 1,\ldots, n) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ □

อสมการ Minkowski ให้ $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$; $n \in \mathbb{N}$; $a_1,\ldots, a_n, b_1,\ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ ดังนั้น

$$\left\{\sum_{m=1}^{n} (a_m + b_m)^p\right\}^{1/p} \le \left(\sum_{m=1}^{n} a_m^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{n} b_m^p\right)^{1/p}$$

โดยอสมการนี้เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

พิสูจน์ ให้ $S = \sum_{m=1}^{n} (a_m + b_m)^p := \sum (a + b)^p = \sum a(a + b)^{p-1} + \sum b(a + b)^{p-1}$

เมื่อใช้อสมการ Hölder กับแต่ละพจน์ทางขวามือ และให้ $q = \frac{p}{p-1}$ กล่าวคือ $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ได้

$$S \le \left\{\sum a^p\right\}^{1/p} \left\{\sum (a+b)^p\right\}^{1/q} + \left\{\sum b^p\right\}^{1/p} \left\{\sum (a+b)^p\right\}^{1/q} = \left(\left\{\sum a^p\right\}^{1/p} + \left\{\sum b^p\right\}^{1/p}\right) S^{1/q}$$

เมื่อหารตลอดด้วย $S^{1/q}$ จะได้อสมการที่ต้องการ

นอกจากนี้ จากเงื่อนไขของการเท่ากันของอสมการ Hölder เราพบด้วยว่า อสมการ Minkowski เป็นสมการ

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_1+b_1} = \cdots = \frac{a_1}{a_n+b_n} \quad \text{และ} \quad \frac{b_1}{a_1+b_1} = \cdots = \frac{b_n}{a_n+b_n} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$ □

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า $0 < x, y, z < 1$, $x + y + z = 2$ จงพิสูจน์ว่า

$$x^{1-x}y^{1-y}z^{1-z} + x^{1-y}y^{1-z}z^{1-x} + x^{1-z}y^{1-x}z^{1-y} \le 2$$

วิธีทำ สังเกตว่า $(1 - x) + (1 - y) + (1 - z) = 1$ โดยอสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก ได้

$$x^{1-x}y^{1-y}z^{1-z} \le x(1-x) + y(1-y) + z(1-z)$$
$$x^{1-y}y^{1-z}z^{1-x} \le x(1-y) + y(1-z) + z(1-x)$$
$$x^{1-z}y^{1-x}z^{1-y} \le x(1-z) + y(1-x) + z(1-y)$$

เมื่อบวกอสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน ได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.2.2 ถ้า $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^{3(a+b+c+d)} \ge a^{b+c+d}b^{a+c+d}c^{a+b+d}d^{a+b+c}$$

วิธีทำ พิจารณา $\frac{1}{4}(a + b + c + d) = \frac{(a+b+c+d)^2}{4(a+b+c+d)}$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{4(a+b+c+d)}$$

$$\ge \frac{\frac{1}{3}(2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd)+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd}{4(a+b+c+d)}$$ (โดยอสมการ AM-GM)

$$= \frac{2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{3(a+b+c+d)}$$

$$= \frac{a(b+c+d)+b(a+c+d)+c(a+b+d)+d(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}$$

เมื่อใช้อสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก กับนิพจน์สุดท้ายนี้ โดยใช้น้ำหนัก

$(b + c + d)/3(a+b+c+d)$, $(a + c + d)/3(a+b+c+d)$, $(a + b + d)/3(a+b+c+d)$, $(a + b + c)/3(a + b + c + d)$

จะได้ว่านิพจน์สุดท้ายนี้

$$\ge a^{(b+c+d)/3(a+b+c+d)}b^{(a+c+d)/3(a+b+c+d)}c^{(a+b+d)/3(a+b+c+d)}d^{(a+b+c)/3(a+b+c+d)}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.2.3 (Math. Magazine) ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนนับ

จงพิสูจน์ว่า $$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + x_k^{1/a_k}\right)^{a_k} \ge \left\{1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/\sum_{k=1}^{n} a_k}\right\}^{\sum_{k=1}^{n} a_k}$$

วิธีทำ เราพิสูจน์อสมการที่แข็งกว่าในโจทย์ดังนี้ ให้ b_k , y_k $(k = 1, 2,..., n)$ เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $b_1 + \cdots + b_n = 1$ เมื่อ s เป็นจำนวนเต็ม ≥ 0

นิยาม $f(s) := \prod_{k=1}^{n}(s + y_k)^{b_k}$ ดังนั้น โดยอสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก ได้

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k}{s + y_k} \geq \frac{1}{\prod_{k=1}^{n}(s + y_k)^{b_k}} = \frac{1}{f(s)}$$

ดังนั้น $f'(s) \geq 1$ ซึ่งให้ว่า $f(x) - f(0) \geq x$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \geq 0$ (ทฤษฎีบทว่าด้วยค่ามัชฌิม : S.K. Berberian, A First Course in Real Analysis , ทฤษฎีบท 8.5.2 หน้า 130)

เพราะฉะนั้น

$$\prod_{k=1}^{n}\left(x + y_k\right)^{b_k} \geq x + \prod_{k=1}^{n} y_k^{b_k}$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $y_1 = \cdots = y_n$

อสมการของโจทย์ตามมาจากการแทนค่า $x = 1$, $y_k = x_k^{1/a_k}$ และ $b_k = \frac{a_k}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$ โดยที่มีทุก $a_k > 0$ ใน กรณีที่ทุก $a_k < 0$ อสมการจะมีทิศทางกลับข้าง

แบบฝึกหัด

1. (British MO) ให้ $p, q, r \in \mathbb{R}_0$ มีสมบัติว่า $p + q + r = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$7(pq + qr + rp) \leq 2 + 9\,pqr$$

2. ให้ $I, J \in \mathbb{N}$ และ $a_{ij} \in \mathbb{R}^+$ $(1 \leq i \leq I , 1 \leq j \leq J)$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $q \geq p > 0$ แล้ว $\left(\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{I} a_{ij}^{p}\right)^{q/p}\right)^{1/q} \leq \left(\sum_{i=1}^{I}\left(\sum_{j=1}^{J} a_{ij}^{p}\right)^{p/q}\right)^{1/p}$

3. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงที่มีค่า ≥ 2 จงพิสูจน์ว่า

$$(y^3 + x)(z^3 + y)(x^3 + z) \geq 125xyz$$

4. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาค่าต่ำสุดของนิพจน์

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \cdots + \frac{x_n^n}{n}$$

เมื่อ $x_1,..., x_n$ แปรไปเหนือ $\mathbb{R}^+$ และสอดคล้องกับสมการ

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = n$$

5. (Math. Magazine 1996) ถ้า a, b, c, r $\in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$(abc)^{1/3} \leq \left(a^{a^r} b^{b^r} c^{c^r}\right)^{1/(a^r+b^r+c^r)}$$

6. (Belarus MO) ให้ a, b, c, x, y, z $\in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$

บทที่ 3

อสมการ Cauchy-Schwarz

อสมการ Cauchy-Schwarz กำหนดให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $a_i , b_i \in \mathbb{R}^+$ $(i = 1, \dots , n)$ ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2}$$

โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

พิสูจน์ พิจารณาพหุนามกำลังสองต่อไปนี้

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2$$

สังเกตว่า 1. $P(x) \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ

2. $P(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

นอกจากนี้

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 x^2 - 2a_i b_i x + b_i^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

เนื่องจาก $P(x) \geq 0$ ดังนั้นค่า discriminant ของ P ต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ ศูนย์ และจะเท่ากับศูนย์ก็ต่อเมื่อ $P(x) \equiv 0$ เพราะฉะนั้น

$$\left(-2 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) \leq 0$$

กล่าวอีกนัยหนึ่งคือ

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)^{1/2}$$

และจะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$ □

ข้อสังเกต ในอสมการนี้ **เงื่อนไข** $a_i > 0$, $b_i > 0$ **ไม่จำเป็น** เพราะว่าสำหรับทุกจำนวนจริง a_i , b_i โดยสิ่งที่พิสูจน์ข้างต้นได้

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|\,|b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}$$

ตัวอย่าง 3.1 ถ้า $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ โดยที่ $a\cos^2\theta + b\sin^2\theta < c$

แล้ว $\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta < \sqrt{c}$ จริงหรือไม่

พิสูจน์ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta &= (\sqrt{a}\cos\theta)\cos\theta + (\sqrt{b}\sin\theta)\sin\theta \\ &\le \left[\left(\sqrt{a}\cos\theta\right)^2 + \left(\sqrt{b}\sin\theta\right)^2\right]^{1/2}\left[\cos^2\theta + \sin^2\theta\right]^{1/2} \\ &= \left[a\cos^2\theta + b\sin^2\theta\right]^{1/2} < \sqrt{c}\end{aligned}$$

แสดงว่าคำตอบของโจทย์คือจริง นอกจากใช้อสมการ Cauchy-Schwarz เราสามารถพิสูจน์ตัวอย่างนี้โดยใช้อสมการ AM-GM ได้ด้วยเช่นกัน

$$\begin{aligned}\left[\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta\right]^2 &= a\cos^4\theta + 2\sqrt{a}\sqrt{b}\cos^2\theta\sin^2\theta + b\sin^4\theta \\ &\le a\cos^4\theta + (a+b)\cos^2\theta\sin^2\theta + b\sin^4\theta \\ &= (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta)(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= (a\cos^2\theta + b\sin^2\theta) < c\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{a}\cos^2\theta + \sqrt{b}\sin^2\theta < \sqrt{c}$

ตัวอย่าง 3.2 ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า $x + y + z = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ จงแสดงว่า x, y และ z ทั้งสามจำนวนมีค่าอยู่ในช่วง $\left[\frac{2}{3}, 2\right]$ และถามว่ามีทางเป็นไปได้หรือไม่ที่ x จะบรรลุค่าปลายขอบ $\frac{2}{3}$ หรือ 2

วิธีทำ จาก $y - z = 4 - x$, $y^2 + z^2 = 6 - x^2$ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz

$$y\cdot 1 + z\cdot 1 \le \sqrt{y^2 + z^2}\,\sqrt{1^2 + 1^2}$$

กล่าวคือ $y^2 + z^2 \ge \frac{1}{2}(y + z)^2$

ดังนั้น $6 - x^2 \ge \frac{1}{2}(4 - x)^2$ ซึ่งให้ว่า $0 \ge (3x - 2)(x - 2)$

กล่าวคือ $\frac{2}{3} \le x \le 2$ โดยความสมมาตรของโจทย์ y, z มีค่าอยู่ในช่วงดังกล่าวเช่นกัน

ถ้า $x = 2$ แล้ว $y + z = 2$, $y^2 + z^2 = 2$ ให้ว่า $y = z = 1$ ซึ่งเป็นไปได้

ในขณะที่ $x = \frac{2}{3}$ ให้ค่า $y + z = \frac{10}{3}$, $y^2 + z^2 = \frac{50}{9}$ ให้ว่า $y = z = \frac{5}{3}$ ซึ่งเป็นไปได้

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $x_1,\ldots, x_n \in \mathbb{R}_0$ $(n \geq 2)$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$S := \frac{x_1}{1+x_2+\cdots+x_n} + \frac{x_2}{1+x_1+x_3+\cdots+x_n} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1+\cdots+x_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}$$

วิธีทำ สังเกตว่า $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2-x_i}$ และ $\frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} - 1$ ดังนั้น

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2-x_i} = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2-x_i} - n \qquad \text{โดยอสมการ Cauchy-Schwarz}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2-x_i}\right)\{(2-x_1) + (2-x_2) + \ldots + (2-x_n)\} \geq n^2$$

ซึ่งให้ว่า $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2-x_i} \geq \frac{n^2}{2n-1}$ เพราะฉะนั้น $S \geq \frac{2n^2}{2n-1} - n = \frac{n}{2n-1}$

ตัวอย่าง 3.4 ให้ $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$, $a_1 + \cdots + a_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq \frac{(1+n^2)^2}{n}$$

วิธีทำ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz $\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \frac{1}{a_j}\right)^2\right]\left[\sum_{j=1}^{n} 1^2\right] \geq \left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \frac{1}{a_j}\right)\cdot 1\right]^2$

ดังนั้น $\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \frac{1}{a_j}\right)^2\right] \geq \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \frac{1}{a_j}\right)^2\right]$

โดยอสมการ AM-HM $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \cdots + a_n} = n^2$

ดังนั้น $\left[\sum_{j=1}^{n}\left(a_j + \frac{1}{a_j}\right)^2\right] \geq \frac{(1+n^2)^2}{n}$

ตัวอย่าง 3.5 ให้ $a \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $(1 + a + a^2 + a^3)^2 \leq 4(1 + a^2 + a^4 + a^6)$

วิธีทำ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz

$$(1\cdot 1 + 1\cdot a + 1\cdot a^2 + 1\cdot a^3)^2 \leq (1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(1^2 + a^2 + a^4 + a^6)$$

ซึ่งให้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 3.6 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า $n(1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n-2}) \geq (1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})^2$

วิธีทำ จากอสมการ Cauchy-Schwarz $(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2)$

แทนค่า $x_i = a^{i-1}$, $y_i = 1$ ได้ $(1 + a + \cdots + a^{n-1})^2 \leq (1 + a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n-2})(n)$ ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 3.7 (Putnam 1979) เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n$ พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน

$$z_k = x_k + iy_k \qquad (x_k, y_k \in \mathbb{R}), \ i = \sqrt{-1}$$

ให้ r เป็นค่าสัมบูรณ์ของภาคจริงของ $\pm\sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2}$

จงพิสูจน์ว่า $r \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

วิธีทำ ให้ $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ และ $a + bi$ เป็นรากที่สองของ $z_1^2 + \cdots + z_n^2$

ดังนั้น

$$ab = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = X \cdot Y \text{ และ } a^2 - b^2 = (x_1^2 + \cdots + x_2^2) - (y_1^2 + \cdots + y_n^2) = \|X\|^2 - \|Y\|^2$$

โดยอสมการ Cauchy-Schwarz ได้

$$|X \cdot Y| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

ดังนั้น $|a| \cdot |b| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$ ซึ่งแสดงว่า ถ้า $|a| > \|X\|$ แล้วจะได้ $|b| < \|Y\|$

แต่ $a^2 = \|X\|^2 - \|Y\|^2 + b^2$ ซึ่งให้ว่า $|a| \leq \|X\|$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $r = |a| \leq \|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 3.8 (Putnam 1977) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ $(n > 1)$ และ $A + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 < \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

จงพิสูจน์ว่า $A < 2a_ia_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$

วิธีทำ จากอสมการ Cauchy-Schwarz ได้ว่า

$$\{(a_1 + a_2) + a_3 + a_4 + \cdots + a_n\}^2 \leq \{1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2\}\{(a_1 + a_2)^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2\}$$

กล่าวคือ $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq (n-1)\left\{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + 2a_1a_2\right\}$ ซึ่งคือ $\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1a_2$

จากสมมุติฐานของโจทย์ ได้

$$A < -\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq -\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2a_1a_2 = 2a_1a_2$$

ในทำนองเดียวกัน $A < 2a_ia_j$ $(1 \leq i < j \leq n)$

ตัวอย่าง 3.9 (APMO 1990) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ และให้ S_k เป็นผลบวกที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผลคูณของ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ โดยเลือกออกมาครั้งละ k พจน์ (ซึ่งคือพหุนามสมมาตรเชิงธาตุมูลที่ k ในตัวแปร $a_1, a_2, \ldots, a_n$)

จงพิสูจน์ว่า $S_kS_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1a_2\cdots a_n \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$

วิธีทำ สังเกตว่า สัญลักษณ์ทวินามสามารถเขียนได้ในรูป

$$\binom{n}{k}\sqrt{a_1a_2\cdots a_n} = \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\sqrt{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}\sqrt{\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}}$$

$$\le \sqrt{\sum_{1\le i_1<i_2\cdots<i_k\le n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}}\sqrt{\sum_{1\le i_1<i_2\ldots<i_k\le n}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}} \text{ (โดยอสมการ Cauchy-Schwarz)}$$

$$= (S_kS_{n-k})^{1/2}$$

ดังนั้น $\binom{n}{k}^2 a_1a_2\cdots a_n \le S_kS_{n-k}$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 3.10 จงหาขอบเขตบนของอัตราส่วน $\dfrac{x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$ เมื่อตัวแปรทั้งสี่แปรไปเหนือทุก 4-อันดับของจำนวนจริง $(x_1, x_2, x_3, x_4) \neq (0, 0, 0, 0)$

วิธีทำ ให้ $F(x_1, x_2, x_3, x_4) := \dfrac{x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3x_4}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$, $u = \left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$, $v = \left(x_1^2 + x_4^2\right)^{1/2}$

ดังนั้น $u \ge 0, v \ge 0, u + v > 0$ ซึ่งให้ว่า

$$2x_2x_3 = u^2 - (x_2 - x_3)^2 \le u^2 \qquad (3.10.1)$$

โดยอสมการ Cauchy-Schwarz ได้ว่า

$$x_1x_2 + x_3x_4 \le \left(x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}\left(x_1^2 + x_4^2\right)^{1/2} = uv \qquad (3.10.2)$$

ดังนั้น

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \le \frac{u^2 + uv}{u^2 + v^2} := G(u, v) \qquad (3.10.3)$$

เมื่อ $u = 0$ ได้ $G(0, v) = 0$ เมื่อ $u > 0$ ได้

$$\frac{1}{G(u,v)} = \frac{v^2 - u^2 + 2u^2}{u(v+u)} = \frac{v-u}{u} + \frac{2u}{v+u} = -2 + \frac{v+u}{u} + \frac{2u}{v+u}$$

แทน $w = \dfrac{u+v}{u}$ พบว่า

$$2 + \frac{1}{G(u,v)} = w + \frac{2}{w} = 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{w} - \sqrt{\frac{2}{w}}\right)^2 \ge 2\sqrt{2} \qquad (3.10.4)$$

เมื่อพิจารณาร่วมกับ (3.10.3) ได้

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) \le G(u, v) \le \frac{1}{2\sqrt{2}-2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \qquad (3.10.5)$$

โดยเป็นสมการใน (3.10.5) ก็ต่อเมื่อ เป็นสมการใน (3.10.1), (3.10.2), (3.10.4)

การเป็นสมการใน (3.10.4) ให้ว่า $w = \sqrt{2}$ กล่าวคือ $v = (\sqrt{2} - 1)u$

ในขณะที่การเป็นสมการใน (3.10.1), (3.10.2) ให้ว่า $x_2 = x_3$, $x_1 = x_4$

เพราะฉะนั้น ค่า $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ซึ่งบรรลุ เมื่อ $x_2 = x_3 = 1$, $x_1 = x_4 = \sqrt{2} - 1$

ตัวอย่าง 3.11 (IMO 2003) ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง

โดยที่ $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$

(a) จงพิสูจน์ว่า $\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$

(b) จงแสดงว่าอสมการเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นลำดับเลขคณิต

วิธีทำ (a) เนื่องจากทั้งสองข้างของอสมการ ไม่แปรเปลี่ยน ภายใต้การเลื่อนทางขนานของทุก x_i (กล่าวคือ ทุก x_i เปลี่ยนไปเป็น $x_i + a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว) ดังนั้น เราสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ สังเกตว่า

$$\sum_{i,j=1}^{n}|x_i - x_j| = 2\sum_{i<j}(x_j - x_i) = 2\sum_{i=1}^{n}(2i - n - 1)x_i$$

โดยอสมการ Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le 4\left[\sum_{i=1}^{n}(2i-n-1)^2\right]\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right] = 4\frac{n(n+1)(n-1)}{3}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right]$$

ในทำนองกลับกัน

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}x_j + n\sum_{j=1}^{n}x_j^2 = 2n\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

ดังนั้น

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \le \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2$$

(b) ถ้าอสมการเป็นสมการ แล้ว $x_i = k(2i - n - 1)$ สำหรับบาง k ซึ่งหมายความว่า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ในทำนองกลับกัน สมมุติว่า $x_1, \ldots, x_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ที่มีผลต่างร่วมเป็น d แล้ว ได้ว่า

$$x_i = \frac{d}{2}(2i - n - 1) + \frac{1}{2}(x_1 + x_n)$$

เมื่อเลื่อนแต่ละ x_i ไปด้วยปริมาณ $-\frac{1}{2}(x_1 + x_n)$ จะได้ว่า $x_i = \frac{d}{2}(2i - n - 1)$ และ $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$ ซึ่งให้สมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 3.12 (IMO 1987) ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับสมการ

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$$

จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 2$ จะมีจำนวนเต็ม $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ไม่ทุกตัวเป็น 0 ที่มีสมบัติว่า

$$|a_i| \leq k - 1 \quad \text{สำหรับทุก } i \quad \text{และ} \quad |a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

วิธีทำ เราสามารถสมมุติได้ (ถ้าจำเป็นให้เรียงลำดับใหม่) ว่า บรรดา x_i ที่เป็นลบ (ถ้ามี) ให้ไปอยู่ที่ส่วนท้ายของลำดับ ดังนั้น จะมี m ที่ทำให้ $x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0$ และ $x_{m+1}, \ldots, x_n < 0$ (ถ้าทุก x_i เป็นลบ แล้ว $m = 0$ แต่ถ้าทุก x_i ไม่ติดลบ แล้ว $m = n$)

นิยาม $C = \{(c_1, c_2, \ldots, c_n) : c_i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}, i = 1, 2, \ldots, n\}$

พิจารณาค่าของผลบวก $S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ เมื่อแปร $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ ไปเหนือ C

ค่าน้อยสุดของ S เกิดเมื่อ $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (0, \ldots, 0, k-1, \ldots, k-1)$ (โดยมี 0 อยู่ m ตัวแรก และ $k-1$ อยู่ $n-m$ ตัวหลัง) และค่ามากสุดของ S เกิดเมื่อ $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (k-1, \ldots, k-1, 0, \ldots, 0)$ (โดยมี $k-1$ อยู่ m ตัวแรกและ 0 อยู่ $n-m$ ตัวหลัง)

ให้ค่าต่ำสุด และค่าสูงสุดนี้เป็น A, B ตามลำดับ ดังนั้น

$$B - A = (k-1)(x_1 + \cdots + x_m) - (k-1)(x_{m+1} + \cdots + x_n) = (k-1)(|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$$

จากสมมุติฐาน $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz ได้ว่า

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leq \sqrt{1^2 + \cdots + 1^2}\ \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\ \sqrt{n}$$

ดังนั้น $B - A \leq (k-1)\sqrt{n}$

สังเกตว่าค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ S อยู่ในช่วง [A, B] แบ่งกั้นช่วงนี้ออกเป็น $N = k^n - 1$ ช่วงย่อย ที่มีความยาวเท่ากัน แต่ละช่วงย่อยยาว $\frac{B-A}{n}$

เนื่องจากเซต C บรรจุ n-อันดับ อยู่ทั้งสิ้น k^n ชุด ดังนั้น จะมี n-อันดับ อยู่สองชุด เรียกว่า $(c_1', c_2', \ldots, c_n')$ และ $(c_1'', c_2'', \ldots, c_n'')$ ที่ให้ค่าผลบวก S ที่อยู่ในช่วงย่อยเดียวกัน ให้ค่าทั้งสองเป็น $S' = c_1'x_1 + \cdots + c_n'x_n$, $S'' = c_1''x_1 + \cdots + c_n''x_n$

ดังนั้น $|S' - S''| \leq \frac{B-A}{n}$ เลือก $a_i = c_i' - c_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ จะได้ลำดับของจำนวนเต็ม $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ ที่สอดคล้องกับอสมการ $|a_i| \leq k-1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ และ

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n| = |S' - S''| \leq \frac{B-A}{n} \leq \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n - 1}$$

ตัวอย่าง 3.13 (USAMO 1978) ให้ a, b, c, d, e เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า

$$a + b + c + d + e = 8, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16$$

จงหาค่าสูงสุดของ e

วิธีทำ โดยอสมการโคชี ได้ว่า

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 1 + d\cdot 1)^2 = (a + b + c + d)^2$$

เมื่อแทนค่าที่โจทย์ให้มา ได้ $4(16 - e^2) \geq (8 - e)^2$ กล่าวคือ $e(5e - 16) \leq 0$

ดังนั้น $\frac{16}{5} \geq e \geq 0$ ซึ่งให้ว่า ค่าสูงสุดของ e คือ $\frac{16}{5}$ ซึ่งบรรลุเมื่อ $a = b = c = d = \frac{6}{5}$

ตัวอย่าง 3.14 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$abc(a + b + c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

วิธีทำ ใช้อสมการ Cauchy-Schwarz กับลำดับ $\left\{\frac{a}{\sqrt{c}}, \frac{b}{\sqrt{a}}, \frac{c}{\sqrt{b}}\right\}, \left\{\sqrt{c}, \sqrt{a}, \sqrt{b}\right\}$ ได้

$$\left(\frac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{b}}\sqrt{b}\right)^2 \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c + a + b)$$

ดังนั้น $(a + b + c) \leq \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)$ เมื่อคูณตลอดด้วย abc จะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 3.15 จงหาค่าต่ำสุดของ $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ เมื่อ $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1,\ldots,n)$ และ $x_1 + \ldots + x_n = 1$

วิธีทำ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz

$$1 = 1\cdot x_1 + \cdots + 1\cdot x_n \leq (1^2 + \cdots + 1^2)^{1/2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} \leq n^{1/2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

ซึ่งชี้ว่า $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$ โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ ทุก $x_i = \frac{1}{n}$

ตัวอย่าง 3.16 จงหาค่าต่ำสุด และสูงสุดของ $f(x, y, z) = 3x + 4y + 12z$ ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

วิธีทำ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz ได้ว่า

$$|3x + 4y + 12z| \leq (3^2 + 4^2 + 12^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = 13$$

โดยได้เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ

$$(x, y, z) = t(3, 4, 12)$$

จาก $9t^2 + 16t^2 + 144t^2 = 1$ ได้ว่า $t = \pm\frac{1}{13}$

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดคือ 13 และค่าต่ำสุดคือ –13

ตัวอย่าง 3.17 ให้ x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $-\frac{1}{2} \le \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \le \frac{1}{2}$

วิธีทำ พิจารณาลำดับ $\left\{\frac{2x}{1+x^2}, \frac{1-x^2}{1+x^2}\right\}$ และลำดับ $\left\{\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right\}$ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz ได้

$$1 = 1^{1/2} = \left\{\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2\right\}^{1/2} \left\{\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{1+y^2}\right)^2\right\}^{1/2}$$

$$\ge \left|2\frac{x(1-y^2)+y(1-x^2)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right| = \left|2\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)}\right|$$

ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 3.18 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า a + b + c = 1 จงพิสูจน์ว่า

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le \sqrt{21}$$

วิธีทำ พิจารณาลำดับ {1, 1, 1} และลำดับ $\{\sqrt{4a+1}, \sqrt{4b+1}, \sqrt{4c+1}\}$ โดยอสมการ Cauchy-Schwarz ได้

$$(1\cdot\sqrt{4a+1} + 1\cdot\sqrt{4b+1} + 1\cdot\sqrt{4c+1})^2 \le (1^2+1^2+1^2)(4a+1+4b+1+4c+1) = 3\cdot 7 = 21$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 3.19 (USAMO 1994) ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นจำนวนจริง ที่มีสมบัติว่า $a_1 + \cdots + a_n \ge \sqrt{n}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2 > \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

วิธีทำ เราจะเริ่มด้วยการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้ก่อน

ทฤษฎีบทประกอบ ให้ $a_1,\ldots, a_n$ และ $b_1,\ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริงบวกที่มีสมบัติว่า

$$b_1 > b_2 > \cdots > b_n \tag{3.19.1}$$

และ

$$b_1 + \cdots + b_k \le a_1 + \cdots + a_k \qquad (k = 1, 2,\ldots, n) \tag{3.19.2}$$

ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{n} b_j^2 \le \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \tag{3.19.3}$$

พิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ ให้ $b_{n+1} = 0$ จาก (3.19.1), (3.19.2) ได้

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})\left[\sum_{j=1}^{k}b_j\right] \le \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})\left[\sum_{j=1}^{k}a_j\right]$$

$$\sum_{j=1}^{n}b_j \sum_{k=j}^{n}(b_k - b_{k+1}) \le \sum_{j=1}^{n}a_j \sum_{k=j}^{n}(b_k - b_{k+1})$$

สังเกตว่าผลบวกในตัวประกอบหลังของทั้งสองข้างตัดทอนกันลดรูปเป็น

$$\sum_{j=1}^{n}b_j^2 \le \sum_{j=1}^{n}a_jb_j$$

เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้าง และใช้อสมการ Cauchy-Schwarz ได้

$$\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n}a_jb_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right)$$

ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ เป็นการเสร็จสิ้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ □

กลับไปที่โจทย์แรกเริ่ม ให้ $b_j = \sqrt{j} - \sqrt{j-1} = \dfrac{1}{\sqrt{j}+\sqrt{j-1}}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ เห็นชัดว่า (3.19.1) จริง

จากโจทย์ แทนค่า $n = 1,2, \ldots$ ได้ว่า

$$\begin{aligned} a_1 &\ge \sqrt{1} &&= b_1 \\ a_1 + a_2 &\ge \sqrt{2} &&= b_1 + b_2 \\ &\vdots \\ a_1 + \cdots + a_n &\ge \sqrt{n} &&= b_1 + \cdots + b_n \end{aligned}$$

แสดงว่า (3.19.2) เป็นจริงเช่นกัน ดังนั้นโดยทฤษฎีบทประกอบให้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n}a_j^2 \ge \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(\sqrt{j}+\sqrt{j-1}\right)^2} > \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2\sqrt{j})^2} = \frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

$$\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\,\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2} \ge \sqrt{(a_1+b_1)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}$$

2. ให้ $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ $(n > 1)$ และ $A + \sum_{i=1}^{n}a_i^2 < \dfrac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2$ จงพิสูจน์ว่า $A < 2a_ia_j$ $(1 \le i < j \le n)$

3. ให้ $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{N}_0$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x_1^k + \cdots + x_n^k}{n} \le \frac{x_1^{k+1} + \ldots + x_n^{k+1}}{x_1 + \ldots + x_n}$$

4. ถ้า $2x + 4y = 1$ สำหรับบาง $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว จงแสดงว่า $x^2 + y^2 \ge \frac{1}{20}$

5. ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6}\right)^2 \le \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{6}$

6. ให้ $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2}{a_n} + \frac{a_n^2}{a_1} \ge a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

7. ให้ $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \ge n^2$

8. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \ge \frac{9}{3+a+b+c}$

9. ให้ $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $\sum_{k=1}^{n}(b_k + c_k)^2 \cdot \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k c_k} \ge 4n^2$

10. ให้ $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $(u_1 + \cdots + u_n)^2 \le n(u_1^2 + \cdots + u_n^2)$

11. ถ้ารากทั้งหมดของพหุนาม $f(x) = x^n - c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} - c_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^{n-1}c_{n-1}x + (-1)^n c_n$ เป็นจำนวนจริง แล้ว จงพิสูจน์ว่า $(n-1)c_1^2 \ge 2nc_2$

12. จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \le 12$ เป็นจริงสำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้นิพจน์ทางซ้ายมือหาค่าได้

13. ให้ $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ มีสมบัติว่า $a_1 + \cdots + a_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \ge \frac{(n^2+1)^2}{n}$$

14. จงแสดงว่า ถ้า $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับ $abc = 1$ แล้ว

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \ge \frac{1}{2}(ab + bc + ca)$$

15. ให้ $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$, $s = x_1 + \cdots + x_n$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{s}{s-x_1} + \frac{s}{s-x_2} + \cdots + \frac{s}{s-x_n} \ge \frac{n^2}{n-1}$$

16. (Irish MO 1992) ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ มีสมบัติว่า $a + b + c + d = 1$ จงพิสูจน์ว่า

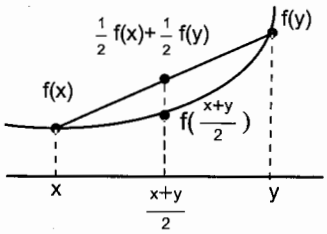
$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+d} + \frac{d^2}{d+a} \ge \frac{1}{2}$$

บทที่ 4
ฟังก์ชันนูน
และอสมการ Jensen

กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดช่วงหนึ่งของ $\mathbb{R}$ เราเรียกฟังก์ชัน $f : I \to \mathbb{R}$ ว่า เป็น **ฟังก์ชันนูน (convex function)** ในช่วง I นั้น ถ้าสำหรับทุก $x , y \in I$ ฟังก์ชัน f สอดคล้องกับอสมการ

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{ f(x) + f(y) \}$$

ถ้า $-f$ เป็นฟังก์ชันนูน แล้วเรียก f ว่าเป็น **ฟังก์ชันเว้า (concave function)**



เมื่อพิจารณาความหมายทางเรขาคณิตของฟังก์ชันนูน จะได้ว่า จุดกึ่งกลางของคอร์ตของเส้นโค้ง $y = f(x)$ อยู่เหนือ หรืออยู่บนเส้นโค้ง

ตัวอย่าง 4.1

1. $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันนูนบน $\mathbb{R}$ เนื่องจากสำหรับทุก $x , y \in \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{4} \leq \frac{x^2+y^2}{2} \qquad \text{(โดยอสมการ AM-GM)}$$

2. $f(x) = -\ln x$ เป็นฟังก์ชันนูนบนช่วง $(0 , \infty)$ เนื่องจากสำหรับทุก $x , y \in (0 , \infty)$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq -\ln\left((xy)^{1/2}\right) = \frac{-\ln(x)-(\ln y)}{2} \qquad \text{(โดยอสมการ AM-GM)}$$

ทฤษฎีบทว่าด้วยอสมการ Jensen ถ้า f เป็นฟังก์ชันเว้า กล่าวคือ $\frac{f(x)+f(y)}{2} \le f\left(\frac{x+y}{2}\right)$

สำหรับทุก $x, y \in D_f$ โดยที่อสมการนี้จะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $x = y$ แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x_1, x_2, \dots, x_n \in D_f$

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \le \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n} \qquad (4.1)$$

ซึ่งจะเป็นสมการก็ต่อเมื่อ ทุก x_i เท่ากัน

ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันนูน จะได้อสมการที่กลับเครื่องหมายกัน

อสมการ (4.1) เรียกว่า **อสมการ Jensen** (Jensen's inequality)

พิสูจน์ สังเกตก่อนอื่นว่า ถ้าทุก x_i เท่ากันแล้ว (4.1) เป็นสมการ ดังนั้นจากนี้ไปจะสมมติว่าไม่ทุก x_i เท่ากัน และเราจะพิสูจน์ (4.1) ว่าเป็นอสมการแท้

เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สมมุติว่าอสมการ (4.1) เป็นสมการแท้เมื่อ $n = m$ โดยไม่ทุก x_i เท่ากัน โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $x_1 \ne x_2$ เราจะแสดงว่าอสมการเป็นจริงณ $n = 2m$

พิจารณาโดยสมมติฐานของการอุปนัย

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}\right) < \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_m)}{m} \qquad (\text{เพราะ } x_1 \ne x_2)$$

และ
$$f\left(\frac{x_{m+1} + \cdots + x_{2m}}{m}\right) \le \frac{f(x_{m+1}) + \cdots + f(x_m)}{m}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2m}}{2m}\right) &= f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{m} + \frac{x_{m+1} + \cdots + x_{2m}}{m}\right)\right) \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_m}{m}\right) + f\left(\frac{x_{m+1} + \cdots + x_{2m}}{m}\right)\right] \\ &< \frac{1}{2}\left[\frac{f(x_1) + \cdots + f(x_m)}{m} + \frac{f(x_{m+1}) + \cdots + f(x_{2m})}{m}\right] \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{2m})}{2m} \end{aligned}$$

แสดงว่าอสมการเป็นจริงสำหรับ $n = 2m$ และจากสมบัติของ f อสมการเป็นจริงเริ่มต้นที่ $m = 2$

ดังนั้นจะได้ว่าอสมการเป็นจริงสำหรับ ทุก $n \in \mathbb{N}$ ที่เป็นกำลังบวกของสอง

สมมุติว่า $n > 2$ และ n ไม่เป็นกำลังบวกของสอง นั่นคือ $2^{m-1} < n < 2^m$ สำหรับบาง $m \in \mathbb{N}$

ให้ $k = 2^m - n$ และ $y_i = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ เมื่อ $i = 1, 2, \dots, k$

ดังนั้น $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_k$ เป็นจำนวน 2^m จำนวนในช่วง D_f โดยที่ $x_1 \neq x_2$ ดังนั้นจากการพิสูจน์ข้างต้นจะได้ว่า

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y_1+\cdots+y_k}{2^m}\right) < \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(y_1)+\cdots+f(y_k)}{2^m} \qquad (4.2)$$

จาก $y_1 + y_2 + \cdots + y_k = \frac{k}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$ ทำให้ได้ว่า

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+y_1+\cdots+y_k}{2^m}\right) = f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n+\frac{k}{n}(x_1+\cdots+x_n)}{2^m}\right)$$

$$= f\left(\frac{n(x_1+\cdots+x_n)+(2^m-n)(x_1+\cdots+x_n)}{2^m n}\right) = f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$$

แทนค่ากลับใน (4.2) จะได้ว่า

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) < \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+f(y_1)+\cdots+f(y_k)}{2^m}$$

$$= \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)+kf\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)}{2^m}$$

นั่นคือ

$$2^m f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) < f(x_1)+\cdots+f(x_n)+(2^m-n)\,f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$$

ทำให้ได้ว่า

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$$

ซึ่งเป็นอสมการที่ต้องการ □

การตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f ใดๆ เป็นฟังก์ชันนูนหรือไม่สามารถทำได้โดยใช้อนุพันธ์อันดับสองของ f ดังนั้นจะขอทบทวนนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ก่อน

ให้ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **อนุพันธ์**ของฟังก์ชัน f ที่ค่า x ใดๆ เขียนแทนด้วย $f'(x)$ มีนิยามเป็น

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้ แต่ถ้ามีค่า x ที่ทำให้ลิมิตหาค่าไม่ได้จะกล่าวว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ค่า x นั้น

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้คือ f' หาค่าได้ ดังนั้นอนุพันธ์ของ f' ก็นิยามได้ในทำนองเดียวกับ f เรียก $(f')'$ ว่า **อนุพันธ์อันดับสองของ** f เขียนแทนด้วย $f'' = (f')'$ และจะได้ว่า

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

ทฤษฎีบท กำหนดให้ I เป็นช่วงเปิดช่วงหนึ่งของ $\mathbb{R}$ และฟังก์ชัน $f : I \to \mathbb{R}$ หาอนุพันธ์อันดับสองได้บน I แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันนูนบน I ก็ต่อเมื่อ $f''(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in I$

พิสูจน์ ($\Longrightarrow$) สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันนูนบน I ให้ $x \in I$ และ $0 \neq h \in \mathbb{R}$ โดยที่ $x+h, x-h \in I$

ดังนั้น $x = \frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันนูนบน I ทำให้ได้ว่า

$$f(x) = f(\frac{1}{2}(x+h) + \frac{1}{2}(x-h)) \leq \frac{1}{2}f(x+h) + \frac{1}{2}f(x-h)$$

นั่นคือ $$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \geq 0$$

เนื่องจาก $h^2 \geq 0$ และ $h \neq 0$ ดังนั้น $f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \geq 0$

($\Longleftarrow$) สมมติว่า $f''(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in I$ เราจะพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันนูนบน I โดยใช้ ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ ให้ $x, y \in I$ และ $t \in \mathbb{R}$ โดยที่ $0 \leq t \leq 1$

กำหนดให้ $z = (1-t)x + ty$ โดยใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์สำหรับ f ที่จุด z จะได้ว่า มี c_1ที่อยู่ระหว่าง z และ x ซึ่ง

$$f(x) = f(z) + f'(z)(x-z) + \frac{1}{2}f''(c_1)(x-z)^2$$

และจะมี c_2 ที่อยู่ระหว่าง z และ y ซึ่ง

$$f(y) = f(z) + f'(z)(y-z) + \frac{1}{2}f''(c_2)(y-z)^2$$

เนื่องจาก $f'' \geq 0$ บนช่วง I ดังนั้น

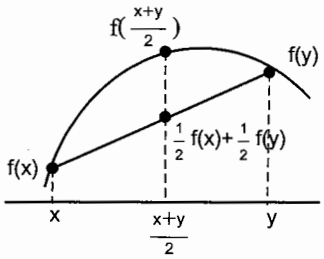
$$R := \frac{(1-t)}{2} f''(c_1)(x-z)^2 + \frac{t}{2}f''(c_2)(y-z)^2 \geq 0$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}(1-t)f(x) + tf(y) &= f(z) + f'(z)((1-t)x + ty - z) + \frac{(1-t)}{2}f''(c_1)(x-z)^2 + \frac{t}{2}f''(c_2)(y-z)^2 \\ &= f(z) + R \geq f(z) = f((1-t)x + ty)\end{aligned}$$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันนูนบนช่วง I (เมื่อแทน $t = \frac{1}{2}$) □

ถ้า f เป็นพังก์ชันเว้า (นูน) จากนิยามได้ว่า ณ จุดใดๆสองจุด $x,y \in D_f$



จุดกึ่งกลางของคอร์ดที่เชื่อมจุดทั้งสองอยู่ต่ำกว่า (เหนือกว่า) หรือทับกันกับจุดบนเส้นโค้ง ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วยแล้ว เมื่อแปรจุด x ,y ไปตลอดโดเมน จะพบทันทีว่าทุกจุดบนเส้นคอร์ดที่เชื่อมจุดทั้งสองอยู่ต่ำกว่า หรือทับกับจุดบนเส้นโค้งในแนวดิ่งเดียวกันกล่าวคือ

$$f(t_1x + t_2y) \underset{(\geq)}{\leq} t_1f(x) + t_2f(y)$$

สำหรับทุกจำนวนจริงไม่ติดลบ t_1 , t_2 ที่สอดคล้องกับ $t_1 + t_2 = 1$

ทฤษฎีบท กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันนูน (เว้า) ที่ต่อเนื่องบนช่วง I และให้

$x_1 , x_2 , \dots , x_n \in I$ และ $t_1 , t_2 , \dots , t_n \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ โดยที่ $t_1+ t_2 + \cdots + t_n = 1$ แล้วจะได้ว่า

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_ix_i\right) \underset{(\geq)}{\leq} \sum_{i=1}^{n} t_if(x_i) \qquad (4.3)$$

อสมการนี้เป็น**รูปทั่วไปของอสมการ Jensen**

พิสูจน์ โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

กรณีที่ $n = 2$ จะได้ว่า อสมการ (4.3) เป็นจริงตามข้อสังเกตที่เพิ่งเอ่ยถึงข้างต้น

ให้ $n > 2$ และ สมมุติว่าอสมการ (4.3) เป็นจริงที่ n

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{n+1} t_ix_i\right) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} t_ix_i + t_{n+1}x_{n+1}\right) \\
&= f\left(t_{n+1}x_{n+1} + (1 - t_{n+1})\frac{1}{(1 - t_{n+1})}\sum_{i=1}^{n} t_ix_i\right) \\
&\leq t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1 - t_{n+1})\, f\left(\frac{1}{(1 - t_{n+1})}\sum_{i=1}^{n} t_ix_i\right) \\
&= t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1 - t_{n+1})\, f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{(1 - t_{n+1})}x_i\right) \\
&\leq t_{n+1}f(x_{n+1}) + (1 - t_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i}{(1 - t_{n+1})}f(x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} t_if(x_i) + t_{n+1}f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} t_if(x_i)
\end{aligned}$$

นั่นคือ อสมการ (4.3) เป็นจริงที่ n+1 ด้วย และโดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ทำให้ได้ว่าอสมการ (4.3) เป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ □

ตัวอย่าง 4.2 ให้ $0 < a, b < 1$; $p, q \geq 0$; $p + q = 1$ จงพิสูจน์ว่า $a^p b^q + (1-a)^p(1-b)^q \leq 1$

วิธีทำ $a^p b^q + (1-a)^p(1-b)^q = a^p b^{1-p} + (1-a)^p(1-b)^q = b\left(\frac{a}{b}\right)^p + (1-b)\left(\frac{1-a}{1-b}\right)^p$

$$\leq \left(\frac{ba}{b} + \frac{(1-b)(1-a)}{1-b}\right)^p = 1$$

โดยอสมการ Jensen ประยุกต์ใช้กับ ฟังก์ชันเว้า $f(x) = x^p$ $(0 < p \leq 1)$

ตัวอย่าง 4.3 ให้ $x_1, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$(x_1 + \cdots + x_n)^{x_1+\cdots+x_n} \geq x_1^{x_1} \cdots x_n^{x_n}$$

วิธีทำ โดยอสมการ Jensen ประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันเว้า $f(x) = \log x$ ได้ว่า

$$\frac{\sum x_i \log x_i}{\sum x_i} \leq \log\left(\frac{\sum x_i^2}{\sum x_i}\right) \leq \log\left(\sum x_i\right)$$

เมื่อยกเลขชี้กำลังจะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 4.4 จงพิสูจน์ว่า $\sqrt[44]{\tan 1^\circ \tan 2^\circ \cdots \tan 44^\circ} < \sqrt{2} - 1 < \frac{1}{44}(\tan 1^\circ + \tan 2^\circ + \cdots + \tan 44^\circ)$

วิธีทำ ฟังก์ชัน $f(x) = \tan x$ เป็นฟังก์ชันนูนโดยแท้เมื่อ $x \in (0, 90^\circ)$ และฟังก์ชัน $g(x) = \log \tan x$ เป็นฟังก์ชันเว้าโดยแท้ ในช่วงเปิด $(0, \frac{\pi}{2})$ ให้ $x_k = \frac{k\pi}{180}$ (ซึ่งคือค่ามุมในหน่วยเรเดียนของมุม k°) เราได้

$$\frac{1}{44}\{f(x_1) + \cdots + f(x_{44})\} > f\left(\frac{1}{44}(x_1 + \cdots + x_{44})\right) = f\left(\frac{\pi}{8}\right) \qquad (4.4.1)$$

$$\frac{1}{44}\{g(x_1) + \cdots + g(x_{44})\} < g\left(\frac{1}{44}(x_1 + \cdots + x_{44})\right) = g\left(\frac{\pi}{8}\right) \qquad (4.4.2)$$

เนื่องจาก $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} - 1$

ดังนั้น (4.4.1) คือหนึ่งในสองอสมการที่ต้องการ ส่วนอีกอสมการหนึ่ง มาจาก (4.4.2) โดยการสังเกตว่า

$$g\left(\frac{1}{44}(x_1 + \cdots + x_{44})\right) = \log\left(\sqrt[44]{\tan x_1 \cdots \tan x_{44}}\right), \quad g\left(\frac{\pi}{8}\right) = \log(\sqrt{2} - 1)$$

ตัวอย่าง 4.5 ให้ $0 < a, b, c < 1$ และ $ab + bc + ca = 1$

จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ และหาด้วยว่า อสมการเป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ ให้ $a = \tan A$, $b = \tan B$, $c = \tan C$ โดยที่ $0 < A, B, C < \frac{\pi}{4}$ เนื่องจาก $ab + bc + ca = 1$

ดังนั้น $\tan A \tan B + \tan B \tan C = 1 - \tan C \tan A$

กล่าวคือ $\tan B \tan (A+C) (1 - \tan C \tan A) = 1 - \tan C \tan A$

ซึ่งให้ว่า $\tan B \tan (A+C) = 1$ ใช้เอกลักษณ์ $\tan x \tan y = 1 - \frac{\tan x + \tan y}{\tan (x + y)}$ ได้ว่า $\frac{\tan B + \tan (A + C)}{\tan (A + B + C)} = 0$

เนื่องจาก $A , B , C \in (0,\frac{\pi}{4})$ มีทางเป็นไปได้ทางเดียวคือ $A + B + C = \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากฟังก์ชัน $y = \tan x$ เป็นฟังก์ชันนูน บน $(0,\frac{\pi}{2})$ ดังนั้น โดยอสมการ Jensen

$$\frac{2a}{1-a^2} + \frac{2b}{1-b^2} + \frac{2c}{1-c^2} = \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C \geq 3 \tan\left(\frac{1}{3}(2A + 2B + 2C)\right) = 3\sqrt{3}$$

โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $A = B = C$ กล่าวคือ ก็ต่อเมื่อ $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ตัวอย่าง 4.6 (Putnam 1980) สำหรับแต่ละจำนวนจริง $t \geq 0$ ให้ S_t เป็นเซตของทุกฟังก์ชันค่าจริงไม่ติดลบ ที่เป็นฟังก์ชันนูน เพิ่ม และต่อเนื่อง ที่มีนิยามบนช่วงปิด $[0,1]$ และสอดคล้องกับอสมการ

$$f(1) - 2f\left(\frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \geq t\left[f\left(\frac{2}{3}\right) - 2f\left(\frac{1}{3}\right) + f(0)\right]$$

จงหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอบน t ที่ทำให้เซต S_t ปิดภายใต้การคูณ (ซึ่งหมายความว่า ถ้า $f(x), g(x) \in S_t$ แล้ว $f(x)g(x) \in S_t$ ด้วยเช่นกัน ส่วนฟังก์ชันนูน $f(x)$ คือฟังก์ชันที่สอดคล้องกับอสมการ

$$f(su + (1 - s)v) \leq sf(u) + (1 - s)f(v) \quad (\text{เมื่อ } 0 \leq s \leq 1)$$

วิธีทำ เราจะแสดงว่าเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอคือ $0 \leq t \leq 1$

ฟังก์ชัน fg เป็นผลคูณของฟังก์ชันเพิ่ม ค่าจริงไม่ติดลบ ที่ต่อเนื่อง ดังนั้น ตัวมันเองจึงมีสมบัติเหล่านี้เช่นกัน

เราจะแสดงว่า fg เป็นฟังก์ชันนูนด้วยเช่นกัน

พิจารณาเมื่อ $u \leq v$ โดยความเป็นฟังก์ชันนูนของ f และ g ได้ว่า

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) g\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{f(u) + f(v)\}\frac{1}{2}\{g(u) + g(v)\} = \frac{1}{4}f(u)g(u) + \frac{1}{4}f(v)g(v) + \frac{1}{4}[f(u)g(v) + f(v)g(u)]$$

สังเกตว่า $f(u)g(v) + f(v)g(u) \leq f(u)g(u) + f(v)g(v) \Leftrightarrow f(u)[g(v) - g(u)] \leq f(v)[g(v) - g(u)]$

ซึ่งเป็นจริงเสมอ โดยความเป็นฟังก์ชันเพิ่มของ f และ g

ดังนั้น

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) g\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{1}{4}f(u)g(u) + \frac{1}{4}f(v)g(v) + \frac{1}{4}[f(u)g(u) + f(v)g(v)] = \frac{1}{2}f(u)g(u) + \frac{1}{2}f(v)g(v)$$

แสดงว่า fg เป็นฟังก์ชันนูน

เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x) = x$ อยู่ใน S_t สำหรับทุกจำนวนจริง t ถ้า S_t ปิดภายใต้การคูณ แล้ว $x^2 \in S_t$ ซึ่งให้ว่า

$$\frac{2}{9} = 1 - 2\left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) \geq t\left(\frac{4}{9} - 2\left(\frac{1}{9}\right)\right) = \frac{2t}{9}$$

กล่าวคือ $1 \geq t$

ในทำนองกลับกัน ให้ $0 \leq t \leq 1$ และ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบน $[0, 1]$ นิยาม

$$E(h) := h(1) - 2h\left(\frac{2}{3}\right) + h\left(\frac{1}{3}\right) - t\left[h\left(\frac{2}{3}\right) - 2h\left(\frac{1}{3}\right) + h(0)\right]$$

สมมุติว่า $f, g \in S_t$ ดังนั้น $E(f) \geq 0$ และ $E(g) \geq 0$

ดังนั้น

$$E(fg) = g\left(\frac{2}{3}\right)E(f) + f\left(\frac{1}{3}\right)E(g) + \left[f(1) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right]\left[g(1) - g\left(\frac{2}{3}\right)\right] - t\left[f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right]\left[g\left(\frac{2}{3}\right) - g(0)\right]$$

โดยสมบัติความนูน ได้ว่า

$$f(1) - f\left(\frac{1}{3}\right) \geq 2\left[f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right] \quad \text{และ} \quad g(1) - g\left(\frac{2}{3}\right) \geq \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{2}{3}\right) - g(0)\right]$$

ถ้า $0 \leq t \leq 1$ แล้ว $E(fg) \geq 0$ ซึ่งแสดงว่า $fg \in S_t$

ตัวอย่าง 4.7 (USAMO 1980) เมื่อ $a, b, c \in [0, 1]$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

วิธีทำ ให้ $F(a, b, c) := \dfrac{a}{b+c+1} + \dfrac{b}{c+a+1} + \dfrac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c)$

ดังนั้น $F(a, b, c)$ เป็นฟังก์ชันนูนในแต่ละตัวแปร a, b, c ยกตัวอย่างเช่น เมื่อพิจารณาเทียบกับตัวแปร a (โดยอีกสองตัวแปร ถือว่ามีค่าตรึง) พบว่า F ประกอบด้วยพจน์สองพจน์ พจน์หนึ่งเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นของ a อีกพจน์หนึ่งอยู่ในรูป $\dfrac{A}{B+x}$ เมื่อ $A \geq 0, B > 0$

สังเกตว่า กราฟของ $\dfrac{A}{B+x}$ เมื่อ $x > -B$ เป็นกิ่งหนึ่งของไฮเพอร์โบลา เราสามารถพิสูจน์ความนูนของกิ่งนี้ของไฮเพอร์โบลา ได้โดยใช้อสมการ $\dfrac{A}{B+x} + \dfrac{A}{B+y} \geq \dfrac{2A}{B + \dfrac{x+y}{2}}$ หรือ สังเกตว่าอนุพันธ์อันดับสองของมัน คือ $\dfrac{2A}{(B+x)^3}$ ซึ่งมีค่า > 0 เมื่อ $x > -B$

จากความจริงที่ว่า ค่าสูงสุดของฟังก์ชันนูน เหนือช่วง จะต้องเกิด ณ จุดปลายช่วง จึงได้ว่าค่าสูงสุดของ F(a, b, c) จะต้องเกิด ณ จุดยอด (a, b, c) จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งในบรรดา 8 จุดยอดของลูกบาศก์สามมิติ [0,1]×[0, 1]×[0, 1] จากการแทนค่าพบว่า F(a, b, c) = 1 ณ ทุกจุดยอดดังกล่าว จึงได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 4.8 (USAMO 1977) ถ้า a, b, c, d, e เป็นจำนวนบวกที่อยู่ในช่วง [p, q], 0 < p < q แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$(a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right) \le 25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

และหาด้วยว่าเป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ ให้ $F(a, b, c, d, e) := (a + b + c + d + e)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}\right)$

สามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่า F(a, b, c, d, e) เป็นฟังก์ชันนูนในแต่ละตัวแปร

ดังนั้น ค่าสูงสุดของฟังก์ชันนี้ จะต้องเกิด ณ จุดยอดใดจุดยอดหนึ่งในบรรดา 32 จุดยอด (a, b, c, d, e) ของลูกบาศก์ห้ามิติ [p, q]×[p,q]×[p, q]×[p, q]×[p, q]

สมมุติว่ามีพิกัดของจุดยอดที่เป็น p อยู่ n พิกัด และที่เป็น q อยู่ 5 – n พิกัด เมื่อ n = 0, 1,..., 5

ดังนั้น เราต้องหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน กำลังสอง (ใน n)

$$F = \{np + (5-n)q\}\left(\frac{n}{p}-\frac{5-n}{q}\right) = n^2 + (5-n)^2 + n(5-n)\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)$$

$$= n^2 + (5-n)^2 + 2n(5-n) + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2 = 25 + n(5-n)\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

ดังนั้น F มีค่าสูงสุดเป็น $25 + 6\left(\sqrt{\frac{p}{q}}-\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$ เมื่อ n = 2 หรือ 3 และได้เป็นสมการ เมื่อสอง หรือ สาม จำนวนจาก a, b, c, d, e มีค่าเป็น p ส่วนที่เหลือมีค่าเป็น q

ตัวอย่าง 4.9 ให้ $0 \le a, b, c \le 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \le 2$$

วิธีทำ ให้ $f(a, b, c) := \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1}$ ฟังก์ชันนี้ มีนิยาม และต่อเนื่องในรูปลูกบาศก์ปิดสามมิติ [0, 1] × [0, 1] × [0, 1]

นอกจากนี้ยังเป็นฟังก์ชันนูนในแต่ละตัวแปร (การตรวจสอบ ทำได้เช่น เมื่อพิจารณาพิกัดแรก

$$f(x, b, c) = \frac{x}{bc+1} + \frac{b}{xc+1} + \frac{c}{xb+1}$$

เป็นผลบวกของฟังก์ชันนูนสามฟังก์ชัน ดังนั้น จึงเป็นฟังก์ชันนูนเช่นเดียวกัน)

ดังนั้น ฟังก์ชันนี้ต้องมีค่าสูงสุด ณ จุดยอดใดจุดยอดหนึ่ง โดยความสมมาตรในตัวแปรทั้งสาม เพียงพอที่จะตรวจค่า ณ จุดยอด (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1) และ (1, 1, 1) เท่านั้น จากการแทนค่า พบว่า f(0, 1, 1) = 2 เป็นค่าสูงสุด ตามต้องการ

ตัวอย่าง 4.10 ให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกที่มีสมบัติว่า a + b = 1 จงพิสูจน์ว่า

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$$

วิธีทำ ฟังก์ชัน $f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ เป็นฟังก์ชันนูน เพราะ $f''(x) = 2\left(1+\frac{3}{x^4}\right) > 0$ ดังนั้น โดยอสมการ Jensen ได้ $f(a) + f(b) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

ตัวอย่าง 4.11 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกที่มีสมบัติว่า a + b + c = 1 จงพิสูจน์ว่า

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}$$

วิธีทำ ฟังก์ชัน $f(x) = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2$ เป็นฟังก์ชันนูน เพราะ $f''(x) = 2\left(1+\frac{1}{x^4}\right) > 0$ ดังนั้น โดยอสมการ Jensen ได้ $f(a) + f(b) + f(c) \geq 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{100}{3}$

แบบฝึกหัด

1. (Moldova MO 1993) ให้ $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ เป็นจำนวนตรรกยะ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a_1 > 3$ แล้ว

$$a_n^{1/a_n} \leq (a_2a_3\cdots a_n)^{1/A} \leq a_1^{1/a_1} \quad \text{เมื่อ } A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

2. ให้ $a_0, \ldots, a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\tan\left(a_0-\frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(a_1-\frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \tan\left(a_n-\frac{\pi}{4}\right) \geq n-1$$

จงพิสูจน์ว่า $\tan a_0 \tan a_1 \cdots \tan a_n \geq n^{n+1}$

3. ให้ $0 < x_i < \pi$ $(I = 1,\ldots, n)$, $x = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$ จงพิสูจน์ว่า

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\sin x_i}{x_i}\right) \leq \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n$$

4. ให้ $0 < a \leq b \leq c \leq d$ จงแสดงว่า $a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$

5. ให้ $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $a \neq b$ สมมุติว่ารากทุกรากของสมการ $ax^3 - x^2 + bx - 1 = 0$ เป็นจำนวนจริงบวก จงหาค่าบวกน้อยสุดที่เป็นไปได้ของนิพจน์

$$P = \frac{5a^2 - 3ab + 2}{a^2(b - a)}$$

6. (Iranian MO) ให้ $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็ม ≥ 2 จงพิสูจน์ว่า

$$a_1 a_2^4 + a_2 a_3^4 + \cdots + a_n a_1^4 \geq a_2 a_1^4 + a_3 a_2^4 + \cdots + a_1 a_n^4$$

7. (Irish MO) ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$n^n \leq (n!)^2 \leq \left(\frac{(n+1)(n+2)}{6}\right)^n$$

8. ให้ $x_1,\ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับ $x_1 + \cdots + x_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{1 - x_2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

9. (German MC) ให้ $k, n \in \mathbb{N}$ สอดคล้องกับ $1 \leq k \leq 2n$ จงพิสูจน์ว่า

$$\binom{2n+1}{k-1} + \binom{2n+1}{k+1} \geq 2.\frac{n+1}{n+2}\binom{2n+1}{k}$$

10. (Chinese MO) ให้ $x_1,\ldots, x_{1997} \in \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3}$ $(i = 1,\ldots, 1997)$

(ii) $x_1 + \cdots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$

จงหาค่าสูงสุดของ $x_1^{12} + \cdots + x_{1997}^{12}$

11. (Irish MO) ถ้า $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{9}{a+b+c} \leq 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

และ $$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

12. (Korean MO) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับ $a + b + c = abc$ จงแสดงว่า

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

13. ถ้า $0 \leq x, y \leq 1$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$$

บทที่ 5

อสมการว่าด้วยการจัดเรียง (Rearrangement Inequality)

ให้ $a_1,\ldots, a_n$ และ $b_1,.., b_n$ เป็นลำดับของจำนวนจริงคู่หนึ่ง พิจารณาค่า $S = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$ เพื่อความสะดวก (โดยการจัดเรียงลำดับแรกเสียใหม่ ถ้าจำเป็น) สมมุติว่าลำดับแรกเรียงจากมากไปน้อย กล่าวคือ $a_1 \geq \cdots \geq a_n$ ทฤษฎีบทว่าด้วย **อสมการว่าด้วยการจัดเรียง** กล่าวว่า

"S มีค่าสูงสุด ถ้าลำดับ $b_1,\ldots, b_n$ จัดเรียงในทิศทางเดียวกันกับลำดับของ a_i (หมายความว่า ลำดับ b_i เรียงจากมากไปน้อยด้วยเช่นกัน) และมีค่าต่ำสุดถ้าทั้งสองลำดับจัดเรียงในทิศตรงกันข้าม (หมายความว่า ลำดับ b_i เรียงจากน้อยไปมาก) "

การพิสูจน์ความจริงนี้ทำได้ไม่ยาก ดังแสดงต่อไปนี้

ให้ $c_1,\ldots, c_n$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนชุดหนึ่งของ $b_1,\ldots, b_n$ พิจารณาดรรชนีคู่หนึ่งคือ $r < s$ (ดังนั้น $a_r \geq a_s$) และพิจารณา ผลบวกสองค่าต่อไปนี้

$S_1 = a_1c_1 + \cdots + a_rc_r + \cdots + a_sc_s + \cdots + a_nc_n$, $S_2 = a_1c_1 + \cdots + a_rc_s + \cdots + a_sc_r + \cdots + a_nc_n$

ซึ่งต่างกันที่พจน์กลางสองพจน์เท่านั้น (กล่าวคือ ผลบวกหนึ่งได้จากอีกผลบวกหนึ่งโดยการสลับที่ของ c_r กับ c_s)

สังเกตว่า $S_2 - S_1 = a_rc_s + a_sc_r - a_rc_r - a_sc_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r)$

เพราะฉะนั้น $c_s \geq c_r \Rightarrow S_2 \geq S_1$ ในขณะที่ $c_s \leq c_r \Rightarrow S_2 \leq S_1$

เนื่องจาก r, s เป็นตำแหน่งคู่ใด ๆ จึงสรุปได้ว่า ค่าผลบวกจะสูงสุดถ้า ลำดับ b_i เรียงในทิศทางเดียวกันกับลำดับ a_i และมีค่าต่ำสุด ถ้าเรียงในทิศตรงข้าม

อสมการที่เกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับอสมการว่าด้วยการจัดเรียง คือ **อสมการ Chebyshev** ซึ่งกล่าวได้ดังนี้

"ให้ $a_1,\ldots,a_n$ และ $b_1,\ldots,b_n$ เป็นลำดับของจำนวนจริงคู่หนึ่ง ถ้าลำดับทั้งสองจัดเรียงในทิศทางเดียวกัน แล้ว

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\cdots+b_n}{n} \le \frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n}$$

และอสมการกลับทิศทาง ถ้าลำดับทั้งสองเรียงในทิศตรงข้ามกัน"

เราจะแสดงการพิสูจน์เพียงในกรณีจัดเรียงในทิศทางเดียวกัน และขอละอีกกรณีหนึ่งเป็นแบบฝึกหัด สมมุติว่าลำดับทั้งสองจัดเรียงในทิศทางเดียวกัน ดังนั้น โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1$$

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2$$

$$\cdots$$

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}$$

เมื่อบวกอสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน ได้ $n(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n) \ge (a_1 + \cdots + a_n)(b_1 + \cdots + b_n)$ เมื่อหารตลอดตัวย n^2 จะได้อสมการที่ต้องการ

อสมการว่าด้วยการจัดเรียงมีพลังสูงมาก ถ้าเราสามารถมองเห็นถึงการแบ่งผลบวกที่ซับซ้อนออกเป็นสองส่วนที่ง่ายขึ้น และสังเกตเห็นการจัดเรียงของส่วนย่อยสองส่วนนี้ ยกตัวอย่างเช่นเราสามารถใช้อสมการว่าด้วยการจัดเรียง ในการพิสูจน์อสมการ AM-GM ได้ดังนี้

ให้ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก, $c = \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$, $a_1 = \frac{x_1}{c}$, $a_2 = \frac{x_1x_2}{c^2}$, $a_3 = \frac{x_1x_2x_3}{c^3}$,..., $a_n = \frac{x_1\cdots x_n}{c^n} = 1$

และ $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_2}$, ... , $b_n = \frac{1}{a_n} = 1$ ดังนั้น ลำดับ $\{a_i\}$ และ $\{b_i\}$ จัดเรียงในทิศทางดรงกันข้าม โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ได้ว่า $a_1b_1 +\ldots+ a_nb_n \le a_1b_n + a_2b_1 + a_3b_2 +\ldots+ a_nb_{n-1}$

เมื่อแทนค่ากลับได้ว่า $1 + 1 + \cdots + 1 \le \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c}$

เมื่อแทนค่าอีกครั้งหนึ่งได้อสมการ AM-GM ที่ต้องการ $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \le \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$

ตัวอย่าง 5.1 (IMO 1997) ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1 \text{ และ } |x_i| \le \frac{1}{2}(n+1) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

จงแสดงว่ามีการเรียงสับเปลี่ยน $y_1, y_2,\ldots, y_n$ ของ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ ชุดหนึ่ง ที่มีสมบัติว่า

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \le \frac{1}{2}(n+1)$$

วิธีทำ สมมุติเพื่อหาข้อขัดแย้ง ว่าทุกการเรียงสับเปลี่ยน $y_1, y_2,\ldots, y_n$ ของ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ ให้ค่า

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| > \frac{1}{2}(n+1)$$

เนื่องจาก จำนวนการเรียงสับเปลี่ยนมีจำกัด ดังนั้น ต้องมีการเรียงสับเปลี่ยน $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ชุดหนึ่งที่ให้ค่า

$$\left| y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n \right| \text{ ต่ำสุด}$$

เนื่องจากเมื่อถอดค่าสัมบูรณ์ แล้วมีทางเป็นไปได้สองทาง จึงแยกพิจารณาเป็นสองกรณี

- **กรณีที่ $f = y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n > 0$**

  ให้ $g = y_1 + 2y_2 + \cdots + ky_{k+1} + (k+1)y_k + \cdots + ny_n$ เห็นได้ชัดว่า $g - f = y_k - y_{k+1}$

  ถ้า $y_k - y_{k+1} < 0$ (ซึ่งคือ $g < f$) แล้ว เนื่องจาก $|f|$ ต่ำสุด ต้องได้ว่า

  $$0 > g = f + (y_k - y_{k+1}) < -\frac{1}{2}(n+1)$$

  ซึ่งทำให้ $f - g > n + 1$ แสดงว่า $y_k - y_{k+1} > n + 1$

  อย่างไรก็ตามเรามีว่า $|y_i| \le \frac{1}{2}(n+1)$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $y_k \ge y_{k+1}$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \ldots, n-1$

  เมื่อพิจารณา $y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$ และ $1 \le 2 \le \cdots \le n$ โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ได้ว่า

  $$y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n \le ny_1 + (n-1)y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n$$

  ดังนั้น

  $$(n+1)(y_1+y_2+\cdots+y_n) = \{ny_1 + (n-1)y_2 + \cdots + y_n\} + \{y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n\}$$
  $$> \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1) = n+1$$

  ซึ่งให้ว่า $y_1 + y_2 + \cdots + y_n > 1$

  แต่ $|y_1 + y_2 + \cdots + y_n| = |x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

- **กรณีที่ $f = y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n < 0$** เป็นไปในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 5.2 (IMO 1975) ให้ x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า

$$x_i \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n \quad \text{และ} \quad y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_n$$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $z_1, z_2, \ldots, z_n$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2$,

$\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}x_iz_i + \sum_{i=1}^{n}z_i^2$ และ $\sum_{i=1}^{n}y_i^2 = \sum_{i=1}^{n}z_i^2$

อสมการที่ต้องการพิสูจน์ สมมูลกับ

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \ge \sum_{i=1}^{n}x_iz_i \qquad (5.2.1)$$

ในผลบวกทางซ้ายมือ y_i ปรากฏแบบเรียงลำดับจากค่ามากไปน้อย ในขณะที่ในผลบวกทางขวามือ z_i อาจไม่ปรากฏแบบเรียงลำดับจากค่ามากไปน้อย กล่าวคือ อาจมีบางพจน์ x_kz_k และ x_jz_j ที่มี $k < j$ โดยที่

$$x_k \geq x_j \quad \text{แต่} \quad z_k \leq z_j \tag{5.2.2}$$

เมื่อใดก็ตามที่เป็นเช่นนี้ ให้สลับ z_k กับ z_j กล่าวคือ แทนพจน์ $x_kz_k + x_jz_j$ ด้วย $x_kz_j + x_jz_k$ เราจะพบว่าการสลับเช่นว่านี้ ไม่ทำให้ค่าทางขวามือของ (5.2.1) ลดลง ทั้งนี้เพราะจาก (5.2.2) ได้ว่าผลคูณ

$$(x_k - x_j)(z_k - z_j) = x_kz_k + x_jz_j - (x_kz_j + x_jz_k) \leq 0$$

ดังนั้น $x_kz_k + x_jz_j \leq x_kz_j + x_jz_k$ เมื่อทำการสลับเช่นว่านี้เป็นจำนวนจำกัดครั้ง ผลบวกทางขวามือของ (5.2.1) จะถูกแทนด้วยผลบวก $\sum_{i=1}^{n} x_iz_i'$ ที่มีค่าไม่น้อยกว่าค่าเดิม และ $z_1' \geq z_2' \geq \cdots \geq z_n'$ ณ ตอนนี้ เราได้ว่า $z_i' = y_i$

เพราะฉะนั้น ผลบวกทางขวามือของ (5.2.1) มีค่า $\leq \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 5.3 (IMO 1978) ให้ $(a_k)_{k \geq 1}$ เป็นลำดับของจำนวนนับที่แตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

วิธีทำ ให้ $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ เป็นลำดับของ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ที่เรียงใหม่จากน้อยไปมาก โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2}$$

ดังนั้น จึงเป็นการเพียงพอ ที่จะพิสูจน์อสมการที่ต้องการสำหรับลำดับ $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ สังเกตว่าสำหรับลำดับนี้เรามีว่า $b_1 \geq 1, b_2 \geq 2, \ldots, b_n \geq n$

ดังนั้น

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ}$$

ตัวอย่าง 5.4 (AMOC 1983)

(a) จงหาการจัดเรียง $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ของ $\{1, 2, \ldots, n\}$ ที่ให้ค่าสูงสุดของ $Q := a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1$

(b) จงหาการจัดเรียงชุดที่ให้ค่าต่ำสุดของ Q

วิธีทำ (a) ถ้า $1 \leq i, i + 2 \leq j < n$ และ $(a_i - a_{j+1})(a_j - a_{i+1}) > 0$ แล้ว เราสามารถเพิ่มค่าของ Q โดยการจัดเรียงใหม่เป็น $\{a_1, \ldots, a_i, a_j, a_{j-1}, \ldots, a_{i+2}, a_{i+1}, a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n\}$ ในการจัดเรียงใหม่นี้ ค่าของ Q เพิ่มขึ้นด้วยปริมาณ

$a_ia_j + a_{i+1}a_{j+1} - a_ia_{i+1} - a_ja_{j+1} = (a_i - a_{j+1})(a_j - a_{i+1}) > 0$

ให้ A เป็นการจัดเรียงที่ให้ค่า Q สูงสุด (เนื่องจากมีการจัดเรียงทั้งสิ้นเป็นจำนวนจำกัด ดังนั้น A มีอยู่จริง) โดยใช้การเรียงสับเปลี่ยนแบบเป็นวงจร (ซึ่งไม่กระทบต่อค่าของ Q) เราสามารถสมมุติได้ว่า A อยู่ในรูป $1 = a_1, a_2, \ldots, a_n$

ถ้า $2 = a_i$ แล้ว $i = 2$ หรือ $i = n$ เพราะไม่เช่นนั้น เราสามารถเพิ่มค่า Q ได้ โดยสลับ 2 มาอยู่ที่ a_2 หรือ a_n เนื่องจาก $a_1a_i + a_2a_i - a_1a_2 - a_ia_{i+1} = (1 - a_{i+1})(2 - a_2) > 0$ จากนี้ สมมุติว่า $i = n$ เพราะไม่เช่นนั้น ให้ทำการเรียงสับเปลี่ยนแบบเป็นวงจร และทำการสะท้อน (ซึ่งไม่กระทบถึงค่าของ Q)

ถ้า $3 = a_j$ แล้ว $j = 2$ เพราะไม่เช่นนั้นในทำนองเดียวกันกับที่ทำมาก่อน จะสามารถเพิ่มค่าของ Q ได้ เนื่องจาก $a_1a_j + a_2a_{j+1} - a_1a_2 - a_ja_{j+1} = (1 - a_{j+1})(3 - a_2) > 0$ โดยการสะท้อน เราได้การจัดเรียงในรูป$\{2, b_2, \ldots, 3, 1\}$ ในทำนองเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ว่า $b_2 = 4$ และดำเนินการในลักษณะเช่นว่านี้ จะได้ว่า

$$A = \left\{1, 3, 5, \ldots, 2\left[\frac{n-1}{2}\right] + 1, 2\left[\frac{n}{2}\right], \ldots, 4, 2\right\}$$

เป็นการจัดเรียงที่ให้ค่าสุงสุดของ Q

(b) โดยข้อโต้แย้งเช่นกันกับในข้อ (a) ได้ว่า การจัดเรียงที่ให้ค่าต่ำสุดของ Q คือ

$$\left\{1, n, 2, n-1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right], 1\right\}$$

ตัวอย่าง 5.5 (APMO 2004) ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง > 0 จงพิสูจน์ว่า

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

วิธีทำ ให้ $x = a + b + c$, $y = ab + bc + ca$, $z = abc$ ดังนั้น

$$a^2 + b^2 + c^2 = x^2 - 2y, \quad a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = y^2 - 2zx, \quad a^2b^2c^2 = z$$

และอสมการที่ต้องการพิสูจน์ คือ

$$a^2b^2c^2 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 4(a^2 + b^2 + c^2) + 8 = z^2 + 2(y^2 - 2zx) + 4(x^2 - 2y) + 8 \geq 9y$$

กล่าวคือ $z^2 + 2y^2 - 4zx + 4x^2 - 17y + 8 \geq 0$

โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = y$

ดังนั้น $x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2y \geq 3y$

นอกจากนี้โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง อีกเช่นกัน ได้

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geq (ab)(ca) + (bc)(ab) + (ca)(bc) = (a + b + c)abc = xz$$

ดังนั้น

$$y^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2zx \geq 3zx$$

ซึ่งให้ว่า

$$z^2 + 2y^2 - 4zx + 4x^2 - 17y + 8 = \left(z + \frac{x}{3}\right)^2 + \frac{8}{9}(y - 3)^2 + \frac{10}{9}(y^2 - 3zx) + \frac{35}{9}(x^2 - 3y) \geq 0$$

ตามต้องการ

อสมการว่าด้วยการจัดเรียงสามารถใช้กับลำดับมากกว่าสองลำดับ แต่มีเป็นจำนวนจำกัดได้ สิ่งนี้เป็นจริง โดยการพิจารณาครั้งละสองลำดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.6 ให้ a, b, c เป็นจำนวนบวก จงพิสูจน์ว่า

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$$

วิธีทำ พิจารณาลำดับสามลำดับต่อไปนี้ ซึ่งจัดเรียงในทิศทางเดียวกัน $\{a^2, b^2, c^2\}$, $\{a, b, c\}$, $\{a, b, c\}$ เทียบกับลำดับสามชุดเดียวกันที่จัดเรียงในทิศอื่น คือ $\{a^2, b^2, c^2\}$, $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$
เมื่อใช้อสมการว่าด้วยการจัดเรียงสองครั้ง จะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 5.7 ให้ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า

$$x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + \cdots + x_n^{n+1} \geq x_1x_2\cdots x_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

วิธีทำ พิจารณาลำดับ n + 1 ลำดับที่จัดเรียงในทิศทางเดียวกัน

$\{x_1,\ldots, x_n\}$, $\{x_1,\ldots, x_n\}$, ... , $\{x_1,\ldots, x_n\}$ (ลำดับเดียวกันซ้ำ n + 1 ครั้ง)

กับลำดับชุดเดียวกัน แต่เรียงในลักษณะต่อไปนี้

$\{x_1,\ldots, x_n\}$, $\{x_2,\ldots, x_1\}$, ... , $\{x_1,\ldots, x_n\}$ (หมุนสมาชิกไปทีละตำแหน่ง)

โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ประยุกต์กับลำดับทั้ง n + 1 ชุด จะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 5.8 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

วิธีทำ โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียงได้ว่า

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b} \leq \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}$$

ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 5.9 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

วิธีทำ โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ได้ว่า

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^2\cdot a + b^2\cdot b + c^2\cdot c \geq a^2\cdot b + b^2\cdot c + c^2\cdot a$$

ตัวอย่าง 5.10 เมื่อ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

วิธีทำ โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ได้ว่า

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = \frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y} + \frac{y}{z}\cdot\frac{y}{z} + \frac{z}{x}\cdot\frac{z}{x} \geq \frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z} + \frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x} + \frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y} = \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y}$$

ตัวอย่าง 5.11 ให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$(a + b)(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)(a^3 + b^3)$$

วิธีทำ เมื่อกระจายและจัดรูป พบว่าอสมการที่ต้องการสมมูลกับ $a^4b + ab^4 \geq a^3b^2 + a^2b^3$
ซึ่งสมมูลกับ $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ อสมการท้ายนี้เป็นจริงจากอสมการว่าด้วยการจัดเรียง เมื่อพิจารณา

$$a^3 + b^3 = a^2 \cdot a + b^2 \cdot b \geq a^2 \cdot b + b^2 \cdot a$$

ตัวอย่างต่อไปเป็นการประยุกต์ของอสมการ Chebyshev

ตัวอย่าง 5.12 ให้ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง > 1 จงพิสูจน์ว่า

$$x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n} \geq \left(x_1 \cdots x_n\right)^{(x_1+\cdots+x_n)/n}$$

วิธีทำ เพื่อความสะดวก ใส่ลอการิทึมทั้งสองข้าง ได้ว่าอสมการที่ต้องการสมมูลกับ

$$\frac{x_1 \log x_1 + \cdots + x_n \log x_n}{n} \geq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \cdot \frac{\log x_1 + \cdots + \log x_n}{n}$$

อสมการท้ายนี้เป็นจริง โดยผลของอสมการ Chebyshev

ตัวอย่าง 5.13 (Chinese MO 1992) ให้ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบ และให้

$$x_{n+1} = x_1, \quad a = \min \{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$$

จงพิสูจน์ว่า $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} \leq n + \frac{1}{(1 + a)^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a)^2$$

วิธีทำ ให้ $y_1, y_2,\ldots, y_n$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $x_1, x_2,\ldots, x_n$ ที่มีสมบัติว่า $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdots \leq y_n$
ดังนั้น $1 + y_1 \leq 1 + y_2 \leq \cdots \leq 1 + y_n$
โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ได้ $$\sum_{j=1}^{n} \frac{1 + x_j}{1 + x_{j+1}} \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1 + y_j}{1 + y_{n-j+1}}$$
การพิสูจน์อสมการของโจทย์ จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1 + y_j}{1 + y_{n-j+1}} \leq n + \frac{1}{(1 + a)^2} \sum_{j=1}^{n} (y_j - a)^2$$

เนื่องจาก $$\frac{1 + y_j}{1 + y_{n-j+1}} + \frac{1 + y_{n-j+1}}{1 + y_j} - 2 = \frac{(y_j - y_{n-j+1})^2}{(1 + y_j)(1 + y_{n-j+1})} \leq \frac{(y_j - y_{n-j+1})^2}{(1 + a)^2}$$

เมื่อเขียนกระจายตั้งแต่ $j = 1, 2, \ldots, n$ ได้

$$\frac{1 + y_1}{1 + y_n} + \frac{1 + y_n}{1 + y_1} - 2 \leq \left(\frac{y_1 - y_n}{1 + a}\right)^2 = \left(\frac{(y_1 - a) - (y_n - a)}{1 + a}\right)^2 \leq \left(\frac{y_1 - a}{1 + a}\right)^2 + \left(\frac{y_n - a}{1 + a}\right)^2$$

$$\frac{1+y_2}{1+y_{n-1}} + \frac{1+y_{n-1}}{1+y_2} - 2 \le \left(\frac{y_2 - y_{n-1}}{1+a}\right)^2 \le \left(\frac{y_2 - a}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{y_{n-1} - a}{1+a}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\frac{1+y_n}{1+y_1} + \frac{1+y_1}{1+y_n} - 2 \le \left(\frac{y_n - y_1}{1+a}\right)^2 \le \left(\frac{y_n - a}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - a}{1+a}\right)^2$$

บวกเข้าด้วยกันได้

$$2\left(\frac{1+y_1}{1+y_n} + \frac{1+y_2}{1+y_{n-1}} + \cdots + \frac{1+y_n}{1+y_1}\right) - 2n \le 2\left(\left(\frac{y_1 - y_n}{1+a}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_{n-1}}{1+a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{y_n - y_1}{1+a}\right)^2\right)$$

จึงได้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1+y_j}{1+y_{n-j+1}} \le n + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}^{n} (y_j - a)^2$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1+x_j}{1+x_{j+1}} \le n + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^{n} (x_j - a)^2$$

โดยได้สมการ ก็ต่อเมื่อ $y_1 = \cdots = y_n = a$ กล่าวคือ ได้สมการ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = \cdots = x_n = a$

ตัวอย่าง 5.14 (USAMO 1988) สมการกำลังสาม $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ มีรากจริงทั้งสามราก จงแสดงว่า $a^2 - 3b \ge 0$ และ $\sqrt{a^2 - 3b} \le$ ผลต่างระหว่างรากที่มีค่าสูงสุดกับรากที่มีค่าต่ำสุด

วิธีทำ ให้รากทั้งสามเป็น $p \le q \le r$ ดังนั้น

$$a^2 - 3b = (-p - q - r)^2 - 3(pq + qr + rp) = p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp$$

โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง $pq + qr + rp \le p^2 + q^2 + r^2$

ซึ่งชี้ว่า $a^2 - 3b \ge 0$

อสมการที่สองเป็นจริงจากความสมมูลต่อไปนี้

$$\begin{aligned} a^2 - 3b \le (r-p)^2 &\iff p^2 + q^2 + r^2 - pq - qr - rp \le r^2 - 2rp + p^2 \\ &\iff 0 \le pq + qr - rp - q^2 \\ &\iff 0 \le (r-q)(q-p) \end{aligned}$$

ซึ่งอสมการท้ายนี้เป็นจริงอย่างชัดเจน

แบบฝึกหัด

1. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}_0$ จงแสดงว่า $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a$

2. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

3. ให้ $a_i > 0$ $(i = 1,\ldots, n)$ และ $s = a_1 + \cdots + a_n$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

4. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า

$$a + b + c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{c^2+a^2}{2b}$$

5. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

(5.1) $(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) \leq 3(a^5 + b^5 + c^5)$

(5.2) $(a^4 + b^4 + c^4)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$

6. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$

7. (Bulgarian MC 2002) จงพิสูจน์ว่า

(i) ถ้า $x > 0, y > 0$ แล้ว $\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{3x-y}{4}$

(ii) ถ้า $x > 0, y > 0, z > 0$ แล้ว $\frac{x^3}{x+y} + \frac{y^3}{y+z} + \frac{z^3}{z+x} \geq \frac{xy+yz+zx}{2}$

8. (Iranian MO) ให้ $w_1,\ldots, w_k$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน และมีผลบวกไม่เป็น 0
จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็ม $n_1,\ldots, n_k$ ที่ทำให้ $n_1w_1 + \cdots + n_kw_k > 0$ และสำหรับการเรียงสับเปลี่ยน π ของ $\{1, 2,\ldots, k\}$ ที่ไม่ใช่การเรียงสับเปลี่ยนเอกลักษณ์ แล้วเรามีว่า $n_1w_{\pi(1)} + \cdots + n_kw_{\pi(k)} < 0$

9. ให้ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ จงหาค่าต่ำสุดของ

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_3 + \cdots + x_n + x_1} + \cdots + \frac{x_n^5}{x_1 + \cdots + x_{n-1}}$$

เมื่อ $x_1,\ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

10. (Korean MO) ให้ $a, b, c, x, y, z, t \in \mathbb{R}$ สอดคล้องกับอสมการ $a \geq b \geq c > 0$ และ $x \geq y \geq z > 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a^2x^2}{(by+cz)(bz+cy)} + \frac{b^2y^2}{(cz+ax)(cx+az)} + \frac{c^2z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{3}{4}$$

บทที่ 6

พหุนามสมมาตร

ให้ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นตัวแปรอิสระ และ $g(x_1,\ldots, x_n)$ เป็นพหุนามในตัวแปรเหล่านี้ เรากล่าว g เป็น**พหุนามสมมาตร** ถ้ามันไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การเรียงสับเปลี่ยนใด ๆ ของตัวแปร $x_1,\ldots, x_n$ (เป็นที่ทราบกันดีว่าจำนวนการเรียงสับเปลี่ยนของ $x_1,\ldots, x_n$ มีทั้งสิ้น n! แบบ) ยกตัวอย่าง เช่น เมื่อ $n = 3$ พหุนาม $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ และ $x_1 + x_2 + x_3$ เป็นพหุนามสมมาตรในสามตัวแปรอิสระ x_1, x_2, x_3

พหุนามสมมาตรมีความสัมพันธ์อย่างใกล้ชิดกับรากของสมการพหุนาม ดังแสดงต่อไปนี้

ให้ t เป็นตัวแปรอีกตัวหนึ่ง และพิจารณาพหุนาม

$$F(t) = (t - x_1)(t - x_2)\ldots(t - x_n) = t^n - e_1t^{n-1} + e_2t^{n-2} - \cdots + (-1)^n e_n$$

จากการกระจาย พบว่า

$e_1 := e_1(x_1,\ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$e_2 := e_2(x_1,\ldots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$

$\cdots$

$e_i := e_i(x_1,\ldots, x_n) =$ ผลบวกของทุกพจน์ที่เป็นไปได้ ที่เป็นผลคูณของ x_j ที่แตกต่างกันจำนวน i ตัว

$\cdots$

$e_n := e_n(x_1,\ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$

พหุนาม e_i รู้จักกันในนาม **พหุนามสมมาตรมูลฐาน** (elementary symmetric polynomials) ที่ i ในสัญลักษณ์ $x_1, \ldots, x_n$

สังเกตว่า ถ้า $f(x_1,\ldots, x_n)$ และ $g(x_1,\ldots, x_n)$ เป็นพหุนามสมมาตร แล้วผลบวก $f(x_1,\ldots, x_n) + g(x_1,\ldots, x_n)$ และผลคูณ $f(x_1,\ldots, x_n)g(x_1,\ldots, x_n)$ ต่างก็เป็นพหุนามสมมาตรเช่นกัน กล่าวคือเซตของพหุนามสมมาตรปิดภายใต้การบวก และการคูณ

ผลเบื้องต้นที่สำคัญเกี่ยวกับพหุนามสมมาตร คือทฤษฎีบทต่อไปนี้ ซึ่งเป็นที่รู้จักกันในชื่อว่า

ทฤษฎีบทว่าด้วยพหุนามสมมาตรของ Newton

ทุกพหุนามสมมาตรใน $x_1,\ldots, x_n$ (ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง) สามารถเขียนได้เป็นพหุนาม (ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง) ในตัวแปร $e_1,\ldots, e_n$ (ซึ่งคือพหุนามสมมาตรมูลฐาน) นอกจากนี้ ถ้าสัมประสิทธิ์ของพหุนามสมมาตรแรกเป็นจำนวนเต็ม (หรือจำนวนตรรกยะ) แล้ว พหุนามหลังจะมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม (หรือจำนวนตรรกยะ) ด้วยเช่นกัน

พิสูจน์ เป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบท สำหรับพหุนามสมมาตรที่เป็นเอกพันธุ์ P ซึ่งคือ พหุนามสมมาตรที่เขียนได้เป็นผลบวกของพจน์ในรูป $h = a x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ ที่มีดีกรีรวม $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ เป็นค่าคงตัว

ทั้งนี้เพราะพหุนามสมมาตรใด ๆ เขียนได้เป็นผลบวกของกลุ่มของพหุนามสมมาตรเอกพันธุ์ที่มีดีกรีรวมแตกต่างกัน และผลบวกของพหุนามสมมาตรก็เป็นพหุนามสมมาตร นอกจากนี้ เรายังสมมุติได้ว่า ไม่มีสองพจน์ใด ๆ ในพหุนามสมมาตรเอกพันธุ์นี้ มีเลขชี้กำลัง $k_1, k_2,\ldots, k_n$ เป็นชุดเดียวกัน ทั้งนี้เพราะ เราสามารถรวมพจน์เช่นว่านี้เข้าด้วยกันได้

เรานิยามการจัดอันดับ (แบบพจนานุกรม) ระหว่างพจน์ของ P ได้ โดยกล่าวว่า พจน์ h อยู่สูงกว่าพจน์ $h' = b x_1^{j_1} x_2^{j_2} \cdots x_n^{j_n}$ (หรือ h' ต่ำกว่า h) เมื่อเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง $k_1 > j_1$ หรือ $k_1 = j_1$ แต่ $k_2 > j_2$ หรือในกรณีทั่วไป $k_1 = j_1,\ldots, k_{i-1} = j_{i-1}$ แต่ $k_i > j_i$ สำหรับบาง $i \le n$ (ยกตัวอย่างเช่น พจน์สูงสุดในพหุนามสมมาตรมูลฐาน $e_1, e_2,\ldots, e_n$ คือ $x_1, x_1x_2, \ldots, x_1x_2\cdots x_n$ ตามลำดับ)

สมมุติว่า h เป็นพจน์สูงสุดของ P ดังนั้นจากความเป็นพจน์สูงสุดของพหุนามสมมาตรได้ว่า $k_1 \ge k_2 \ge \cdots \ge k_n$ (เพราะไม่เช่นนั้น จะมีการเรียงสับเปลี่ยนของ $x_1,\ldots, x_n$ ที่ให้พจน์สูงกว่า)

สังเกตด้วยว่า ถ้า P' เป็นพหุนามสมมาตรเอกพันธุ์ใน $x_1,\ldots, x_n$ อีกพหุนามหนึ่ง ที่มี h' เป็นพจน์สูงสุด แล้ว hh' เป็นพจน์สูงสุดของพหุนามสมมาตรเอกพันธุ์ผลคูณ PP' และจากนี้ได้ด้วยว่าผลนี้เป็นจริงสำหรับ ผลคูณของพหุนามสมมาตรเอกพันธุ์จำนวนจำกัดใด ๆ ด้วย (ยกตัวอย่างเช่น พจน์สูงสุดของผลคูณ $e_1^{a_1} e_2^{a_2} \cdots e_n^{a_n}$ คือ $x_1^{a_1+a_2+\cdots+a_n} x_2^{a_2+\cdots+a_n} \cdots x_n^{a_n}$

จากข้อสังเกตข้างต้น เราได้ว่าพจน์สูงสุดของ $Q = a e_1^{k_1-k_2} e_2^{k_2-k_3} \cdots e_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} e_n^{k_n}$ คือ h ดังนั้น $P_1 = P - Q$ ต้องเป็น 0 หรือไม่ก็เป็นพหุนามสมมาตรเอกพันธุ์ ที่มีดีกรีรวมเท่ากับของ P (คือเป็น k) แต่มีพจน์สูงสุดเป็น h_1 ที่ต่ำกว่า h

เมื่อใช้ข้อโต้แย้งนี้ซ้ำ ๆ จะได้ผลคูณ Q_1 ของบรรดา e_i ที่มีพจน์สูงสุดเป็น h_1 ดังนั้น $P_1 - Q_1$ เป็น 0 หรือไม่ก็เป็นพหุนามสมมาตรเอกพันธุ์ที่มีดีกรีรวมเป็น k และพจน์สูงสุดเป็น h_2 ที่ต่ำกว่า h_1

เนื่องจากมีเพียงผลคูณของกำลังของ $x_1,\ldots, x_n$ ที่มีดีกรีรวมเป็น k เป็นจำนวนจำกัด การดำเนินการเช่นข้างต้นจะต้องจบสิ้น และ $P_m - Q_m = 0$ สำหรับบาง m ซึ่งให้ว่า $P = Q + Q_1 + \cdots + Q_m$ แสดงว่า P เป็นพหุนามในสัญลักษณ์ $e_1,\ldots, e_n$ สังเกตด้วยว่า สัมประสิทธิ์ของ Q_i เป็นจำนวนจริง เช่นเดียวกันกับในพหุนามแรกเริ่ม P

นอกจากนี้ เห็นชัดเจนว่า ถ้าสัมประสิทธิ์ของ P เป็นจำนวนเต็ม (หรือจำนวนตรรกยะ) แล้ว แต่ละ Q_i มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม (หรือจำนวนตรรกยะ) ด้วยเช่นกัน เป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทว่าด้วยพหุนามสมมาตรของ Newton □

อสมการสำคัญสองอสมการ ที่เกี่ยวข้องกับพหุนามสมมาตร คืออสมการของ Newton และ อสมการของ Maclaurin ซึ่งบรรยายได้ดังนี้ ให้ E_j เป็นพหุนามสมมาตรมูลฐานที่ทำให้เป็นปรกติแล้ว กล่าวคือเขียนได้ในรูป

$$E_0 = 1, \quad Ej := E_j(x_1,\ldots, x_n) = \frac{e_j}{\binom{n}{j}} \qquad (j = 1,\ldots, n)$$

ดังนั้น **อสมการของ Newton ว่าด้วยพหุนามสมมาตร** กล่าวว่า เมื่อ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$E_j^2 \geq E_{j-1}E_{j+1} \ (j = 1,\ldots, n-1 \ ; n \geq 2) \qquad (6.1)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = \cdots = x_n$ หรือทั้งสองข้างของอสมการเป็นศูนย์

อสมการของ **Maclaurin** ว่าด้วยพหุนามสมมาตร กล่าวว่า

$$E_1 \geq E_2^{1/2} \geq E_3^{1/3} \geq \cdots \geq E_3^{1/n}$$

เนื่องจาก $E_0 = 1$ โดยการอุปนัย เห็นได้ชัดเจนว่า อสมการของ Maclaurin เป็นผลตามมาโดยตรงจากอสมการของ Newton ดังนั้น จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์เพียงอสมการของ Newton ก่อนที่จะทำการพิสูจน์ เราจะพิสูจน์ผลย่อยที่จำเป็นก่อน

สังเกตว่าถ้า $x_1 = \cdots = x_n = x$ แล้ว $E_j = x^j$ และเมื่อใช้นิยามข้างต้น ได้

$$F(t) = (t - x_1)(t - x_2)\cdots(t - x_n) = t^n - e_1t^{n-1} + e_2t^{n-2} - \cdots + (-1)^ne_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}E_j(x_1,\ldots, x_n)\, t^{n-j}$$

ให้ $Q(t) = \frac{1}{n}F'(t)$ เมื่อ $F'(t)$ คืออนุพันธ์ของ $F(t)$ และให้ $y_1,\ldots, y_{n-1}$ เป็นรากทั้งหมดของ Q
ดังนั้น โดยนิยามของพหุนามสมมาตรมูลฐาน ได้

$$Q(t) = (t - y_1)\cdots(t - y_{n-1}) = t^{n-1} - \binom{n-1}{1} E_1(y_1,\ldots, y_{n-1})t^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}E_{n-1}(y_1,\ldots, y_{n-1})$$

ในขณะที่ เมื่อใช้ความเป็นอนุพันธ์ ได้

$$Q(t) = \frac{1}{n}F'(t) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j\frac{n-j}{n}\binom{n}{j}E_j(x_1,\ldots, x_n)\, t^{n-j-1}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$E_j(x_1,\ldots, x_n) = E_j(y_1,\ldots, y_{n-1}) \qquad (j = 1,\ldots, n-1) \qquad (6.2)$$

การพิสูจน์อสมการของ Newton ว่าด้วยพหุนามสมมาตร เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัย
กรณี $n = 2$ อสมการที่ต้องการพิสูจน์มีรูปเป็น $(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1x_2$ ซึ่งเห็นชัดจากการกระจายว่าเป็นจริง และเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$

พิจารณา $n > 2$ และสมมุติว่าอสมการของ Newton ได้รับการพิสูจน์มาแล้ว สำหรับทุก $(n-1)$-อันดับของจำนวนจริง จาก (6.2) ได้ว่า $E_j(x_1,\ldots, x_n) = E_j(y_1,\ldots, y_{n-1})$ $(j = 1,\ldots, n-1)$ เมื่อ $y_1,\ldots, y_{n-1}$ เป็นรากของ $F'(t)$ เนื่องจาก $x_1,\ldots, x_n$ เป็นรากจริงของพหุนาม $F(t)$ โดยทฤษฎีบทของ Rolle ว่าด้วยรากของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ พบว่า ราก $y_1,\ldots, y_{n-1}$ ทั้งหมดแทรกอยู่ระหว่างราก $x_1,\ldots, x_n$ และ ราก $y_1,\ldots, y_{n-1}$ ไม่เหมือนกันทั้งหมด ถ้า $x_1,\ldots, x_n$ ไม่เหมือนกันทั้งหมด ดังนั้นโดยสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ว่าอสมการของ Newton เป็นจริงสำหรับ $E_1(y_1,\ldots, y_{n-1}),\ldots, E_{n-1}(y_1,\ldots, y_{n-1})$ เมื่อพิจารณาร่วมกับ (6.2) ได้ว่า (6.1) เป็นจริงสำหรับ $j = 1,\ldots, n-2$ และเป็นอสมการแท้ ถ้าไม่ทุก x_i เท่ากัน และทั้งสองข้างของอสมการไม่เป็นศูนย์ เราเหลือต้องตรวจ ณ $j = n-1$ ซึ่งคือ

$$E_{n-1}^2(x_1,\ldots, x_n) \geq E_{n-2}(x_1,\ldots, x_n)\, E_n(x_1,\ldots, x_n) \qquad (6.3)$$

โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $x_1 = \cdots = x_n$ หรือทั้งสองข้างของอสมการ (6.3) เป็นศูนย์

เพื่อการนี้สังเกตว่า $E_n(x_1,\ldots, x_n) = x_1\cdots x_n$ ถ้าบาง $x_i = 0$ แล้ว (6.3) เป็นจริงอย่างชัดเจน เพราะค่าทางขวามือเป็น 0 อย่างไรก็ตาม $E_{n-1}(x_1,\ldots, x_n)$ จะเป็น 0 ด้วย ถ้ามีบาง $x_k = 0$ ด้วยเช่นกันโดยที่ $k \neq i$ ทำให้ได้ว่า (6.3) เป็นจริงแบบอสมการแท้ หรือไม่ก็แบบ $0 = 0$ จากนี้ไปสมมุติว่าทุก $x_i \neq 0$ ให้ $x_i' = \dfrac{1}{x_i}$ ดังนั้น

$$\frac{E_j(x_1,\ldots, x_n)}{E_n(x_1,\ldots, x_n)} = E_{n-j}(x_1',\ldots, x_n') \qquad (6.4)$$

การพิสูจน์ (6.3) ทำได้โดยการหารตลอดด้วย $E_n^2(x_1,\ldots,x_n)$ แล้วใช้ (6.4) พบว่าอสมการที่ได้สมมูลกับ $E_1^2(x_1',\ldots, x_n') \geq E_2(x_1',\ldots, x_n')$ ซึ่งอสมการสุดท้ายนี้ พบมาก่อนหน้าแล้วว่าเป็นจริง เมื่อ $n > 2$ โดยเป็นอสมการแท้ เพราะไม่ทุก x_i' เท่ากัน (ซึ่งสมมูลกับไม่ทุก x_i เท่ากัน) เว้นแต่ว่าทั้งสองข้างลดรูปเป็น $0 = 0$ เป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์ □

ในอสมการที่มีนิพจน์เป็นพหุนามสมมาตรในสัญลักษณ์จำนวนจำกัดจำนวนหนึ่ง เนื่องจากการเรียงสับเปลี่ยนของสัญลักษณ์เหล่านี้ ไม่ทำให้นิพจน์แปรเปลี่ยนไปแต่อย่างใด ดังนั้น **เทคนิคหนึ่งที่มีประโยชน์บ่อยครั้งในการแก้โจทย์อสมการประเภทนี้ คือการเรียงลำดับสัญลักษณ์เหล่านี้อย่างเหมาะสม เช่นเรียงจากน้อยไปมาก หรือมากไปน้อย** การกระทำเช่นว่านี้อาจทำให้การพิสูจน์ทำได้ง่าย และสั้นขึ้น ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.1 (อสมการของ Schur) ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบ ดังนั้นสำหรับทุกจำนวนจริงบวก r ได้ว่า

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x = y = z$ หรือ สองจำนวนจาก x, y, z มีค่าเท่ากัน และจำนวนที่สามเป็น 0

วิธีทำ เนื่องจากอสมการที่ต้องการมีความสมมาตรในตัวแปรทั้งสาม เราสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปได้ว่า $x \geq y \geq z$ และเขียนอสมการที่ต้องการพิสูจน์เสียใหม่เป็น

$$(x-y)\{x^r(x-z) - y^r(y-z)\} + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

อสมการท้ายนี้เห็นชัดเจนว่า เป็นจริง จากการเรียงลำดับของ x, y, z

ตัวอย่าง 6.2 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

วิธีทำ เนื่องจากนิพจน์ในอสมการที่ต้องการพิสูจน์ ทั้งสองข้างเป็นพหุนามสมมาตรใน a, b, c เราสามารถสมมุติได้ว่าจำนวนทั้งสามเรียงกันในรูป $a \geq b \geq c$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca &\Leftrightarrow a(a-b) + b(b-c) + c(c-a) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a(a-b) + b(b-c) - c(a-b+b-c) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow a(a-b) + b(b-c) - c(a-b) - c(b-c) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-c)(a-b) + (b-c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

อสมการท้ายนี้เห็นชัดเจนว่าเป็นจริงจากสมมุติฐานข้างต้น

ตัวอย่าง 6.3 (Canadian MO 1992) ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$x(x-z)^2 + y(y-z)^2 \geq (x-z)(y-z)(x+y-z)$$

และถามด้วยว่าอสมการ เป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ เมื่อคูณกระจาย แล้วจัดรูป อสมการกลายเป็น

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq z(x^2 + y^2) + y(x^2 + z^2) + x(y^2 + z^2) - 3xyz$$

ถ้า x, y, z ตัวใดตัวหนึ่งเป็น 0 แล้ว อสมการเป็นจริงอย่างชัดเจน ถ้า $xyz > 0$ แล้วโดยความสมมาตร สามารถสมมุติได้ว่า $0 < x \leq z \leq y$ ดังนั้นอสมการดั้งเดิม เป็นจริง เพราะค่าทางซ้ายมือไม่ติดลบ ในขณะที่ค่าทางขวามือไม่เป็นบวก

ตัวอย่าง 6.4 ให้ $s_k(a_1,\ldots,a_n)$ เป็นพหุนามสมมาตรมูลฐานที่ k ในตัวแปร $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เมื่อตรึงค่า k และแปร n ($\geq k$) ไปเหนือจำนวนนับ และแปร $a_1,\ldots, a_n$ ไปเหนือจำนวนจริงบวก จงหาค่าขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ

$$\frac{s_k(a_1,a_2,\ldots,a_n)}{\{s_1(a_1,a_2,\ldots,a_n)\}^k}$$

วิธีทำ เมื่อกระจาย $s_1^k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^k$ พบว่า ทุกพจน์ของ s_k ปรากฏพร้อมด้วยสัมประสิทธิ์ k! ในขณะที่พจน์อื่น มีสัมประสิทธิ์ไม่ติดลบ ดังนั้น $\dfrac{s_k}{s_1^k} \leq \dfrac{1}{k!}$

ถ้าแทนค่า ทุก $a_i = 1$ ได้

$$\frac{s_k}{s_1^k} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{1}{k!n^k}n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \to \frac{1}{k!} \quad (n \to \infty)$$

เพราะฉะนั้น ขอบเขตบนค่าน้อยสุด ที่ต้องการคือ $\dfrac{1}{k!}$

ตัวอย่าง 6.5 (IMO 1971) จงพิสูจน์ว่า ประพจน์ต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับ n = 3 และ n = 5 และไม่เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n > 2$: ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n) + (a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n) + \cdots + (a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1}) \geq 0$$

วิธีทำ ให้ $A_n := (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\cdots(a_1 - a_n) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\cdots(a_2 - a_n) + \cdots + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})$

กรณี $n = 3$ โดยความสมมาตร เราสามารถสมมุติได้ว่า $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ดังนั้น

$$A_3 = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$$
$$= (a_1 - a_2)\{(a_1 - a_3) - (a_2 - a_3)\} + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = (a_1 - a_2)^2 + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geq 0$$

กรณี $n = 5$ โดยความสมมาตร เราสามารถสมมุติได้ว่า $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$ จากสองพจน์แรกของ A_5 เราแยกตัวประกอบ $a_1 - a_2 \geq 0$ ออกมา แล้วเขียนผลบวกเป็น

$$(a_1 - a_2)\{(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5) - (a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_2 - a_5)\}$$

ผลต่างในวงเล็บไม่ติดลบ เนื่องจากพจน์แรกในแต่ละตัวประกอบมีค่าไม่น้อยกว่าพจน์ที่สอง ในทำนองเดียวกัน เขียนผลบวกของสองพจน์สุดท้ายของ A_5 เป็น

$$(a_4 - a_5)\{(a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3) + (a_1 - a_5)(a_2 - a_5)(a_3 - a_5)\}$$
$$= (a_4 - a_5)\{(a_1 - a_5)(a_2 - a_5)(a_3 - a_5) - (a_1 - a_4)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)\}$$

และสังเกตว่า นิพจน์นี้ไม่เป็นลบ ส่วนพจน์ที่สามของ A_5 คือ $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)$ สังเกตว่าสองตัวประกอบหลังไม่เป็นลบ สองพจน์แรกไม่เป็นบวก จึงให้ว่าพจน์นี้ไม่เป็นลบ

การพิสูจน์ว่า ประพจน์เป็นเท็จสำหรับจำนวนนับ $n > 2$ จำนวนอื่น เพียงพอที่จะแสดงว่า มีกลุ่มของ a_i กลุ่มหนึ่งที่ทำให้ประพจน์เป็นเท็จ ในกรณีที่ n เป็นคู่ เมื่อแทนแต่ละ a_i ด้วย $-a_i$ จะได้ว่า

$$A_n(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n) = -A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

ซึ่งมีค่าตรงข้ามกัน ดังนั้น จึงเป็นไปไม่ได้ที่ $A_n \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนนับคู่ ในกรณีที่ n เป็นจำนวนคี่ > 5 เราใช้ค่าต่อไปนี้

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-4} = 0, \quad a_{n-3} = 1, \quad a_{n-2} = a_{n-1} = a_n = 2$$

ซึ่งให้ว่าทุกพจน์ของ A_n ยกเว้นพจน์ที่ $n - 3$ เป็นศูนย์ และ $A_n = 1^{n-4}(1 - 2)^3 = -1 < 0$

ตัวอย่าง 6.6 ให้ $a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

$$\min_{i \neq j} (a_i - a_j)^2 \leq \frac{12}{n(n^2 - 1)}(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$$

วิธีทำ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติว่า $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ และ โดยความเป็นสมมาตรของโจทย์ สามารถสมมุติเพิ่มเติมได้ว่า

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 = 1$$

พิจารณา

$$(a_i - a_j)^2 = [(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \cdots + (a_1 - a_n)^2] + [(a_2 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 + \cdots + (a_2 - a_n)^2] + [(a_{n-1} - a_n)^2]$$
$$= [(a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2) + (a_1^2 - 2a_1a_3 + a_3^2) + \cdots + (a_1^2 - 2a_1a_n + a_n^2)]$$
$$+ [(a_2^2 - 2a_2a_3 + a_3^2) + (a_2^2 - 2a_2a_4 + a_4^2) + \cdots + (a_2^2 - 2a_2a_n + a_n^2)]$$
$$+ \cdots + [(a_{n-1}^2 - 2a_{n-1}a_n + a_n^2)]$$
$$= (n - 1)[a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2] - 2[a_1a_2 + \cdots + a_ia_j + \cdots + a_{n-1}a_n]$$

$$= n[\, a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \,] - [a_1 + \cdots + a_n]$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \qquad (6.6.1)$$

สมมุติว่า $a_{i+1} - a_i > \sqrt{\dfrac{12}{n(n^2-1)}}$ $\quad (i = 1,\ldots, n-1)$

ดังนั้น $(a_j - a_i)^2 > \dfrac{12}{n(n^2-1)}(i-j)^2$ $\quad (i, j = 1,\ldots, n)$

และ $$\sum_{1\le i<j\le n}(a_i - a_j)^2 > \frac{12}{n(n^2-1)}\left(\sum_{1\le i<j\le n}(i-j)^2\right) = \frac{12}{n(n^2-1)}\cdot\frac{n^2(n^2-1)}{12} = n$$

สังเกตว่า $$\sum_{1\le i<j\le n}(i-j)^2 = (1-2)^2 + (1-3)^2 + \cdots + (1-n)^2$$

$$+ (2-3)^2 + (2-4)^2 + \cdots + (2-n)^2 + \cdots + (n-1-n)^2$$

$$= [\, 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 \,] + [\, 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-2)^2 \,] + \cdots + 1^2$$

$$= (n-1)1^2 + (n-2)2^2 + \cdots + (n-(n-1))(n-1)^2$$

$$= n[\, 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 \,] - [\, 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3 \,]$$

$$= n\left(\frac{n-1}{6}\right)n(2n-1) - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2$$

$$= \frac{n^2}{12}[\, 2(n-1)(2n-1) - 3(n-1)^2 \,] = \frac{n^2}{12}(n^2-1)$$

แทนค่าสิ่งนี้ใน (6.6.1) ได้

$$n < n\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le n\sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

กล่าวคือ $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 1$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานข้างต้น เพราะฉะนั้น ข้อสรุปของโจทย์เป็นจริง

ตัวอย่าง 6.7 (IMO 1994) ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และให้ $a_1, a_2, \ldots, a_m$ เป็นสมาชิกที่แตกต่างกันของ $\{1, 2, \ldots, n\}$ ที่มีสมบัติว่า เมื่อใดที่ $a_i + a_j \le n$ สำหรับบาง i, j, $1 \le i \le j \le m$ แล้วจะมี k, $1 \le k \le m$ ที่ทำให้ $a_i + a_j = a_k$

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \dfrac{1}{2}(n+1)$

วิธีทำ จัดเรียง $a_1, a_2, \ldots, a_m$ จากน้อยไปมาก เป็น $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$

เราจะแสดงก่อนว่า $a_j + a_{m+1-j} \ge n + 1$ สำหรับทุก j, $1 \le j \le m$ สมมุติว่าสิ่งนี้ไม่จริง ดังนั้น $a_j + a_{m+1-j} \le n$ สำหรับบาง j ซึ่งให้ว่า $a_1 + a_{m+1-j} < a_2 + a_{m+1-j} < \ldots < a_j + a_{m+1-j} \le n$

โดยสมมุติฐาน จะได้ว่าแต่ละพจน์ในลำดับนี้มีค่าเป็นบาง a_k แสดงว่า เราพบจำนวน j จำนวนที่แตกต่างกัน

เนื่องจาก $a_{k_1} = a_1 + a_{m+1-j} > a_{m+1-j}$ ดังนั้น $a_{k_1} \geq a_{m+2-j}$ และ $a_j + a_{m+1-j} = a_{k_2} \leq a_m$
ดังนั้นจำนวนในรูป a_k ทั้ง j จำนวนนี้มีค่าอยู่ในเซต $\{a_{m+2-j}, \ldots, a_m\}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะมีเพียง $j-1$ จำนวน ในช่วงตังกล่าว จากข้อมูลที่ได้รับ เมื่อบวกเหนือ j จะได้ $2(a_1 + a_2 + \ldots + a_m) \geq m(n+1)$ กล่าวคือ

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \geq \frac{1}{2}(n+1) \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 6.8 (USAMO 1974) จงพิสูจน์ว่า ถ้า a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$$

วิธีทำ ก่อนอื่น เราจะแสดงว่า ถ้า $x > 0, y > 0$ แล้ว

$$x^x y^y \geq x^y y^x \tag{6.8.1}$$

โดยความสมมาตร เราสามารถสมมุติได้ โดยไม่เสียนัยทั่วไปได้ว่า $x \geq y$
ดังนั้น (6.8.1) สมมูลกับ $\left(\frac{x}{y}\right)^{x-y} \geq 1$ ซึ่งเห็นชัดว่าเป็นจริง โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $x = y$
กลับไปที่อสมการที่ต้องการ โดยความสมมาดรของโจทย์ สามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปได้เช่นกันว่า $a \geq b \geq c$ เมื่อใช้ (6.8.1) ซ้ำสามครั้งได้

$$a^a b^b \geq a^b b^a, \quad b^b c^c \geq b^c c^b, \quad c^c a^a \geq c^a a^c$$

คูณอสมการทั้งสาม ได้

$$(a^a b^b c^c)^2 \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}$$

จากนี้คูณตลอดด้วย $a^a b^b c^c$ แล้วยกกำลัง $\frac{1}{3}$ จะได้อสมการที่ต้องการ โดยได้เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a = b = c$

ตัวอย่าง 6.9 (USAMO 1983) จงพิสูจน์ว่ารากของสมการ $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ จะเป็นจำนวนจริงทุกรากไม่ได้ ถ้า $2a^2 < 5b$

วิธีทำ ให้รากทั้งหมดเป็น $r_1, \ldots, r_5$ โดยเอกลักษณ์ว่าด้วยพหุนามสมมาตรมูลฐาน ได้

$$-a = r_1 + \cdots + r_5, \quad b = (r_1r_2 + \cdots + r_1r_5) + (r_2r_3 + \cdots + r_2r_5) + \cdots + r_4r_5$$

ดังนั้น $2a^2 - 5b < 0$ สมมูลกับ $2(r_1 + \cdots + r_5)^2 - 5\{(r_1r_2 + \cdots + r_1r_5) + (r_2r_3 + \cdots + r_2r_5) + \cdots + r_4r_5\} < 0$
กล่าวคือ $\sum_{i<j}(r_i - r_j)^2 < 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ถ้าทุกรากเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 6.10 จงหาค่าสูงสุดของผลบวก $\sum_{i<j} x_i x_j (x_i + x_j)$ เหนือทุก n-อันดับ $(x_1, \ldots, x_n)$ ที่มีสมบัติว่า

$$x_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

วิธีทำ โดยความสมมาตร ได้ว่า $\sum_{i<j} x_i x_j (x_i + x_j) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} x_i x_j (x_i + x_j) = \sum_{i\neq j} x_i^2 x_j$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติได้ว่า $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$

ให้ $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ..., $y_{n-2} = x_{n-2}$, $y_{n-1} = x_{n-1} + x_n$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\sum_{i\neq j} y_i^2 y_j - \sum_{i\neq j} x_i^2 x_j &= y_1^2(y_2 + \cdots + y_{n+1}) + y_2^2(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + \cdots + y_{n-2}^2(y_1 + \cdots + y_{n-3} + y_{n-1}) \\
&\quad + y_{n-1}^2(y_1 + \cdots + y_{n-2}) - x_1^2(x_2 + \cdots + x_n) - x_2^2(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) - \cdots \\
&\quad - x_{n-2}^2(x_1 + \cdots + x_{n-3} + x_{n-1} + x_n) - x_{n-1}^2(x_1 + \cdots + x_{n-2} + x_n) - x_n^2(x_1 + \cdots + x_{n-1}) \\
&= y_{n-1}^2(y_1 + \cdots + y_{n-2}) - x_{n-1}^2(x_1 + \cdots + x_{n-2} + x_n) - x_n^2(x_1 + \cdots + x_{n-1}) \\
&= (x_{n-1}^2 + 2x_{n-1}x_n + x_n^2)(x_1 + \cdots + x_{n-2}) - x_{n-1}^2(x_1 + \cdots + x_{n-2} + x_n) \\
&\quad - x_n^2(x_1 + \cdots + x_{n-2} + x_{n-1}) \\
&= 2x_{n-1}x_n(x_1 + \cdots + x_{n-2}) - x_{n-1}^2 x_n - x_n^2 x_{n-1} \\
&= x_{n-1}x_n(x_1 - x_{n-1}) + x_{n-1}x_n(x_1 - x_n) + 2x_{n-1}x_n(x_2 + \cdots + x_{n-2}) \geq 0
\end{aligned}$$

สิ่งนี้แสดงว่า ในบรรดาเซตที่มีสมาชิกอย่างน้อยสามตัว ในการหาค่าสูงสุด เราสามารถลดทอนการพิจารณาลงมายังเซตที่มีสมาชิกน้อยลงหนึ่งตัวไต้เสมอ เพราะฉะนั้น โจทย์เดิมจึงลดทอนลงเป็นการหาค่าสูงสุดของนิพจน์ $x_1x_2(x_1 + x_2)$ (ซึ่งคือกรณี n = 2) ค่าสูงสุดของนิพจน์นี้หาได้โดยง่ายเป็น $\frac{1}{4}$

ตัวอย่างต่อไปเป็นการผสมผสานกันอย่างมีประสิทธิภาพของ ความสมมาตร กับอสมการว่าด้วยการจัดเรียง และ อสมการ Chebyshev

ตัวอย่าง 6.11 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}}{2}$$

วิธีทำ เนื่องจากอสมการที่ต้องการมีความสมมาตรในตัวแปร จึงสมมุติได้ว่า $a \geq b \geq c$

ดังนั้น ลำดับ $\{a^n, b^n, c^n\}$ และลำดับ $\left\{\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}\right\}$ เรียงไปในทิศทางเดียวกัน

โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียงได้ว่า

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^n}{a+b} + \frac{b^n}{b+c} + \frac{c^n}{c+a}$$

และ

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^n}{c+a} + \frac{b^n}{a+b} + \frac{c^n}{b+c}$$

เมื่อบวกอสมการทั้งสองนี้เข้าด้วยกัน ได้

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{a^n+b^n}{a+b}+\frac{b^n+c^n}{b+c}+\frac{c^n+a^n}{c+a}\right)$$

สังเกตว่า จากอสมการ Chebyshev เราได้ว่า เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนนับ แล้ว

$$\frac{x^n+y^n}{2} \geq \frac{x^{n-1}+y^{n-1}}{2}\cdot\frac{x+y}{2}$$

กล่าวคือ $\frac{x^n+y^n}{x+y} \geq \frac{x^{n-1}+y^{n-1}}{2}$

เมื่อประยุกต์อสมการท้ายนี้ กับสิ่งที่ได้ข้างต้น จะได้

$$\frac{a^n}{b+c}+\frac{b^n}{c+a}+\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2a^{n-1}+2b^{n-1}+2c^{n-1}}{2}\right)$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 6.12 ให้ $0 \leq a, b, c \leq 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab} \leq 2$$

วิธีทำ โดยความสมมาตร สามารถสมมุติได้ว่า $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$ ซึ่งให้ว่า $0 \leq (1-a)(1-b)$

กล่าวคือ $a + b \leq 1 + ab \leq 1 + 2ab$

และจากนี้ $a + b + c \leq a + b + 1 \leq 2 + 2ab = 2(1 + ab)$

ดังนั้น

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ac}+\frac{c}{1+ab} \leq \frac{a}{1+ab}+\frac{b}{1+ab}+\frac{c}{1+ab} \leq \frac{a+b+c}{1+ab} \leq 2$$

ตัวอย่าง 6.13 ให้ n เป็นจำนวนนับ > 2 และ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบ จงพิสูจน์ว่า

$$(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}+\frac{1}{n}\sum_{i<j}\left|x_i-x_j\right| \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

วิธีทำ โดยความสมมาตรของโจทย์ สามารถสมมุติได้ว่า $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$ ซึ่งให้ว่าจุด $x_1,\ldots, x_n$ ทั้งหมดอยู่ในช่วง $[x_n, x_1]$ แสดงว่า $|x_i - x_j| \leq |x_n - x_1|$

นอกจากนี้ เรามีว่า

$$|x_1 - x_k| + |x_k - x_n| = x_1 - x_n \text{ เมื่อ } k = 2,\ldots, n-1$$

ซึ่งให้ว่า $\sum_{i<j}\left|x_i-x_j\right| \geq (n-1)(x_1-x_n)$

เนื่องจาก $(x_1\cdots x_n)^{1/n} \geq x_n$ การพิสูจน์อสมการของโจทย์ จึงเพียงพอที่จะแสดงว่า

$$x_n+\frac{1}{n}(n-1)(x_1-x_n) \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$$

ซึ่งสมมูลกับ $(n-1)x_1 \geq x_1 + \cdots + x_{n-1}$
อสมการท้ายนี้เป็นจริงอย่างชัดเจน จากสมมุติฐานในการเรียงตั้งแต่แรก

ตัวอย่าง 6.14 (Irish MO 1992) ให้ $n \in \mathbb{N}$, $a_1,\ldots, a_n, b_1,\ldots, b_n \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$(a_1\cdots a_n)^{1/n} + (b_1\cdots b_n)^{1/n} \leq \{(a_1 + b_1)\cdots(a_n + b_n)\}^{1/n}$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $\frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$

วิธีทำ โดยการหารตลอดด้วย $(a_1\cdots a_n)^{1/n}$ จึงเป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์อสมการของโจทย์ในกรณีที่ ทุก $a_i = 1$ กล่าวคือ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ สมมูลกับ

$$1 + (x_1\cdots x_n)^{1/n} \leq \{(1 + x_1)\cdots(1 + x_n)\}^{1/n}$$

เมื่อ $x_1,\ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$ โดยได้เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = \cdots = x_n$

เห็นได้ชัดว่า อสมการเป็นสมการ เมื่อ $x_1 = \cdots = x_n$ หรือ $n = 1$ ดังนั้น จากนี้ไปให้ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่ไม่ทุกตัวเท่ากัน และ $n > 1$ ให้ $A = \{(1 + x_1)\cdots (1 + x_n)\}^{1/n} - 1$ เราจะแสดงว่า

$$x_1x_2\cdots x_n < A^n$$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติว่า x_1 เป็นจำนวนที่มีค่ามากที่สุด และ x_2 เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุด ในบรรดา $x_1,\ldots, x_n$ เราจะแทน x_1 และ x_2 ด้วยค่าใหม่ แต่ x_i ตัวอื่นคงเดิม ในลักษณะที่ทำให้ค่าทางซ้ายมือของอสมการเพิ่มขึ้น แต่ A ยังคงเดิม

เพื่อการนี้ แทน x_1 ด้วย A และ x_2 ด้วย y โดยเลือก y ที่ทำให้

$$(1 + A)(1 + y)(1 + x_3)\cdots(1 + x_n) = (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)\cdots(1 + x_n)$$

กล่าวคือ เลือก

$$y = \frac{(x_1 + x_2 + x_1x_2 - A)}{1 + A}$$

เนื่องจากเราสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่า $x_2 < A < x_1$ ดังนั้น $y > 0$
นอกจากนี้ เรามีว่า

$$x_1x_2\cdots x_n < Ayx_3\cdots x_n$$

(ทั้งนี้เพราะ $x_1x_2 < Ay \Leftrightarrow x_1x_2 < A(x_1 + x_2 - A) \Leftrightarrow (A - x_1)(A - x_2) < 0$ ซึ่งเป็นจริงเสมอ)
ใช้กระบวนการ เช่นที่บรรยายข้างต้น กับอสมการใหม่นี้ ทำซ้ำ ๆ ในที่สุดจะได้ว่านิพจน์ทางซ้ายมือมีค่าเพิ่มขึ้นจนในที่สุดเป็น A^n สรุปได้ว่า $x_1x_2\cdots x_n < A^n$ ถ้าไม่ทุก x_i มีค่าเท่ากัน ตามต้องการ

แบบฝึกหัด

1. จำนวนจริง b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง [1, 2] จงหาค่าสูงสุดของนิพจน์

$$\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}+\frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3}+\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{b_1+b_2+b_3+b_4}+\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}$$

2. กำหนดให้พหุนามโมนิก $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ มีดีกรี $n > 1$ และมีรากทั้ง n รากเป็นจำนวนจริงลบที่แตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า $a_1P(1) > 2n^2a_0$

3. ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า

$$\min\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\} \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

4. ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนนับ และ $x, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ สอดคล้องกับอสมการ

$$(n-1)(x+y_1^2+\cdots+y_n^2) < (y_1+\cdots+y_n)^2$$

จงแสดงว่า ถ้า $1 \leq i < j \leq n$ แล้ว $x < 2y_iy_j$

5. ถ้า $x, y, x \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

6. ให้พหุนาม $ax^2 + bx + c$ มีค่าสัมประสิทธิ์ $a > 0$ และรากทั้งสอง x_1, x_2 เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a + b + c \geq 0, a - b + c \geq 0, a - c \geq 0$ แล้ว $|x_i| \leq 0$ $(i = 1, 2)$

7. ให้ $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^+$ $(k \geq 4)$ จงแสดงว่า

$$\frac{x_1}{x_k+x_2}+\frac{x_2}{x_1+x_2}+\cdots+\frac{x_k}{x_{k-1}+x_1} \geq 2$$

ถามว่าค่าคงตัว 2 ทางขวามือ สามารถแทนได้ด้วยจำนวนที่มีค่าน้อยลงได้หรือไม่

8. (Canadian MO) ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}_0$ มีสมบัติว่า $x + y + z = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$x^2y+y^2z+z^2x \leq \frac{4}{27}$$

9. (Iranian MO) ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

10. (Romanian MC) ให้ $x_1,\ldots, x_n$ เป็นจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน จงพิสูจน์ว่า

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq \frac{(2n+1)(x_1 + \cdots + x_n)}{3}$$

11. ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R}_0$ สอดคล้องกับสมการ

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16$$

จงพิสูจน์ว่า $a + b + c + d \geq \frac{2}{3}2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$

12. (Romanian MC 1994) ให้ $n \in \mathbb{N}$ เป็นจำนวนคี่ และ $x_1,\ldots, x_n \in \mathbb{R}$ ที่มีสมบัติว่า

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 1 \quad (k = 1, 2,\ldots, n)$$

จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^{n}|x_k| - \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \frac{n^2 - 1}{4}$

13. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}_0$ สอดคล้องกับ $a + b + c = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$2 \leq (1 - a^2)^2 + (1 - b^2)^2 + (1 - c^2)^2 \leq (1 + a)(1 + b)(1 + c)$$

และหาด้วยว่าได้เป็นสมการในแต่ละอสมการเมื่อใด

14. ให้ $x, y, z, a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับอสมการ

$$\max\{a, 0\} + \max\{b, 0\} < x + ay + bz < 1 + \min\{a, 0\} + \min\{b, 0\}$$

$$\max\{c, 0\} + \max\{d, 0\} < cx + y + dz < 1 + \min\{c, 0\} + \min\{d, 0\}$$

และ $\max\{e, 0\} + \max\{f, 0\} < ex + fy + z < 1 + \min\{e, 0\} + \min\{f, 0\}$

จงพิสูจน์ว่า $0 < x, y, z < 1$

15. ให้ $0 < x_1, x_2, x_3, x_4 \leq \frac{1}{2}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x_1x_2x_3x_4}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)} \leq \frac{x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4}{(1-x_1)^4 + (1-x_2)^4 + (1-x_3)^4 + (1-x_4)^4}$$

บทที่ 7

พหุนามเอกพันธุ์

ให้ $F(x_1,\ldots, x_n)$ เป็นพหุนามใน $x_1,\ldots, x_n$ เรากล่าวว่า F เป็น **พหุนามเอกพันธุ์** ดีกรี k ถ้าทุกโมโนเมียลที่ปรากฏใน F (ด้วยสัมประสิทธิ์ที่ไม่เป็นศูนย์) มีดีกรีรวมเป็น k สิ่งนี้สมมูลกับประพจน์ที่ว่า

$$F(tx_1,\ldots, tx_n) = t^kF(x_1,\ldots, x_n) \text{ สำหรับทุก } t \neq 0$$

อสมการที่อยู่ในรูป $F(x_1,\ldots, x_n) \geq 0$ เรียกว่า **อสมการเอกพันธุ์** เมื่ออสมการนี้สมมูลกับอสมการ $F(tx_1,\ldots, tx_n) \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก t กรณีพิเศษที่สำคัญที่สุดของอสมการเอกพันธุ์ คือเมื่อ $F(x_1,\ldots, x_n)$ เป็นพหุนามเอกพันธุ์ใน $x_1,\ldots, x_n$

ในการพิสูจน์อสมการเอกพันธุ์ จากข้อสังเกตข้างต้น โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราสามารถเปลี่ยนตัวแปรเป็นพหุคูณบวกของตัวแปรเก่าทั้งหมดได้ ยกตัวอย่างเช่น อาจสมมุติได้ว่า $x_1 = 1$ (โดยการเลือก $t = 1/x_1$) ซึ่งเปรียบเสมือนการลดจำนวนตัวแปรลงหนึ่งตัว หรืออาจสมมุติได้ว่า $x_1 + \cdots + x_n = 1$ (โดยการเลือก $t = \dfrac{1}{x_1 + \cdots + x_n}$) ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.1 ให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวก และ r, s เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $0 < s < r$ จงพิสูจน์ว่า

$$(a^s + b^s)^{1/s} < (a^r + b^r)^{1/r}$$

วิธีทำ อสมการที่ต้องการพิสูจน์สามารถเขียนได้ในรูป $(a^r + b^r)^{1/r} - (a^s + b^s)^{1/s} > 0$ ซึ่งเป็นอสมการเอกพันธุ์ เพราะ $(a^r + b^r)^{1/r} - (a^s + b^s)^{1/s}$ เป็นพหุนามเอกพันธุ์ดีกรี 1 ใน a, b

ดังนั้น เราสามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปได้ว่า $a^r + b^r = 1$ (ซึ่งทำได้โดยการเลือก $t = \dfrac{1}{(a^r + b^r)^{1/r}}$)

ซึ่งให้ว่า $0 < a^r < 1$ ดังนั้น $a^s = (a^r)^{s/r} < a^r$ (เพราะ $\dfrac{s}{r} < 1$)

ในทำนองเดียวกัน ได้ $b^s < b^r$ ซึ่งรวมกันแล้วให้ว่า $a^s + b^s < a^r + b^r = 1$

กล่าวคือ $(a^s + b^s)^{1/s} < 1$ ซึ่งคือ อสมการที่ต้องการ ภายใต้สมมุติฐานที่ว่า $a^r + b^r = 1$

ตัวอย่าง 7.2 จงหาค่าสูงสุดของ k ที่ทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุก $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0$

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2(x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1) \geq k(x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + \cdots + x_n^2x_1^2)$$

วิธีทำ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติว่า $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ ดังนั้น เมื่อให้ $n = 2$, $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ เราต้องได้ว่า $\frac{1}{2} \geq 2\frac{k}{4^2}$ ซึ่งให้ $k \leq 4$ เมื่อ $k = 4$ อสมการเปลี่ยนรูปเป็น

$$x_1x_2(1 - 4x_1x_2) + x_2x_3(1 - 4x_2x_3) + \cdots + x_nx_1(1 - 4x_nx_1) \geq 0$$

อสมการนี้เป็นจริง เพราะ $\sqrt{x_ix_j} \leq \frac{x_i + x_j}{2} \leq \frac{1}{2}$ แสดงว่า $\max\{x_ix_j\} = \frac{1}{4}$ โดยเป็นสมการเมื่อมีสองตัวแปรถัดกันที่มีค่าเป็น $\frac{1}{2}$

ตัวอย่าง 7.3 (USAMO 1979) กำหนดให้มีลูกเต๋า n หน้า ที่เหมือนกันทุกประการสามลูก โดยที่แต่ละหน้าที่สอดคล้องกันของลูกเต๋าทั้งสาม มีจำนวนเต็มเดียวกันกำกับอยู่ จงพิสูจน์ว่า เมื่อทอดลูกเต๋าทั้งสามอย่างสุ่ม แล้วความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าที่ปรากฏบนลูกเต๋าทั้งสามเป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 ลงตัว มีค่า $\geq \frac{1}{4}$

วิธีทำ เพื่อความสะดวก แทนจำนวนเต็มบนแต่ละหน้าของลูกเต๋าแต่ละลูก ด้วยเศษตกค้างของมัน mod 3 ซึ่งไม่เปลี่ยนแปลงโจทย์แต่อย่างใด ให้ x, y, z แทนความน่าจะเป็นในการที่ลูกเต๋า แต่ละลูกจะขึ้นหน้า 0, 1, 2 (mod 3) การที่จะได้ผลบวกของหน้าทั้งสามที่ขึ้น เป็นจำนวนเต็มที่หารลงตัว จะต้องได้ว่าหน้าทั้งสามขึ้นเป็น (0, 0, 0),(1, 1, 1), (2, 2, 2) หรือ การเรียงสับเปลี่ยนทั้งหกของ (0, 1, 2) ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ต้องการ คือ

$$P = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \quad \text{โดยที่ } x + y + z = 1 \text{ และ } x, y, z > 0$$

เราต้องการพิสูจน์ว่า $P = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz \geq \frac{1}{4}$ ซึ่งเปลี่ยนให้เป็นรูปแบบเอกพันธุ์ได้ โดยการพิจารณาร่วมกับเงื่อนไขที่เหลือ ได้ว่า อสมการที่ต้องการพิสูจน์ คือ

$$4(x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz) \geq (x+ y + z)^3$$

เมื่อกระจายพจน์ และจัดรูปจะได้

$$(x^3 + y^3 + z^3) + 6xyz \geq x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$$

อสมการท้ายนี้เป็นจริง เนื่องจากเป็นผลตามมาจากกรณีพิเศษ เมื่อ $r = 1$ ในอสมการของ Schur (ตัวอย่าง 6.1) ซึ่งคือ

$$x(x - y)(x - z) + y(y - x)(y - z) + z(z - x)(z - y) = (x^3 + y^3 + z^3) + 3xyz - (x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) \geq 0$$

ตัวอย่าง 7.4 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc} \leq \max\{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2\}$$

วิธีทำ เราพิสูจน์อสมการที่แข็งกว่าของโจทย์ กล่าวคือ

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \leq (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}$$

ถ้า $abc = 0$ แล้ว อสมการท้ายนี้เป็นจริงอย่างชัดเจน จากนี้ไปสมมุติว่า $a, b, c > 0$
เนื่องจากอสมการนี้เป็นเอกพันธุ์ดีกรี 1 จึงสามารถสมมุติได้ว่า $abc = 1$ และ a, b ทั้งคู่ ≥ 1 หรือทั้งคู่ ≤ 1
อสมการที่ต้องการลดรูปเป็น

$$0 \leq a+b+c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ca}+3 = (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\frac{1}{ab}-\frac{2}{\sqrt{a}}-\frac{2}{\sqrt{b}}+3$$

$$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right)^2+\frac{1}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+1$$

$$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)$$

อสมการท้ายนี้เป็นจริงอย่างชัดเจน

ตัวอย่าง 7.5 **(Nesbitt's inequality)** ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

วิธีทำ ให้ $f(a, b, c) := \frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} = \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{a+b}-3$

$$= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

เนื่องจาก $f(a, b, c) = f(ta, tb, tc)$ เมื่อ $t \neq 0$ ดังนั้น f เป็นพหุนามเอกพันธุ์ดีกรี 0
จึงสมมุติได้เพื่อความสะดวกว่า $a + b + c = 1$ โดยอสมการ AM-HM

$$f(a, b, c) = \frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}-3 \geq \frac{3\cdot 3}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}-3 = \frac{9}{2}-3 = \frac{3}{2}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 7.6 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง ≥ 0 จงพิสูจน์ว่า

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

วิธีทำ เนื่องจากนิพจน์ในอสมการมีความสมมาตร จึงสมมุติได้ว่า $a \leq b \leq c$ นอกจากนี้ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ยังเป็นเอกพันธุ์ดีกรี 3 ด้วย จึงสมมุติเพิ่มเติมได้อีกด้วยว่า $a = 1, b = 1 + x, c = 1 + y$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง ≥ 0 เมื่อแทนค่ากลับ และจัดรูป ได้ว่าอสมการที่ต้องการลดรูปเป็น

$$x^3+y^3+x^2+y^2 \geq x^2y+xy+xy^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3+y^3+x^2-xy+y^2-xy(x+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^3+y^3+(x-y)^2+xy-xy(x+y) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)(x^2-xy+y^2-xy)+(x-y)^2+xy \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y+1)(x-y)^2+xy \geq 0$$

ตัวอย่าง 7.7 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{a+b-2c}{b+c}+\frac{b+c-2a}{c+a}+\frac{c+a-2b}{a+b}\geq 0$$

วิธีทำ ให้ f(a, b, c) แทนนิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการ ดังนั้น f(ta, tb, tc) = f(a, b, c) แสดงว่า f เป็นพหุนามเอกพันธุ์ดีกรี 0 จึงสมมุติได้ว่า a + b + c = 1 เมื่อแทนค่ากลับ พบว่าอสมการที่ต้องการสมมูลกับ

$$\frac{1-3c}{1-a}+\frac{1-3a}{1-b}+\frac{1-3b}{1-c}\geq 0$$

$\Leftrightarrow (1-3c)(1-b)(1-c)+(1-3a)(1-c)(1-a)+(1-3b)(1-a)(1-b)\geq 0$

$\Leftrightarrow (1-4c+3c^2)(1-b)+(1-4a+3a^2)(1-c)+(1-4b+3b^2)(1-a)\geq 0$

$\Leftrightarrow (1-4c+3c^2+1-4a+3a^2+1-4b+3b^2)-(b+c+a)+(4bc+4ca+4ab)-(3bc^2+3ca^2+3ab^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow \{3-4+3(a^2+b^2+c^2)\}-1+4ab+4bc+4ca-(3ab^2+3bc^2+3ca^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow -2+3(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca-3ab^2-3bc^2-3ca^2\geq 0$

$\Leftrightarrow 1-2ab-2bc-2ca-3ab^2-3bc^2-3ca^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca-3ab^2-3bc^2-3ca^2\geq 0$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-3ab^2-3bc^2-3ca^2\geq 0$

$\Leftrightarrow (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-3ab^2-3bc^2-3ca^2\geq 0$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a-2ab^2-2bc^2-2ca^2\geq 0$

$\Leftrightarrow a(a-c)^2+b(b-a)^2+c(c-b)^2\geq 0$ อสมการสุดท้ายนี้เป็นจริงอย่างชัดเจน

แนวคิดว่าด้วยความเป็นเอกพันธุ์ มีส่วนช่วยในการพิสูจน์กลุ่มของอสมการที่รู้จักกันในนามว่า **อสมการค่าเฉลี่ยกำลัง (Power mean inequality)** ดังต่อไปนี้

ให้ $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ นิยาม **ค่าเฉลี่ยกำลัง** r ($\neq 0$) ของ $a_1,\ldots, a_n$ เป็น

$$M^r(a_1,\ldots, a_n) := \left(\frac{a_1^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{1/r}$$

ในกรณีที่ r = 1 ค่านี้คือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และในกรณี r = –1 คือ ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิกของ $a_1,\ldots, a_n$ นอกจากนี้ โดยใช้การคำนวณลิมิตในระดับมหาวิทยาลัย สามารถแสดงได้ด้วยว่า

$$\lim_{r\to 0} M^r(a_1,\ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$ ซึ่งคือ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $a_1,\ldots, a_n$

อสมการว่าด้วยค่าเฉลี่ยชี้กำลัง (บางครั้งเรียกว่า อสมการ power mean) กล่าวว่า ให้ r < s เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

$$M^r(a_1,\ldots, a_n) \leq M^s(a_1,\ldots, a_n) \qquad (7.1)$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = \cdots = a_n$

การที่จะพิสูจน์ความจริงของอสมการนี้ จำเป็นต้องใช้ทฤษฎีบทประกอบสองทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทประกอบว่าด้วยอสมการ Bernoulli

ให้ x เป็นจำนวนจริงที่มีค่า > –1 และ p เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น

(i) ถ้า $0 < p < 1$ แล้ว $(1 + x)^p \leq 1 + px$

(ii) ถ้า $p > 1$ แล้ว $(1 + x)^p \geq 1 + px$

โดยได้เป็นสมการ (ไม่ว่าใน (i) หรือ (ii)) ก็ต่อเมื่อ $x = 0$

พิสูจน์ (i) เมื่อ $0 < p < 1$ จากอสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก $w_1a_1 + \cdots + w_na_n \geq a_1^{w_1} \cdots a_n^{w_n}$ เมื่อ $a_1,\ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก และค่าน้ำหนัก $w_1,\ldots, w_n$ เป็นจำนวนจริงบวกที่มีผลบวกเป็น 1

แทนค่า $n = 2$, $w_1 = p$, $w_2 = 1 – p$, $a_1 = 1 + x > 0$, $a_2 = 1$ ได้ว่า $p(1 + x) + (1 – p)\cdot 1 \geq (1 + x)^p \cdot 1^{1-p}$
โดยได้เป็นสมการ (ตามเงื่อนไขของอสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก) ก็ต่อเมื่อ $a_1 = a_2$ กล่าวคือ $x = 0$

(ii) เมื่อ $p > 1$ ถ้า $1 + px \leq 0$ แล้ว อสมการที่ต้องการ (ซึ่งเป็นอสมการแท้) เป็นจริงอย่างชัดเจน
ถ้า $1 + px > 0$ แล้วโดยผลใน (i) ได้ว่า $(1 + px)^{1/p} \leq 1 + (1/p)px = 1 + x$
โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $px = 0$ กล่าวคือ $x = 0$ ตามต้องการ □

ทฤษฎีบทประกอบว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่าง ค่าเฉลี่ยกำลังบวกกับกำลังลบ

ให้ $G(a_1,\ldots, a_n)$ เป็นค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของจำนวนบวก $a_1,\ldots, a_n$ ถ้า $r < 0 < s$ เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$M^r(a_1,\ldots, a_n) \leq G(a_1,\ldots, a_n) \leq M^s(a_1,\ldots, a_n)$$

โดยเป็นสมการทุกแห่ง ก็ต่อเมื่อ $a_1 = \cdots = a_n$

พิสูจน์ จากอสมการ AM-GM ได้ $G(a_1^s,\ldots, a_n^s) = \sqrt[n]{a_1^s \cdots a_n^s} \leq \dfrac{a_1^s + \cdots + a_n^s}{n}$

เมื่อยกกำลัง $\dfrac{1}{s}$ ทั้งสองข้าง จะได้อสมการทางขวาที่ต้องการ

การพิสูจน์อสมการทางซ้ายทำได้ในทำนองคล้ายกัน โดยเริ่มจากอสมการ AM-GM ดังนี้

$$G(a_1^r,\ldots, a_n^r) = \sqrt[n]{a_1^r \cdot \cdots a_n^r} \leq \frac{a_1^r + \cdots + a_n^r}{n}$$

เมื่อยกกำลัง $\dfrac{1}{r}$ (ซึ่งเป็นจำนวนลบ) จะได้อสมการกลับข้างที่ต้องการ

ข้อสังเกตสุดท้ายคือ การใช้อสมการ AM-GM ทั้งสองครั้ง ได้กรณีเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = \cdots = a_n$ เป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ □

การพิสูจน์อสมการค่าเฉลี่ยชี้กำลัง สังเกตว่าโดยทฤษฎีบทประกอบข้างต้น เพียงพอที่จะพิสูจน์ (7.1) ในสองกรณี ที่ว่า $0 < r < s$ และ $r < s < 0$

- กรณี $0 < r < s$: ให้ $p = \frac{s}{r} > 1$ ดังนั้น $a_k^s = b_k^p$ โดยที่ $b_k = a_k^r$ $(k = 1,..., n)$ เมื่อยกกำลัง r ทั้งสองข้างใน (7.1) ได้ว่าอสมการที่ต้องการสมมูลกับ $\frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \leq \left(\frac{b_1^p + \cdots + b_n^p}{n}\right)^{1/p}$

  จึงเป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์อสมการท้ายนี้ เมื่อ $b_1,..., b_n$ เป็นจำนวนบวก และ $p > 1$ โดยได้สมการ ก็ต่อเมื่อ $b_1 = \cdots = b_n$

  เนื่องจากอสมการดังกล่าว เป็นแบบเอกพันธุ์ใน $b_1,...,\ b_n$ จึงสามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปได้ว่า $b_1 +...+ b_n = n$ ให้ $x_k = b_k - 1$ $(k = 1,..., n)$ ดังนั้น $x_1 + \cdots + x_n = (b_1 + \cdots + b_n) - n = 0$

  เนื่องจากทุก $x_k > -1$ และ $p > 1$ โดยอสมการ Bernoulli ได้

  $$b_k^p = (1 + x_k)^p \geq 1 + px_k \qquad (k = 1,...,n)$$

  เมื่อบวกอสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน พบว่า

  $$b_1^p + \cdots + b_n^p \geq n + p(x_1 + \cdots + x_n) = n$$

  ซึ่งคืออสมการที่ต้องการ

ส่วนการที่จะได้เป็นสมการนั้น เมื่อไล่ขั้นตอน พบว่าตอนที่ใช้อสมการ Bernoulli ต้องได้เป็นสมการ ซึ่งจากเงื่อนไขของอสมการ Bernoulli สิ่งนี้เป็นจริงก็ต่อเมื่อ ทุก $x_k = 0$ กล่าวคือ ทุก $b_k = 1$

- กรณี $r < s < 0$: สังเกตว่า (7.1) เป็นจริง ถ้าสามารถแสดงได้ว่า

  $$M^{-s}\left(\frac{1}{a_1},...,\frac{a}{a_n}\right) \leq M^{-r}\left(\frac{1}{a_1},...,\frac{a}{a_n}\right)$$

อสมการท้ายนี้ เป็นผลตามมาจากกรณีแรกที่ได้พิจารณาไปก่อนหน้านี้ พร้อมทั้งเอกลักษณ์

$$M^{-t}\left(\frac{1}{a_1},...,\frac{a}{a_n}\right) = \frac{1}{M^t(a_1,...,a_n)} \quad \text{เมื่อ} \quad t \neq 0$$ □

แบบฝึกหัด

1. ให้ $x, y, z, r \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{x^{r+1}}{y^r} + \frac{y^{r+1}}{z^r} + \frac{z^{r+1}}{x^r} \geq x + y + z$

2. จงพิสูจน์อสมการของ Jensen ที่กล่าวว่า: ให้ $a_1,..., a_n \in \mathbb{R}^+$ $(n \geq 2)$ และให้ $0 < r < s$

   ดังนั้น $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^s\right)^{1/s} < \left(\sum_{k=1}^{r} a_k^r\right)^{1/r}$

3. ให้ $p, a_1,..., a_n \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ จงพิสูจน์ว่า

   (3.1) $(a_1 + \cdots + a_n)^p > a_1^p + \cdots + a_n^p$ ถ้า $p > 1$

   (3.2) $(a_1 + \cdots + a_n)^p < a_1^p + \cdots + a_n^p$ ถ้า $0 < p < 1$

4. ให้ $a_1,\ldots, a_n, a_{n+1} = a_1$ เป็นจำนวนจริงบวก จงพิสูจน์ว่า

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{a_i + a_{i+1}} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i$$

5. ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่า $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$

6. ให้ $a, b, c, d, e, x, y, z, t \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า

$a + b(x + y + z + t) + c(xy + xz + xt + yz + yt + zt) + d(xyz + xyt + xzt + yzt) + exyzt \geq 0$

และ

$0 \leq x, y, z, t \leq 1 \iff a \geq 0,\ a+b \geq 0,\ a+2b+c \geq 0,\ a+3b+3c+d \geq 0,\ a+4b+6c+4d+4e \geq 0$

7. ให้ $x, y \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4$ จงพิสูจน์ว่า $x^3 + y^3 \leq 2$

8. (APMC) จงหาจำนวนจริงค่ามากสุด C_1 และ จำนวนจริงค่าน้อยสุด C_2ที่ทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$C_1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+e} + \frac{e}{e+a} < C_2 \quad \text{เมื่อ } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^+$$

9. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}^+$

(i) จงพิสูจน์ว่า $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$

(ii) จงพิสูจน์ว่า $9(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a + b + c)^3$

10. (APMC) กำหนดให้จำนวนจริง x, y, z, t สอดคล้องกับสมการ

$$x + y + z + t = 0 \quad \text{และ} \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$$

จงพิสูจน์ว่า $-1 \leq xy + yz + zt + tx \leq 0$

11. ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}$ มีสมบัติว่า $\sin x + \sin y + \sin z \geq 2$

จงพิสูจน์ว่า $\cos x + \cos y + \cos z \leq \sqrt{5}$

12. (APMC) ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$(n-1)(m-1)(x^{n+m} + y^{n+m}) + (n+m-1)(x^n y^m + x^m y^n) \geq nm(x^{n+m-1}y + xy^{n+m-1})$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}^+$

13. จงแสดงว่า $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}^+$ และหาด้วยว่าได้เป็นสมการเมื่อใด

บทที่ 8

อสมการที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน

ในบทนี้เราจะพิจารณาโจทย์อสมการที่ต้องอาศัยความรู้ทางทฤษฎีจำนวน เป็นต้นว่า การหารลงตัว จำนวนเฉพาะ เลขคณิตมอดุโล ฟังก์ชันเลขคณิต การประมาณเชิง Diophantine ความเป็น ตรรกยะ - อตรรกยะ พื้นฐานทางทฤษฎีจำนวนที่สำคัญ หาอ่านได้ในเอกสารอ้างอิง

ตัวอย่าง 8.1 (Putnam 1982) ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ และ $r = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ กำหนดให้ว่า

$$a + c \leq 1982 \ , \quad r > 0$$

จงพิสูจน์ว่า $r > 1/1983^3$

วิธีทำ จากโจทย์ $r = 1 - \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{1}{bd}(bd - ad - bc) > 0$

เนื่องจาก $bd - ad - bc$ เป็นจำนวนเต็มและ $r > 0$ จึงได้ว่า $r \geq \frac{1}{bd}$

เราสามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า $b \leq d$

ถ้า $b \leq d \leq 1983$ แล้ว $r \geq (1983)^{-2} > (1983)^{-3}$

เนื่องจาก $a + c \leq 1982$ ถ้า $1983 \leq b \leq d$ แล้ว ได้

$$r \geq 1 - \frac{a}{1983} - \frac{c}{1983} \geq 1 - \frac{1982}{1983} = \frac{1}{1983} > \frac{1}{(1983)^3}$$

กรณีที่เหลือ คือ $b < 1983 < d$ ดังนั้น d ที่ให้ค่า r ต่ำสุด เมื่อตรึง a, b, c คือ ที่ทำให้ $bd - ad - bc = 1$

กล่าวคือ $1 + \left[\frac{bc}{b-a}\right]$ เมื่อ [x] แทนภาคจำนวนเต็มของ x ค่า d นี้ $\leq 1983b$

เพราะ $b - a \geq 1$ และ $c < 1982$ ดังนั้น

$$r \geq \frac{1}{bd} \geq \frac{1}{1983b^2} > \frac{1}{(1983)^3}$$

ตัวอย่าง 8.2 (Putnam 1971) ให้ d(x) แทนตัวหารคี่ค่ามากสุดของจำนวนนับ x จงพิสูจน์ว่า

$$\left|\sum_{n=1}^{x}\frac{d(n)}{n}-\frac{2x}{3}\right| < \frac{2}{3} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } x$$

วิธีทำ ให้ $S(x) := \sum_{n=1}^{x}\frac{d(n)}{n}$ สังเกตว่า $d(2m+1) = 2m+1$, $d(2m) = d(m)$ และ $S(2x+1) = S(2x)+1$

เมื่อแบ่งผลบวกของ S(2x) ออกเป็นสองส่วน ตามดรรชนีที่เป็นคู่ และคี่ จะได้ความสัมพันธ์

$$S(2x) = \sum_{n=1}^{x}\frac{d(2m)}{2m} + \sum_{n=1}^{x}\frac{d(2m-1)}{2m-1} = \frac{1}{2}S(x) + x$$

ให้ $F(x) := S(x) - \frac{2x}{3}$ ดังนั้น

$$F(2x) = \frac{1}{2}F(x) \quad \text{และ} \quad F(2x+1) = F(2x) + \frac{1}{3}$$

จาก $F(1) = S(1) - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ โดยการอุปนัย แสดงได้ว่า $0 < F(x) < \frac{2}{3}$ สำหรับทุกจำนวนนับ x

ตัวอย่าง 8.3 (IMO 1970) กำหนดให้ $A = x_n x_{n-1}\cdots x_1 x_0$ เป็นการเขียนจำนวนนับ A ในรูปฐาน a และของจำนวนนับ B ในฐาน b ในขณะที่ $x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_1 x_0$ เป็นการเขียนจำนวนนับ C ในรูปฐาน a และเป็นการเขียนจำนวนนับ D ในรูปฐาน b โดยที่ a, b, n เป็นจำนวนนับ > 1 จงพิสูจน์ว่า $\frac{C}{A} < \frac{D}{B} \iff a > b$

วิธีทำ ให้ $F(t) := \dfrac{x_n t^n + x_{n-1}t^{n-1} + \cdots + x_1 t + x_0}{x_{n-1}t^{n-1} + x_{n-2}t^{n-2} + \cdots + x_1 t + x_0} = 1 + \frac{x_n}{G}$

เมื่อ $G = \frac{x_{n-1}}{t} + \frac{x_{n-2}}{t^2} + \cdots + \frac{x_1}{t^{n-1}} + \frac{x_0}{t^n}$ เนื่องจากแต่ละ $x_i \geq 0$ ดังนั้น G มีค่าลดลง เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งชี้ว่า F(t) เป็นฟังก์ชันเพิ่มของ t เพราะฉะนั้น

$$\frac{A}{C} = F(a) > F(b) = \frac{B}{D} \iff a > b$$

ตัวอย่าง 8.4 จงพิสูจน์ว่า ค.ร.น. $\{1, 2, \ldots, n\} \geq 2^{n-1}$

วิธีทำ ให้ L(n) = ค.ร.น. {1, 2, ... , n} สังเกตว่า ถ้า n เป็นจำนวนนับคี่ แล้ว

$$L(n+1) = L(n) \text{ หรือไม่ก็ } L(n+1) = 2L(n)$$

ขึ้นกับว่า n + 1 ไม่เป็น หรือ เป็นกำลังของ 2

ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม พบว่า ถ้า $n = 2m+1$ เป็นคี่ แล้ว $L(2m+1) \geq \frac{1}{2}L(2m+2)$ จากนี้ไปจึงจะพิจารณาเพียงจำนวนนับคู่ n

ให้ $n = 2m$ โดยการอุปนัยได้ว่า $2^{2m} \le 2m\binom{2m}{m}$ ดังนั้น

$$2^{2m-1} \le m\binom{2m}{m} \qquad (8.4.1)$$

ลำดับต่อไป จะแสดงว่า $m\binom{2m}{m} \mid L(2m)$

เพื่อการนี้ พิจารณาแต่ละจำนวนเฉพาะ $p \le 2m$ ให้ $a(p)$ เป็นจำนวนนับหนึ่งเดียวที่สอดคล้องกับอสมการ

$$p^{a(p)} \le 2m < p^{a(p)+1}$$

ดังนั้น

$$L(2m) = \prod_{p \le 2m} p^{a(p)}$$

กำลังสูงสุดของ p ที่หาร n! ได้ลงตัวคือ $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$ ดังนั้น กำลังสูงสุดของ p ที่หาร $\binom{2m}{m}$ ได้ลงตัว คือ

$$b(p) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2m}{p^k}\right] - 2\left[\frac{m}{p^k}\right]\right\}$$

เนื่องจากทั้ง $\left[\frac{2m}{p^k}\right]$ และ $\left[\frac{m}{p^k}\right]$ มีค่าเป็น 0 ถ้า $p^k > 2m$ ดังนั้น

$$b(p) = \sum_{k=1}^{a(p)}\left\{\left[\frac{2m}{p^k}\right] - 2\left[\frac{m}{p^k}\right]\right\} \qquad (8.4.2)$$

เนื่องจาก $2[x] \le [2x] \le 2[x] + 1$ สำหรับจำนวนจริง x จึงได้ว่า แต่ละพจน์ในผลบวกข้างต้น เป็น 0 หรือไม่ก็ 1 ดังนั้น $b(p) \le a(p)$

สังเกตว่าไม่มีจำนวนเฉพาะมากกว่า $2m$ เป็นตัวหารของ $m\binom{2m}{m}$ ได้

พิจารณาจำนวนเฉพาะ (ที่ตรึง) $p \le 2m$ ให้ $m = p^e q$ โดยที่ ห.ร.ม. $(p, q) = 1$

ดังนั้น ในการแยกตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะของ $m\binom{2m}{m}$ เลขชี้กำลังของ p คือ $e + b(p)$

เพราะฉะนั้น การที่จะแสดงว่า $m\binom{2m}{m}$ เป็นตัวหารของ $L(2m)$ เราเพียงต้องตรวจสอบว่า $e + b(p) \le a(p)$

ถ้า $e = 0$ แล้ว เราได้พิสูจน์อสมการนี้มาแล้ว ดังนั้น สมมุติว่า $e \ge 1$

สังเกตว่าพจน์ e พจน์แรกของผลบวก (8.2) จะเป็น 0 (ทั้งนี้เพราะ m หารลงตัวด้วย p^k เมื่อ $1 \le k \le e$)

ดังนั้น แม้จะยอมให้ใช้ค่ามากสุดจากแต่ละพจน์ใน $a(p) - e$ พจน์ที่เหลือ ก็ยังได้อสมการที่ต้องการ คือ

$$b(p) \le a(p) - e$$

แสดงว่ากำลังสูงสุดของแต่ละจำนวนเฉพาะที่หาร $L(2m) \geq$ กำลังสูงสุดของมันที่หาร $m\binom{2m}{m}$

ดังนั้น $m\binom{2m}{m} \mid L(2m)$ ซึ่งให้ว่า

$$L(2m) \geq m\binom{2m}{m} \geq 2^{2m-1}$$

และจากข้างต้นได้ด้วยว่า $L(2m) \geq \frac{1}{2}L(2m+2) \geq \frac{1}{2}(2^{2(m+1)-1}) = 2^m$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 8.5 (IMO 2002) ให้ n เป็นจำนวนเต็ม > 1 ให้ $d_1, d_2, \ldots, d_k$ เป็นตัวหารของ n โดยที่

$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$$

ให้ $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$

(a) จงพิสูจน์ว่า $D < n^2$

(b) จงหา n ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า D เป็นตัวหารของ n^2

วิธีทำ (a) เนื่องจาก $d_1, d_2, \ldots, d_k$ เป็นตัวหารที่แตกต่างกันของ n ดังนั้น ต้องได้ว่า

$$d_k = n,\ d_{k-1} \leq \frac{1}{2}n, \qquad d_{k-2} \leq \frac{n}{3}, \ \ldots, \ d_1 = 1 \leq \frac{n}{k}$$

ดังนั้น

$$D \leq \sum_{i=1}^{k-1}\frac{n^2}{i(i+1)} = n^2\sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = n^2\left(1-\frac{1}{k}\right) < n^2 \quad \text{ตามต้องการ}$$

(b) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะค่าน้อยสุดที่เป็นตัวหารของ n ดังนั้น p เป็นตัวหารค่าน้อยสุดของ n^2 ที่มีค่ามากกว่าหนึ่งด้วย ดังนั้น จำนวนใดที่เป็นตัวหารของ n^2 ที่มีค่าน้อยกว่า n^2 จะต้องมีค่าอย่างมาก $\frac{n^2}{p}$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $D \leq \frac{n^2}{p}$ เนื่องจาก $D < n^2$ จากข้อ (a)

สังเกตว่า $d_k = n,\ d_{k-1} = \frac{n}{p}, \ \ldots, \ d_2 = p,\ d_1 = 1$ ถ้า $k > 2$ แล้ว $D \geq n\cdot\frac{n}{p} + p\cdot 1 > \frac{n^2}{p}$ อย่างไรก็ตาม เราพบมาแล้วว่า สิ่งนี้เป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $k = 2$ แสดงว่า n มีตัวหารเพียงสองตัว กล่าวคือ n ต้องเป็นจำนวนเฉพาะ ในทำนองกลับกัน สามารถตรวจสอบได้ทันทีว่า ถ้า n เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว D เป็นตัวหารของ n^2

ตัวอย่าง 8.6 (APMO 2002) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มไม่ติดลบ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และให้ $A_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ จงพิสูจน์ว่า $a_1!a_2!\cdots a_n! \geq ([A_n]!)^n$ เมื่อ $[A_n]$ แทนภาคจำนวนเต็มของ A_n ถามด้วยว่า อสมการเป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ เราจะเริ่มด้วยการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้ก่อน

- **ทฤษฎีบทประกอบ** ถ้า $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{N}$ แล้ว $\dfrac{x!}{y!} \geq y^{x-y}$ โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $y = x$ หรือ $y = x + 1$
- **พิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ** กรณี $x = y$ เห็นได้ชัดเจน พิจารณากรณี $x > y$ เมื่อตัดทอนลดรูปนิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการแล้วได้ว่า นิพจน์ประกอบด้วยตัวประกอบจำนวน $x - y$ ตัวโดยที่ทุกตัวมีค่ามากกว่า y แสดงว่าอสมการที่ต้องการเป็นจริง

  สุดท้ายพิจารณากรณี $x < y$ เมื่อตัดทอนลดรูปแล้ว นิพจน์ทางซ้ายมีตัวเศษเป็น 1 และตัวส่วนประกอบด้วยตัวประกอบจำนวน $y - x$ ตัว แต่ละตัวมีค่าน้อยกว่า y ลงมาจนถึง $x + 1$ แสดงเช่นกันว่าอสมการที่ต้องการเป็นจริง โดยที่เป็นสมการเป็นไปได้ในกรณีนี้ เพียงเมื่อ $y = x + 1$ เป็นอันจบสิ้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ

เพื่อการแก้โจทย์ เราแบ่งออกเป็นสองกรณีย่อย

กรณีที่ 1: $[A_n] = 0$. เนื่องจาก $a_i \geq 0$ อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $a_i = 0$ หรือ 1

กรณีที่ 2: $[A_n] > 0$. โดยทฤษฎีบทประกอบ ได้ว่า $\dfrac{a!}{[A_n]!} \geq [A_n]^{a_i - [A_n]}$ ดังนั้น

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{a_i!}{[A_n]!} \geq \prod_{i=1}^{n} [A_n]^{a_i - [A_n]} = [A_n]^{\sum_{i=1}^{n} (a_i - [A_n])} = [A_n]^{n(A_n - [A_n])} \geq 1$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ อสมการข้างต้นนี้เป็นสมการ เมื่อแต่ละ $a_i = [A_n] \leq A_n$ หรือ $a_i = [A_n] - 1 \leq A_n$ ซึ่งให้ว่า

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{A_n}{n} = A_n$$

แสดงว่า ในนิพจน์ท้ายนี้เป็นสมการโดยทั่วกัน นั่นคือ $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = A_n$

ตัวอย่าง 8.7 (IMO 1996) จำนวนนับ a, b มีสมบัติว่า $15a + 16b$ และ $16a - 15b$ ทั้งสองจำนวนเป็นกำลังสองของจำนวนนับ จงหาค่าน้อยที่สุดที่เป็นไปได้ ของค่าต่ำสุดของจำนวนกำลังสองทั้งสองนี้

วิธีทำ ให้ $15a + 16b = x^2$, $16a - 15b = y^2$ เมื่อยกกำลังสอง แล้วบวกเข้าด้วยกัน ได้

$$(15^2 + 16^2)(a^2 + b^2) = x^4 + y^4$$

สังเกตว่า $15^2 + 16^2 = 13 \cdot 37$ ดังนั้น $x^4 + y^4 \equiv 0 \pmod{13}$, $x^4 + y^4 \equiv 0 \pmod{37}$

พิจารณา congruence mod 13 ถ้า $z^4 \equiv 0 \pmod{13}$ แล้ว $z^{12} \equiv 0 \pmod{13}$ และโดย Fermat's little theorem ได้ว่า $z \equiv 0 \pmod{13}$ จึงได้ว่า

$$x \equiv 0 \equiv y \pmod{13} \text{ หรือไม่ก็ } x \not\equiv 0 \pmod{13},\ y \not\equiv 0 \pmod{13}$$

เราจะแสดงว่า ทางเป็นไปได้ทางที่สองนี้ไม่จริง จาก $x^4 \equiv -y^4 \pmod{13}$ โดย Fermat's little theorem ได้ $1 \equiv x^{12} = (x^4)^3 \equiv (-y^4)^3 = -y^{12} \equiv -1 \pmod{13}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

กรณี congruence mod 37 ทำได้ในทำนองเดียวกัน โดยยกกำลัง 9 แทนกำลัง 3 แล้วใช้ความจริงที่ว่า $4\cdot 9 = 37 - 1$ ประเด็นหลักคือ 9 เป็นคี่ ดังนั้น การยกกำลัง 9 ไม่เปลี่ยนเครื่องหมายที่เป็นลบ จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า $x \equiv 0 \equiv y \pmod{13}$, $x \equiv 0 \equiv y \pmod{37}$ กล่าวคือ ทั้ง x และ y เป็นพหุคูณของ 481 เมื่อใช้ $x = y = 481$ แล้วแก้สมการ $15a + 16b = 481^2$, $16a - 15b = 481^2$ ได้ $a = 31\cdot 481$, $b = 481$ ดังนั้น คำตอบที่ต้องการ คือ 481

ตัวอย่าง 8.8 (IMO 1981) จงหาค่าสูงสุดของ $m^2 + n^2$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$1 \le m, n \le 1981 \quad \text{และ} \quad (n^2 - nm - m^2)^2 = 1$$

วิธีทำ ให้ $M := \{(n, m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} ;\ (n^2 - nm + m^2)^2 = 1\}$

ถ้า $n = m$ แล้ว $n = m = 1$ ดังนั้น $(1, 1) \in M$ นอกจากนี้เห็นชัดเจนว่า (1, 0) และ (0, 1) ทั้งคู่เป็นคำตอบของสมการไดโอแฟนไทน์ของโจทย์ด้วย

ต่อไปเป็นการพิจารณาคู่อันดับของคำตอบ (n, m) ที่มีพิกัดทั้งสองแตกต่างกัน โดยใช้ Fermat's descending method ดังในทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

- **ทฤษฎีบทประกอบ** ถ้า (n, m) เป็นคำตอบบวกของสมการไดโอแฟนไทน์ในโจทย์ และ $n \neq m$ แล้ว $n > m > n - m$ และ $(m, n - m)$ ก็เป็นคำตอบเช่นกัน

- **พิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบ** จาก $n^2 - nm - m^2 = \pm 1$ ได้ $n(n - m) = m^2 \pm 1 \ge 0$ ดังนั้น $n > m$ นอกจากนี้ จาก $n^2 - nm - m^2 = \pm 1$ ได้ด้วยว่า $m^2 - m(n - m) - (n - m)^2 = m^2 + mn - n^2 = \mp 1$ เมื่อประยุกต์ใช้ผลของส่วนแรกกับคำตอบ $(m, n - m)$ ได้ $m > n - m$

จากทฤษฎีบทประกอบ เราพบว่า คู่อันดับ $(n, m) \in M$ ก่อให้เกิดอีกคู่อันดับหนึ่ง $(m, n - m) \in M$ descending method เช่นว่านี้ เขียนย่อ ได้ในรูป $(n, m) \longrightarrow (m, n - m)$ ซึ่งสมมูลกับ สิ่งที่เรียกว่า ascending method $(a, b) \longrightarrow (a + b, a)$ ซึ่งก่อให้เกิดคำตอบใหม่ วิธีการทั้งสองเป็นเสมือนคู่สมมูล ที่กลับทิศทางกัน

เมื่อประยุกต์ใช้ descending method กับคู่อันดับ $(n, m) \in M$ ซึ่งกระทำได้เพียงจำนวนจำกัดครั้ง เพราะ $n - m < m$ ดังนั้น หลังจากดำเนินการเป็นจำนวนจำกัดครั้ง จะได้คู่อันดับที่มีค่า $n = m$ กล่าวคือ สิ้นสุดที่คู่อันดับ (1, 1) แสดงว่าทุกคำตอบ $(n, m) \in M$ หาได้จากคู่อันดับ (1, 0) โดยการใช้ ascending method :

$$(1, 0) \longrightarrow (1, 1) \longrightarrow (2, 1) \longrightarrow (3, 2) \longrightarrow (5, 3) \longrightarrow \cdots$$

สังเกตว่าพิกัดของทุกคู่อันดับเป็นจำนวน Fibonacci F_n เมื่อลำดับ $(F_n)_{n \ge 0}$ นิยามโดยเงื่อนไข

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \quad \text{และ} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \ge 1)$$

ดังนั้น ascending method สร้างคำตอบใหม่ดังนี้ $(F_n, F_{n-1}) \longrightarrow (F_{n+1}, F_n)$ การที่จะหาคำตอบ (n, m) ที่ให้ค่า $m^2 + n^2$ สูงสุด ทำได้โดยพิจารณาลำดับ Fibonacci ที่มีค่าไม่เกิน 1981:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597$$

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดที่ต้องการคือ $987^2 + 1597^2$

ตัวอย่าง 8.9 (IMO 1992) สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ S(n) แทนจำนวนเต็มค่ามากสุดที่มีสมบัติว่า n^2 เขียนได้เป็นผลบวกของจำนวนเต็ม (ไม่เป็นศูนย์) กำลังสองสมบูรณ์ k จำนวน โดยที่ $1 \le k \le S(n)$

a) จงพิสูจน์ว่า $S(n) \le n^2 - 14$ สำหรับทุก $n \ge 4$

b) จงหาจำนวนนับ n ที่มีสมบัติว่า $S(n) = n^2 - 14$

c) จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ n เป็นจำนวนอนันต์ ที่มีสมบัติว่า $S(n) = n^2 - 14$

วิธีทำ a) สมมุติว่ามี n ที่มีสมบัติว่า $n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ เมื่อ $k = n^2 - 13$ ดังนั้น สำหรับทุก i, $1 \le i \le k$ ได้ว่า

$$n^2 = x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_k^2 \ge 1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + 1^2 = n^2 - 14 + x_i^2$$

ซึ่งให้ว่า $x_i^2 \le 14$ กล่าวคือ $x_i \in \{1, 2, 3\}$

สมมุติว่าจำนวนของ 1^2 ที่ปรากฏคือ a จำนวนของ 2^2 ที่ปรากฏคือ b จำนวนของ 3^2 ที่ปรากฏคือ c ดังนั้น

$$a + b + c = n^2 - 13 \text{ และ } a + 4b + 9c = n^2$$

จากความสัมพันธ์ทั้งสอง ได้ $3b + 8c = 13$ สมการท้ายนี้ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ แสดงว่า จำนวนกำลังสองสมบูรณ์ n^2 เขียนไม่ได้เป็นผลบวกกำลังสองสมบูรณ์จำนวน $n^2 - 13$ จำนวน กล่าวคือ $S(n) < n^2 - 13$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

b) เราจะพิสูจน์ว่าค่า n น้อยสุดที่ทำให้ $S(n) = n^2 - 14$ คือ $n = 13$

ให้ $n \ge 4$ สอดคล้องสมการที่กำหนดให้ เราได้ $S(n) \ge 2$ ดังนั้น n^2 ต้องเป็นผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์สองจำนวน ค่าน้อยสุดของ n คือ 5, 10, 13

สังเกตว่า $5^2 = 25$ และ $10^2 = 100$ ไม่เป็นผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์สองจำนวน ดังนั้น ค่าน้อยสุดของ n อาจเป็น 13 ได้

เราจะแสดงว่า สำหรับทุก k ที่ $1 \le k \le 169 - 14 = 155$ จำนวนเต็ม $13^2 = 169$ เป็นผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์ k จำนวน ก่อนอื่น สังเกตว่า ผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์ k จำนวน $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2$ ที่บรรจุจำนวนคู่ $x_i = 2y_i$ จะก่อให้เกิดผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์ k + 3 จำนวน

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = x_1^2 + \cdots + y_i^2 + y_i^2 + y_i^2 + y_i^2 + \cdots + x_k^2$$

เมื่อใช้ข้อสังเกตนี้ จาก $169 = 8^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 3^2$ เราจะได้รูปแบบการแทนที่มีความยาว 2 + 3t, $1 \le t \le 51$ สังเกตด้วยว่า จาก $3^2 = 2^2 + 2^2 + 1^2$ โดยข้อโต้แย้งเช่นข้างต้น จะได้รูปแบบการแทนที่มีความยาว1 + 3t, $2 \le t \le 51$ จาก $169 = 12^2 + 4^2 + 3^2$ จะได้รูปแบบการแทนที่มีความยาว 3t, $1 \le t \le 51$ และในกรณีของกำลังสองสมบูรณ์สี่จำนวน จัดได้โดยการแทนในรูปแบบ

$$169 = 10^2 + 8^2 + 2^2 + 1^2 \text{ และสองจำนวนในรูป } 169^2 = 5^2 + 12^2$$

c) ให้ $n \ge 13$ เป็นจำนวนเต็มที่มีสมบัติว่า $S(n) = n^2 - 14$ และให้ $n^2 = x_1^2 + \cdots + x_j^2$, $j = n^2 - 14$

ดังนั้น $4n^2 = (2x_1)^2 + \cdots + (2x_j)^2$ โดยข้อโต้แย้งเช่นข้างต้น ได้ว่า $4n^2$ สามารถเขียนแทนได้ด้วยความยาว k สำหรับทุก k ในช่วง $1 \le k \le 4n^2 - 56$ เราเหลือต้องครอบคลุมการแทนด้วยความยาวระหว่าง $4n^2-55$ และ $4n^2-14$

เพื่อการนี้ เราเริ่มจากรูปแบบการแทน $4n^2 = 1^2 + \cdots + 1^2 + 13^2$ ที่มี 1^2 อยู่ $4n^2 - 169$ จำนวน และมีความยาวทั้งสิ้น $4n^2 - 168$ โดยใช้ผลของ b) ในการแทน 169 เป็นผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์ความยาว k, $2 \le k \le 155$ จาก $4n^2 - 169 + 155 = 4n^2 - 14$ เห็นได้ชัดเจนว่า เราได้ครอบคลุมครบทุกกรณี เพราะฉะนั้น เราได้พิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นคำตอบของโจทย์ของเรา กล่าวคือ $S(n) = n^2 - 14$ แล้ว $2n$ เป็นคำตอบด้วย ซึ่งพิสูจน์ข้อ c)

ตัวอย่าง 8.10 (IMO 1997) สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ f(n) แทนจำนวนทางในการเขียน n เป็นผลบวกของกำลังของ 2 โดยที่เลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ การเขียนแทนดังกล่าวที่ต่างกันเพียงการสลับตำแหน่งของพจน์ไม่ถือเป็นการเขียนแทนที่แตกต่างกัน ยกตัวอย่างเช่น $f(4) = 4$ ทั้งนี้เพราะ จำนวนเต็ม 4 มีรูปแบบการเขียนแทนที่แตกต่างกันสี่แบบดังนี้ $4,\ 2+2,\ 2+1+1,\ 1+1+1+1$ สำหรับแต่ละจำนวนนับ $n \ge 2$

จงพิสูจน์ว่า $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$

วิธีทำ การแบ่งกั้นของ n เป็นกำลังของ 2 เช่นที่กำหนดในโจทย์ มีรูปเป็น

$$n = 2^{a_0} + 2^{a_1} + \cdots + 2^{a_k} \tag{8.10.1}$$

เมื่อ $0 \le a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_k$ รูปแบบการแทนเช่นนี้ กำหนดเป็นหนึ่งเดียวได้ด้วยลำดับ

$$0 \le a_0 \le a_1 \le \cdots \le a_k \tag{8.10.2}$$

ดังนั้น เราต้องศึกษาถึงจำนวนของลำดับ (8.10.2) ภายใต้เงื่อนไข (8.101) ขั้นแรกสังเกตว่า

$$f(2n+1) = f(2n) \tag{8.10.3}$$

ซึ่งมาจากความจริงที่ว่า ผลแบ่งกั้นของ $2n$ ก่อให้เกิดผลแบ่งกั้นของ $2n+1$ โดยการเติม 1 เข้าไป และทุกผลแบ่งกั้นของ $2n+1$ จะต้องบรรจุ 1 อย่างน้อยหนึ่งครั้ง อีกความสัมพันธ์หนึ่งที่มีประโยชน์คือ

$$f(2n) = f(2n-1) + f(n) \tag{8.10.4}$$

ซึ่งได้มาจากการพิจารณาแบ่งผลแบ่งกั้นของ $2n$ เป็นกลุ่ม C_1 ที่ประกอบด้วยผลแบ่งกั้นที่บรรจุ 1 และกลุ่ม C_0 ที่ประกอบด้วยผลแบ่งกั้นที่ไม่บรรจุ 1

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ (8.10.3), (8.10.4) ตามลำดับ ได้

$$f(2n) = f(n)+f(2n-1) = f(n) + f(2n-2) = f(n)+f(n-1)+ f(2n-4) = \cdots = f(n)+f(n-1)+ \cdots +f(1) + 1$$

ดังนั้น เราได้สูตรใหม่

$$f(2n) = f(n) + f(n-1) + \cdots + f(1) + 1 \tag{8.10.5}$$

ค่าขอบเขตบนของ $f(2^n)$ หาได้โดยง่ายโดยการอุปนัย ดังแสดงต่อไปนี้

$$f(2^n) = f(2^{n-1}) + f(2^{n-1} - 1) + f(2^{n-1} - 2) + \cdots + f(1) + 1$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด จึงได้ $f(2^{n-1} - i) \le f(2^{n-1})$ สำหรับทุก $i = 1,\ldots, 2^{n-1} - 2$

เราจะแสดงโดยการอุปนัยว่า $f(2^n) < 2^{n^2/2}$ $(n \ge 2)$

เมื่อ $n = 2$ เราพบว่า $f(2) = 2 < 2^{2^2/2}$ เป็นจริง

สมมติว่าจริงเมื่อ $n - 1$ (≥ 2) จากอสมการที่ได้ข้างต้นพบว่า

$$\begin{aligned} f(2^n) &\le (2^{n-1}-1)f(2^{n-1}) + f(1) + 1 \\ &= (2^{n-1}-1)f(2^{n-1}) + 2 \\ &< (2^{n-1}-1)\,2^{(n-1)^2/2} + 2^{(n-1)^2/2} \qquad (n \ge 3) \\ &= 2^{n-1+((n-1)^2/2)} = 2^{(n^2-1)/2} < 2^{n^2/2} \end{aligned}$$

ซึ่งให้ค่าขอบเขตบนที่ต้องการ ในส่วนของค่าขอบเขตล่าง ให้ Df เป็นฟังก์ชันผลต่างที่นิยามโดย

$$Df(n) = f(n+1) - f(n)$$

ฟังก์ชัน Df เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด บนคู่ของจำนวนเต็ม $b \ge a \ge 0$ ที่มีความเป็นคู่-คี่เดียวกัน ทั้งนี้เพราะ ถ้า a, b เป็นคู่พร้อมกัน แล้ว $Df(b) = Df(a) = 0$ โดย (8.10.3) ในขณะที่ถ้า $a = 2k + 1$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว

$$Df(a) = f(2k+2) - f(2k+1) = f(2k+1) + f(k+1) - f(2k+1) = f(k+1) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$$

ซึ่งแสดงว่า ถ้า $b \ge a$ แล้ว $Df((b+1)/2) \ge Df((a+1)/2)$ เพราะ f เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด สรุปได้ว่า สำหรับ $b \ge a \ge 0$ ที่มีความเป็นคู่-คี่เดียวกัน เรามีว่า

$$f(b+1) - f(b) \ge f(a+1) - f(a) \qquad (8.10.6)$$

ให้ r เป็นจำนวนเต็มคู่ และ k เป็นจำนวนนับ โดยที่ $1 \le k \le r$ เมื่อประยุกต์ใช้ (6) พร้อมด้วย $b = r + j$, $a = r - j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$ แล้วบวกอสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน ได้

$$f(r+k) - f(r) \ge f(r+1) - f(r-k+1)$$

เนื่องจาก r เป็นคู่ จึงได้ว่า $f(r+1) = f(r)$ ดังนั้น $f(r+k) + f(r-k+1) \ge 2f(r)$
เมื่อบวกอสมการเหล่านี้ ตั้งแต่ $k = 1, 2, \ldots, r$ จะได้

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(2r) \ge 2rf(r) \qquad (8.10.7)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์ (8.10.5) ได้ $f(1) + f(2) + \cdots + f(2r) = f(4r) - 1$
เมื่อพิจารณาร่วมกับความสัมพันธ์ (8.10.7) ได้ $f(4r) \ge 2rf(r)$
เมื่อแทนค่า $r = 2^{n-2}$, $n \ge 3$ จะได้

$$f(2^n) \ge 2^{n-1} f(2^{n-2}) \qquad (8.10.8)$$

ค่าขอบเขตล่าง $2^{n^2/4} < f(2^n)$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2, 3, 4$ ยกตัวอย่างเช่น เมื่อใช้ (8.10.5) จะได้

$$f(2^2) = f(2) + f(1) + 1 = 2 + 1 + 1 = 4 > 2^{2^2/4}$$
$$f(2^3) = f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + 1 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1 > 2^{9/4}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$f(2^4) = f(8) + f(7) + f(6) + f(5) + f(4) + \cdots + 1 = 37 > 2^4$$

จาก (8.10.8) เมื่อ $n - 2 \ge 2$ เราได้จากการอุปนัยว่า

$$f(2^n) \ge 2^{n-1} f(2^{n-2}) > 2^{n-1} 2^{(n-2)^2/4} = 2^{n^2/4}$$

ตัวอย่าง 8.11 (Putnam 1973) พิจารณาจำนวนเต็ม $p > 1$ ที่มีสมบัติว่า พหุนาม $x^2 - x + p$ มีค่าเป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับทุกจำนวนเต็ม x ที่อยู่ในช่วง $0 \le x < p$ (ยกตัวอย่าง เช่น $p = 5$, $p = 41$ มีสมบัตินี้) จงแสดงว่ามีจำนวนเต็ม a, b, c อย่างละหนึ่งเดียวพอดี ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$b^2 - 4ac = 1 - 4p, \quad 0 < a \le c, \quad -a \le b < a$$

วิธีทำ ชุด (a, b, c) ชุดหนึ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ คือ (1, –1, p) เราจะแสดงว่าชุดนี้เป็นเพียงชุดเดียว เห็นได้ชัดเจนว่า b ต้องเป็นคี่ เพราะ $b^2 \equiv 1 \pmod 4$ จาก $b^2 = (-b)^2$ จึงเขียนได้ว่า $|b| = 2x - 1$
ดังนั้น $b^2 - 4ac = 1 - 4p$ ให้ว่า $x^2 - x + p = ac$

ถ้า $0 \le x < p$ จากสมมุติฐาน ได้ว่า ac เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นเงื่อนไข $0 < a \le c$ ซึ่งชี้ว่า $a = 1$
จาก $-a \le b < a$ และความเป็นคี่ของ b ได้ $b = -1$ และ $1 - 4p = b^2 - 4ac = 1 - 4c$ ซึ่งให้ $c = p$ เราเหลือต้องตรวจว่า $0 \le x < p$ จริง

เนื่องจาก $x = \frac{1}{2}(|b| + 1) \ge 0$ จึงเหลือเพียงแสดงว่า $x < p$ เนื่องจาก $|b| \le a \le c$, $b^2 - 4ac = 1 - 4p$
ดังนั้น $3a^2 = 4a^2 - a^2 \le 4ac - b^2 = 4p - 1$ ซึ่งให้

$$|b| \le a \le \sqrt{\frac{4p-1}{3}} \quad \text{และ} \quad x = \frac{1}{2}(|b| + 1) < \sqrt{\frac{p}{3}} + \frac{1}{2} < p$$

ตัวอย่าง 8.12 (USAMO 1972) ให้ R เป็นจำนวนตรรกยะไม่ติดลบ จงหาจำนวนเต็ม a, b, c, d, e , f ชุดหนึ่งที่มีสมบัติว่า สำหรับทุกค่าที่เป็นไปได้ของ R จะได้ว่า

$$\left|\frac{aR^2 + bR + c}{dR^2 + eR + f} - \sqrt[3]{2}\right| < \left|R - \sqrt[3]{2}\right|$$

วิธีทำ ให้ $f(R) = \dfrac{aR^2 + bR + c}{dR^2 + eR + f}$ โจทย์ต้องการให้หาชุดของจำนวนเต็ม a, b, c, d, e, f ที่ทำให้ f(R) ประมาณค่า $\sqrt[3]{2}$ ได้ดีกว่า R ไม่ว่า R จะเป็นจำนวนตรรกยะไม่ติดลบใด ๆ สังเกตว่านิพจน์ทางขวาของอสมการ $\to 0$ เมื่อ $R \to \sqrt[3]{2}$ ซึ่งชี้ว่า ค่าทางซ้ายมือต้องเป็น 0 ถ้าแทนค่า $R = \sqrt[3]{2}$
ดังนั้น $a \cdot 2^{2/3} + b \cdot 2^{1/3} + c = 2d + e \cdot 2^{2/3} + f \cdot 2^{1/3}$ แสดงว่า ควรจะเลือก

$$a = e, \; b = f, \; c = 2d \qquad (8.12.1)$$

เมื่อแทนค่าชุดนี้เข้าไปในอสมการของโจทย์ แล้ว หารตลอดด้วยตัวประกอบร่วม $\left|R - \sqrt[3]{2}\right|$ ได้

$$\left|aR + b - d \cdot 2^{1/3}(R + 2^{1/3})\right| \le \left|dR^2 + aR + b\right|$$

การที่จะทำให้อสมการท้ายนี้เป็นจริง เพียงพอที่จะเลือก a, b, d เป็นจำนวนเต็มบวก ที่ทำให้นิพจน์ภายใต้ค่าสัมบูรณ์ทางซ้ายมือเป็นบวก เช่น $d = 1$, $a = b = 2$ เมื่อแทนค่านี้พร้อมด้วย (8.12.1) และพิจารณาย้อนขั้นตอนขึ้นไป จะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 8.13 (USAMO 1981) ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนนับ แล้วจงพิสูจน์ว่า

$$[nx] > \frac{[x]}{1} + \frac{[2x]}{2} + \frac{[3x]}{3} + \cdots + \frac{[nx]}{n}$$

เมื่อ [.] คือฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม

วิธีทำ ถ้า k เป็นจำนวนเต็ม แล้วจากสมบัติของฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม ได้ $[k + x] = k + [x]$ ดังนั้น ในการพิสูจน์อสมการของโจทย์ จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์อสมการดังกล่าว เมื่อ $0 < x < 1$ นอกจากนี้ สังเกตว่า ทั้งสองข้างของอสมการ เป็นฟังก์ชันไม่ลดของ x ที่มีค่าคงตัวเป็นส่วน ๆ โดยที่นิพจน์ทางขวาของอสมการ เพิ่มค่าเพียง ณ จุดตรรกยะ $x = \frac{p}{q}$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนนับที่เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน, $2 \le q \le n$, $1 \le p \le q - 1$ ดังนั้น จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่าอสมการเป็นจริง ณ จุดดังกล่าว

สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, n$ ให้ a_k, b_k เป็นจำนวนเต็มที่นิยามโดยการตั้งหาร kp ด้วย q กล่าวคือ

$$kp = a_k q + b_k, \qquad 0 \le b_k < q$$

อสมการที่ต้องการพิสูจน์ เปลี่ยนรูปเป็น $a_n \ge a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}$

เนื่องจาก $(p, q) = 1$ เราจะแสดงว่า จำนวนเต็ม $b_1, b_2, \ldots, b_{q-1}$ คือ การจัดเรียงบางรูปแบบของ $1, 2, \ldots, q - 1$ ทั้งนี้ เพราะ ถ้ามี b_i, b_j ที่มีสมบัติว่า $b_i \equiv b_j \pmod q$, $ip = a_i p + b_i$, $jp = a_j p + b_j$ $(i, j \in \{1,2,\ldots, q - 1\})$ แล้ว เมื่อลบกัน จะได้ $(i - j)p = mq$ สำหรับบางจำนวนเต็ม m ดังนั้น $q \mid (i - j)$ ซึ่งบังคับว่า $i = j$ โดยอสมการว่าด้วยการจัดเรียง ได้ $b_1 + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{3} + \cdots + \frac{b_{q-1}}{q-1} \ge (q-1)\frac{1}{q-1} + \cdots + 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{1} = q - 1$

ดังนั้น

$$a_n + \frac{q-1}{q} \ge a_n + \frac{b_n}{q} = \frac{np}{q} = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \frac{1}{q}\left(b_1 + \frac{b_2}{2} + \cdots + \frac{b_n}{n}\right)$$

$$\ge a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \frac{q-1}{q} \qquad (\text{เพราะ } n \ge q)$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 8.14 (USAMO 1983) พิจารณาช่วงเปิดที่มีความยาว $\frac{1}{n}$ บนเส้นจำนวนจริง เมื่อ n เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า จำนวนเศษส่วนอย่างต่ำ $\frac{p}{q}$ ที่มีตัวส่วนสอดคล้องกับ $1 \le q \le n$ ที่มีค่าอยู่ในช่วงนี้ มีจำนวนอย่างมาก $\frac{1}{2}(n + 1)$

วิธีทำ ให้ช่วงเปิดที่พิจารณาเป็น $(a, a + \frac{1}{n})$ แบ่งจำนวนตรรกยะในช่วงนี้ออกเป็นสองเซตย่อยที่ต่างสมาชิกกัน

คือเป็นเซต $\{ \frac{u_i}{v_i} ; i = 1, 2,..., r\}$ ซึ่งเป็นเซตของเศษส่วนอย่างต่ำที่มีตัวส่วนสอดคล้องกับ $1 \le v_i \le \frac{n}{2}$ และเซต $\{ \frac{x_i}{y_i} ; i = 1, 2,..., s\}$ ซึ่งเป็นเซตที่ประกอบด้วยเศษส่วนอย่างต่ำที่มีตัวส่วนสอดคล้องกับ $\frac{n}{2} < y_i \le n$

สังเกตว่าเมื่อ $i \in \{1,2,...,r\}$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม v_i จะมีจำนวนเต็ม c_i ที่ทำให้ $\frac{n}{2} \le c_i v_i \le n$ จากนี้นิยาม

$$y_{s+i} = c_i v_i \text{ และ } x_{s+i} = c_i u_i$$

จะได้ว่าไม่มีสมาชิกสองตัวใด ๆ ในเซต $\{y_i ; 1 \le i \le r + s\}$ มีค่าเดียวกัน ทั้งนี้เพราะ ถ้า $y_j = y_k$ แล้ว

$$\left| \frac{x_j}{y_j} - \frac{x_k}{y_k} \right| \ge \frac{1}{y_j} \ge \frac{1}{n}$$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่าความยาวของช่วงเปิด นี้ คือ 1/n เพราะฉะนั้น เศษส่วนอย่างต่ำที่แตกต่างกันในช่วงเปิดนี้จึงมีจำนวนเป็น $r + s \le n - \left[\frac{n}{2}\right] \le \frac{1}{2}(n + 1)$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 8.15 ให้ $a_1, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่แตกต่างกันในเซต $\{ 1,2, \ldots, 1950 \}$ มีสมบัติว่า ค.ร.น.(a_i,a_j) มีค่า > 1951 สำหรับทุก $i \neq j$ จงแสดงว่า $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2$

วิธีทำ จอทวนว่าปริมาณของพหุคูณของ b ที่มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง m คือ $\left[\frac{m}{b}\right]$ จากสมมติฐานของโจทย์ได้ว่า ไม่มีจำนวนเต็มใดๆ ในเซต $\{ 1,2, \ldots, 1951 \}$ ที่หารลงตัวได้ด้วย จำนวนเต็มสองจำนวนในเซต $\{a_1, \ldots, a_n\}$ พร้อมกัน ดังนั้นปริมาณของจำนวนเต็มในเซต $\{ 1,2, \ldots, 1951\}$ ที่หารลงตัวด้วยจำนวนเต็มหนึ่งตัวในเซต $\{a_1, \ldots, a_n\}$ คือ

$$\left[\frac{1951}{a_1}\right] + \left[\frac{1951}{a_2}\right] + \cdots + \left[\frac{1951}{a_n}\right]$$

ปริมาณนี้มีค่า ≤ 1951 ดังนั้น

$$\left(\frac{1951}{a_1} - 1\right) + \cdots + \left(\frac{1951}{a_n} - 1\right) < 1951$$

ซึ่งให้ว่า $$\frac{1951}{a_1} + \cdots + \frac{1951}{a_n} < n + 1951 < 2 \cdot 1951$$

ซึ่งให้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 8.16 (Albanian MO 2001) ให้ M_1, M_2 เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $a = 10^{10^{10}}$ หลักแรกของ $2-\sqrt{2}$ และ $\sqrt{2}-1$ ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

(a) $y_k = 9 - x_k$ เมื่อ x_k, y_k เป็นหลักที่ k ของภาคเศษส่วนของ $2-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$ ตามลำดับ

(b) ถ้า $\frac{13}{3} < M_1 < \frac{14}{3}$ แล้ว $\frac{13}{3} < M_2 < \frac{14}{3}$

วิธีทำ (a) สังเกตว่า $2-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}-1$ ทั้งคู่เป็นจำนวนอตรรกยะ $[2-\sqrt{2}] = [\sqrt{2}-1] = 0$ และ $\sqrt{2}-1 = 1-(2-\sqrt{2})$

เนื่องจาก $1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} + \cdots = 0.999999\cdots$ ดังนั้น

$$y_k = 9 - x_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, a) \text{ ตามต้องการ}$$

(b) จาก $M_2 = \frac{y_1 + \cdots + y_a}{a} = \frac{9a - (x_1 + \cdots + x_a)}{a} = 9 - M_1$

ดังนั้น เมื่อใช้อสมการที่กำหนดให้จะได้ว่า $M_2 = 9 - M_1 > 9 - \frac{14}{3} = \frac{13}{3}$ และ $M_2 = 9 - M_1 < 9 - \frac{13}{3} = \frac{14}{3}$

ตัวอย่าง 8.17 (Canadian MO 1979) ให้ $1 \le a < b < c < d < e$ เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]} \le \frac{15}{16}$$

เมื่อ $[m, n]$ แทนตัวคูณร่วมน้อยของ m, n (ยกตัวอย่าง เช่น $[4, 6] = 12$)

วิธีทำ ให้ $S := \frac{1}{[a,b]} + \frac{1}{[b,c]} + \frac{1}{[c,d]} + \frac{1}{[d,e]}$ เนื่องจาก $1 \le a < b < c < d < e$ ดังนั้น $[a, b] \ge 2a$, $[b, c] \ge 2b$, $[c, d] \ge 2c$, $[d, e] \ge 2d$ นอกจากนี้ ทราบด้วยว่า $b \ge 2$, $c \ge 3$

- **กรณีที่ 1:** $c = 3$

ถ้า $d = 4$ แล้ว $[a, b] = 2$, $[b, c] = 6$, $[c, d] = 12$, $[d, e] \ge 8$ ดังนั้น $S \le \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{21}{24} < \frac{15}{16}$

ถ้า $d \ge 5$ แล้ว $[c, d] \ge 6$, $[d, e] \ge 10$ ดังนั้น $S < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{28}{30} < \frac{15}{16}$

- **กรณีที่ 2** : $c \ge 4$

ถ้า $5 \le d \le 7$ แล้ว $[c, d] = 20, 28, 30, 35$ หรือ 42 ยกเว้น เมื่อ $c = 4$, $d = 6$ ดังนั้น

$$S \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} = \frac{18}{20} < \frac{15}{16}$$

ในขณะที่ เมื่อ $c = 4$, $d = 6$ แล้ว $S \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12} < \frac{15}{16}$

ถ้า $d \ge 8$ แล้ว $S \le \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

แบบฝึกหัด

1. (Moldova MO 1993) ลำดับของจำนวนนับ $\{a_k\}$ สอดคล้องกับอสมการ
$$a_k < a_{k+1} < a_k + 1994 \quad (k \geq 1)$$
จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเฉพาะที่เป็นตัวหารของสมาชิกในลำดับ $\{a_k\}$ เป็นจำนวนอนันต์

2. (APMC) จงหาจำนวนนับค่าน้อยสุด k ที่ทำให้เซต {16, 17,..., k – 1, k} บรรจุสมาชิก 15 จำนวน $b_1, b_2,..., b_{15}$ ซึ่งเฉพาะสัมพัทธ์เป็นคู่ ๆ และมีสมบัติว่า $m \mid b_m$ (m = 1, 2,..., 15)

3. (APMC) ให้ $n \in \mathbb{N}$, $a_n = [(3 + \sqrt{11})^{2n+1}]$ (เมื่อ [.] แทนภาคจำนวนเต็ม) จงหากำลังสูงสุดของ 2 ที่หาร a_n ได้ลงตัว

4. (Bulgarian MC 1999) จงหา $a \in \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่ทำให้ $|4a - 2| \leq 1$ และ $A = \frac{4a-1}{27a^4} \in \mathbb{Z}$

5. (Putnam 1993) จงหาจำนวนนับค่าน้อยสุด n ที่มีสมบัติว่า สำหรับทุก $m \in \mathbb{Z}$, $0 < m < 1993$ จะมี $k \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้ $\frac{m}{1993} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{1994}$

6. (Putnam 1988) สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ให้ r_n เป็นค่าต่ำสุดของ $|c - d\sqrt{3}|$ เมื่อแปร c, d ไปใน $\mathbb{N}_0$ ภายใต้เงื่อนไข $c + d = n$ จงหา พร้อมพิสูจน์ จำนวนจริงบวกค่าน้อยสุด g ที่มีสมบัติว่า
$$r_n \leq g \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

7. เมื่อเขียนจำนวนตรรกยะในช่วง (0, 1) ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ $\frac{a}{b}$ โดยที่ (a, b) = 1 พิจารณาช่วงปิด $\left[\frac{a}{b} - \frac{1}{4b^2}, \frac{a}{b} + \frac{1}{4b^2}\right]$ ซึ่งบรรจุจุด $\frac{a}{b}$ อยู่ภายใน จงแสดงว่าช่วงปิดนี้ ไม่บรรจุจุด $\frac{\sqrt{2}}{2}$

8. (Belarus MO 2002) ให้ $a, b \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า $|a\sqrt{2} - b| > \frac{1}{2(a+b)}$

9. (Belarus MO) ให้ $n > 1$ เป็นจำนวนนับ และ S เป็นผลบวกของทุกตัวหารของ n (รวม 1 และ n) จงพิสูจน์ว่า $k\sqrt{n} < S < \sqrt{2kn}$ เมื่อ k แทนจำนวนตัวหารของ n

10. ให้ $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ และให้ k เป็นจำนวนของจำนวนเฉพาะที่มีค่า $\leq x$ เลือกจำนวนนับ k + 1 จำนวนออกมาโดยที่ไม่มีจำนวนนับเหล่านี้ จำนวนใดหารผลคูณของจำนวนที่เหลือทั้งหมด
จงพิสูจน์ว่าในบรรดาจำนวนนับทั้ง k + 1 จำนวนนี้ มีอยู่จำนวนหนึ่งที่มีค่า > n

11. ให้ $\{x\} = x - [x]$ แทนภาคเศษส่วนของจำนวนจริง x จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

เรามีว่า $\sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{k} \leq \frac{1}{2}(n^2 - 1)$

12. (Ukrainian MO) จงหาจำนวนนับค่าน้อยสุด n ที่มีสมบัติว่า จากทุกจำนวนเต็ม n จำนวน จะมีอยู่ 18 จำนวน ที่มีผลบวกหารลงตัวด้วย 18

13. จงหาจำนวนเต็มค่าบวกน้อยสุด ที่เป็นพหุคูณของ 99 มีผลบวกหลักทั้งหมด เป็น 99 ตลอดจนมีสองหลักแรก และสองหลักสุดท้ายเป็น 97

14. (Romanian MC) ให้ p, q, r เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และให้ $A = \{p^a q^b r^c \ ; \ 0 \leq a, b, c \leq 5\}$ จงหาจำนวนนับค่าน้อยสุด n ที่มีสมบัติว่า เซตย่อยใด ๆ ของ A ที่มีสมาชิก n ตัว จะต้องบรรจุสมาชิกสองตัว ที่แตกต่างกัน x, y โดยที่ x หาร y ได้ลงตัว

15. ให้ X เป็นเซตของจำนวนนับ ที่เขียนในฐานสิบ แล้วไม่มีหลักใดซ้ำกันเลย สำหรับ $n \in X$ ให้ A_n เป็นเซตของจำนวนนับที่มีหลักเป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ n และให้ d_n เป็นตัวหารร่วมมากของบรรดาสมาชิกใน A_n จงหาค่ามากสุดที่เป็นไปได้ของ d_n

---

บทที่ 9
อสมการที่เกี่ยวข้องกับการนับ

มีโจทย์อสมการจำนวนมากในการแข่งขัน ที่เกี่ยวข้องกับการนับในรูปแบบต่าง ๆ โจทย์เหล่านี้นอกจากนับรวมเป็นโจทย์อสมการรูปแบบหนึ่งได้แล้ว อาจนับรวมเป็นหมวดหนึ่งในสาขาวิชาคอมบินาทอริกส์ (Combinaotics) ได้ด้วยเช่นกัน เทคนิคที่ใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาประเภทดังกล่าว มีหลากหลาย ที่พบอยู่ค่อนข้างสม่ำเสมอ ได้แก่ หลักการรังนกพิราบ การอุปนัย การเรียงสับเปลี่ยน (ซึ่งได้กล่าวถึงมาแล้ว ในบทว่าด้วยพหุนามสมมาตร) การนับเชิง Combinatorics

9.1 หลักการรังนกพิราบ

ถ้ามีนกพิราบอยู่ 4 ตัวแต่มีรังอยู่เพียง 3 รัง จะได้ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งรังที่มีนกพิราบอยู่ 2 ตัว แนวคิดนี้นำไปสู่หลักการรังนกพิราบซึ่งเป็นแนวคิดเชิงการจัดอย่างง่ายที่สามารถนำมาใช้ในทางปฏิบัติได้หลายสถานการณ์ สรุปได้เป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบท ให้ $n,k \in \mathbb{N}$ ถ้าแบ่งสิ่งของจำนวน $nk + 1$ สิ่ง ออกเป็น n กลุ่ม จะได้ว่า มีอย่างน้อยหนึ่งกลุ่มที่มีสิ่งของอย่างน้อย $k+1$ สิ่ง

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง ให้ $i = 1,2,\ldots,n$ และ m_i เป็นจำนวนของสิ่งของในกลุ่มที่ i
สมมุติว่าข้อสรุปของทฤษฎีบทไม่เป็นจริง กล่าวคือ แต่ละกลุ่มมีจำนวนสิ่งของไม่เกิน k สิ่ง
ดังนั้น $m_i \leq k$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ จะได้ว่า

$$nk + 1 \leq m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq k + k + \cdots + k = nk \text{ ขัดแย้ง}$$

ดังนั้นทฤษฎีบทเป็นจริง

ตัวอย่างการใช้ทฤษฎีบท เช่น มีลูกปัด จำนวน 13 ลูก แต่ละลูกมีสีได้เพียงสีเดียวจากทั้งหมดสามสี ดังนั้นโดยหลักการรังนกพิราบ สรุปได้ว่า มีอย่างน้อยหนึ่งสีที่มีลูกปัดอย่างน้อย 5 ลูก

ตัวอย่าง 9.1.1 จงพิสูจน์ว่าจากจำนวน 4 จำนวนที่แตกต่างกัน ใน (0, 1) สามารถเลือกมาได้ 2 จำนวน a, b ที่มีสมบัติว่า $\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > \frac{a}{2b} + \frac{b}{2a} - ab - \frac{1}{8ab}$

วิธีทำ จำนวนจริงในช่วง (0, 1) สามารถเขียนได้ในรูป cos A โดยที่ $A \in (0, \frac{\pi}{2})$ ดังนั้น จากจำนวนจริงสี่จำนวน โดยหลักการรังนกพิราบ สามารถเลือกมาได้สองจำนวน ให้เป็น a = cos A, b = cos B โดยที่

$$0 < A - B < \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

ดังนั้น

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) < \cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B = ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}$$

เมื่อจัดรูป ได้

$$2ab\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} > a^2 + b^2 - 2a^2b^2 - \frac{1}{4}$$

เมื่อหารตลอดด้วย 2ab ($\neq 0$) จะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 9.1.2 ให้ a, b, c, d, e, f, g เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบเจ็ดจำนวน ที่มีผลบวกเป็น 1 ให้

$$M = \max\{a + b + c, b + c + d, c + d + e, d + e + f, e + f + g\}$$

จงหาค่าต่ำสุดของ M ที่เป็นไปได้ เมื่อ a, b, c, d, e, f, g แปรไปเหนือเซตของจำนวนจริงไม่ติดลบตามเงื่อนไขดังกล่าว

วิธีทำ (วิธีที่ 1) สังเกตว่าในผลบวกที่นิยาม M จำนวนจริง a และ g ปรากฏเพียงครั้งเดียว จำนวนจริง b และ f ปรากฏสองครั้ง จำนวนจริง c, d และ e ปรากฏสามครั้ง ถ้าเราเติมจำนวนจริง a, a + b, f + g, g เข้าไปในกลุ่มของจำนวนที่นิยาม M พบว่า แต่ละจำนวนจาก a, b, c, d, e, f, g ปรากฏสามครั้งเท่ากัน และแต่ละจำนวนที่เติมเข้าไปนี้เป็นเพียงบางส่วนของจำนวนที่มีอยู่ก่อน ดังนั้น จึงไม่เปลี่ยนแปลงค่าของ M เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} M &= \max\{a + b + c, b + c + d, c + d + e, d + e + f, e + f + g\} \\ &= \max\{a, a + b, a + b + c. b + c + d, c + d + e, d + e + f, e + f + g, f + g, g\} \end{aligned}$$

ในกลุ่มหลังนี้มีทั้งสิ้น 9 จำนวน และมีผลบวกเป็น 3(a + b + c + d + e + f + g) = 3 ดังนั้น M $\geq$ ค่าเฉลี่ยของจำนวนทั้งเก้า = 3/9 = 1/3 โดยได้สมการ ก็ต่อเมื่อ ทั้งเก้าจำนวนนี้เท่ากัน และเท่ากับค่าเฉลี่ยด้วย กล่าวคือ

$$a = a + b = a + b + c = b + c + d = \cdots = g = \frac{1}{3}$$

ซึ่งให้ชุด 7- อันดับ

$$(a, b, c, d, e, f, g) = (\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$$

วิธีทำ (วิธีที่ 2) พิจารณาจำนวนจริงไม่ติดลบสามจำนวนต่อไปนี้ a + b + c, d + e + f, g ซึ่งมีผลบวกเป็น 1 สังเกตว่าทั้งสามจำนวนมีค่า $< \frac{1}{3}$ พร้อมกันไม่ได้ จึงได้ว่า M มีค่าอย่างน้อย $\frac{1}{3}$

เนื่องจาก ชุด 7-อันดับ (a, b, c, d, e, f, g) = $(\frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})$ ให้ค่า M = 1/3 ดังนั้นค่าต่ำสุดที่ต้องการคือ $\frac{1}{3}$

ตัวอย่าง 9.1.3 (Canadian MO 1984) จงพิสูจน์ว่า จากจำนวนจริง เจ็ดจำนวน $y_1, y_2, \ldots, y_7$ จะมีสองจำนวน y_i, y_j ที่มีสมบัติว่า

$$0 \le \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

วิธีทำ จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $\tan(x_i - x_j) = \frac{\tan x_i - \tan x_j}{1 + \tan x_i \tan x_j}$ ให้ $y_i = \tan x_i$ $(i = 1,\ldots,7)$

ค่าทั้งเจ็ดของ y_i แปรไปใน $(-\infty, \infty)$ ในขณะที่ x_i แปรไปใน $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ซึ่งเป็นช่วงที่มีความยาว π โดยหลักการรังนกพิราบ มีจำนวนจริง $x_i \ge x_j$ สองจำนวน ที่มีระยะห่างกันไม่เกิน $\frac{\pi}{6}$ กล่าวคือ $0 \le x_i - x_j \le \frac{\pi}{6}$

เนื่องจากฟังก์ชันแทนเจนต์ เพิ่มโดยแท้ ในช่วง $(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ ดังนั้น

$$0 = \tan 0 \le \tan(x_i - x_j) = \frac{\tan x_i - \tan x_j}{1 + \tan x_i \tan x_j} = \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \le \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ตัวอย่าง 9.1.4 (Putnam 1980)

(1) จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็ม a, b, c ไม่ทุกตัวเป็น 0 และแต่ละตัวมีค่าสัมบูรณ์ < 1,000,000 ที่ทำให้

$$\left| a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \right| < 10^{-11}$$

(2) ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็ม ไม่ทุกตัวเป็น 0 และแต่ละตัวมีค่าสัมบูรณ์ < 1,000,000 จงพิสูจน์ว่า

$$\left| a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \right| > 10^{-21}$$

วิธีทำ (1) ให้ $S := \{r + s\sqrt{2} + t\sqrt{3} \; ; r, s, t \in \{0, 1, \ldots, 10^6 - 1\}\}$ และให้ $d = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})10^6$

สังเกตว่า แต่ละ $x \in S$ มีค่าอยู่ในช่วง $0 \le x < d$ ให้ $e = \frac{d}{10^{18} - 1}$ แบ่งกั้นช่วงนี้ ออกเป็น ช่วงย่อยในรูป

$$(k - 1)e \le x < ke \quad (k = 1, 2, \ldots, 10^{18} - 1)$$

พบว่ามีทั้งสิ้น $10^{18} - 1$ ช่วงย่อย แต่มีสมาชิกในเซต S ทั้งสิ้น 10^{18} จำนวน

โดยหลักการรังนกพิราบ จะต้องมีสองจำนวนที่อยู่ในช่วงย่อยเดียวกัน ผลต่างของจำนวนทั้งสองนี้ อยู่ในรูป $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ โดยที่ a, b, c ทุกตัวมีค่าสัมบูรณ์ $< 10^{-6}$ ไม่ทุกตัวเป็น 0

และ เนื่องจาก $e < 10^{-11}$ จึงได้ว่า

$$\left| a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \right| < 10^{-11}$$

(2) ให้ $F_1 = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}$ และ F_2, F_3, F_4 เป็นจำนวนอื่นที่อยู่ในรูป $a \pm b\sqrt{2} \pm c\sqrt{3}$ โดยความเป็นอตรรกยะของ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ และจากการที่ไม่ทุกตัวจาก a, b, c เป็น 0 สามารถแสดงได้ว่า ทุก $F_i \neq 0$
นอกจากนี้ ผลคูณ $P = F_1F_2F_3F_4$ เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น $|P| \geq 1$ แสดงว่า

$$|F_1| \geq \frac{1}{|F_2F_3F_4|} > 10^{-21} \quad (\text{เพราะ } |F_i| < 10^7 \text{ ซึ่งให้ } \frac{1}{|F_i|} > 10^{-7} \text{ สำหรับแต่ละ } i)$$

ตัวอย่าง 9.1.5 (Korean MO 1994-1995) ให้ $m \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่ามีจำนวนเต็ม a, b ที่มีสมบัติต่อไปนี้

$$|a| \leq m, \ |b| \leq m, \ 0 < a + b\sqrt{2} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$$

วิธีทำ ให้ $f(x, y) = x + y\sqrt{2}$ และ $S = \{f(a, b) ; a, b \in \mathbb{Z}, 0 \leq a \leq m, 0 \leq b \leq m\}$
ถ้า $f(a, b) = f(a', b')$ แล้ว $a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}$ ซึ่งให้ว่า $a = a', b = b'$
ดังนั้น จำนวนสมาชิกใน S คือ $(m + 1)^2$ นอกจากนี้ ค่าสูงสุดใน S คือ $m + m\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})m$
ดังนั้น ถ้า $f(a, b) \in S$ แล้ว $0 \leq f(a, b) \leq (1 + \sqrt{2})m$
แบ่งช่วง $[0, (1 + \sqrt{2})m]$ ออกเป็น $m^2 + 2m$ ช่วงย่อย ดังนั้น ความยาวของช่วงย่อย คือ

$$\frac{(1+\sqrt{2})m}{m^2 + 2m} = \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$$

เนื่องจากจำนวนสมาชิกใน S คือ $(m+1)^2 = (m^2 + 2m) + 1$ โดยหลักการรังนกพิราบมีค่าสองค่า $f(a_1, b_1)$, $f(a_2, b_2) \in S$ ที่มีสมบัติว่า $f(a_1, b_1)$, $f(a_2, b_2)$ ที่อยู่ในช่วงย่อยเดียวกัน โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติ $f(a_1, b_1) > f(a_2, b_2)$
ดังนั้น $0 < f(a_1, b_1) - f(a_2, b_2) < \frac{1+\sqrt{2}}{m+2}$ ให้ $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$
ดังนั้น

$$f(a_1, b_1) - f(a_2, b_2) = f(a_1 - a_2, b_1 - b_2) = f(a, b) \ 0 < f(a, b) \leq \frac{1+\sqrt{2}}{m+2} \quad \text{และ } |a| \leq m, \ |b| \leq m$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 9.1.6 (Putnam 1979) ให้ $0 \leq p_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง $x \in [0, 1]$ ที่ทำให้

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|x - p_i|} \leq 8n\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)$$

วิธีทำ เมื่อ $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$ ให้ I_k แทนช่วงเปิด $\left(\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right)$ ในบรรดาช่วง I_k ทั้ง 2n ช่วง มีอยู่ n ช่วง ที่ไม่บรรจุ p_i ใด ๆ เลย

ให้วาง x_j ณ จุดกึ่งกลางของช่วง n ช่วงนี้ ให้

$$|x_j - p_i| = d_{ij} \text{ และ } B = 8n\{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\}$$

สำหรับแต่ละค่าตรึง i ค่า d_{ij} สอดคล้อง $d_{ij} \geq 1/4n$

นอกจากนี้สังเกตเพิ่มเติมว่า อย่างมากสองค่าของ d_{ij} ไม่สอดคล้องกับอสมการ $d_{ij} \geq 3/4n$ อย่างมากสี่ค่าไม่สอดคล้องกับอสมการ $d_{ij} \geq \frac{5}{4n}$ (ถ้ามี p_i หลายตัวในช่วงเดียวกัน มีทางเลือก x_j ให้อยู่ช่วงที่ห่างมากขึ้นได้) ฯลฯ
ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} \leq 2\sum_{h=0}^{n-1} \frac{4n}{1+2h} = B$$

(ค่าอสมการสามารถทำให้แข็งขึ้นได้) ซึ่งให้ว่า

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} \leq nB$$

เห็นได้ชัดว่า มีค่า j ที่ทำให้ $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d_{ij}} \leq B$ และค่า x_j ที่สอดคล้องกับ j นี้ ใช้เป็นค่า x ที่ต้องการได้

ตัวอย่าง 9.1.7 (IMO 1976) พิจารณาระบบที่ประกอบด้วย p สมการใน $q = 2p$ ตัวแปร $x_1, x_2, \ldots, x_q$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1q}x_q = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2q}x_q = 0$$
$$\cdots$$
$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pq}x_q = 0$$

โดยที่ทุกสัมประสิทธิ์ a_{ij} เป็นสมาชิกของเซต {–1, 0, 1} จงพิสูจน์ว่า ระบบนี้มีคำตอบ $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ ที่มีสมบัติว่า

(a) ทุก x_j (j = 1, 2, ..., q) เป็นจำนวนเต็ม
(b) มีอย่างน้อยหนึ่งค่าของ j ที่ทำให้ $x_j \neq 0$
(c) $|x_j| \leq q$ (j = 1, 2,..., q)

วิธีทำ ให้ $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ เป็น q-อันดับ ของจำนวนเต็มที่มีสมบัติว่า $|y_j| \leq p$ (j = 1, 2,..., q) ดังนั้น ค่าทางซ้ายมือของสมการที่ r (เมื่อแทน x_j ด้วย y_j) อยู่ระหว่าง $-pq$ กับ pq เพราะว่าสัมประสิทธิ์มีค่าเป็น –1, 0 หรือ 1 ซึ่งให้ว่า นิพจน์ทางซ้ายมือ $\sum_{i=1}^{q} a_{ri}y_i$ มีค่าที่เป็นไปได้อย่างมาก 2pq + 1 ค่า โดยที่ pq ค่าเป็นจำนวนเต็มบวก กับ pq ค่าเป็นจำนวนเต็มลบ และหนึ่งค่าเป็น 0

พิจารณา p-อันดับ ที่แต่ละพิกัดเป็นค่าทางซ้ายมือของระบบข้างต้น เนื่องจากแต่ละพิกัดมีค่าได้อย่างมาก 2pq + 1 ค่า จึงให้ว่าจำนวน p-อันดับ มีอย่างมาก $(2pq + 1)^p$ ชุดที่แตกต่างกัน นอกจากนี้ แต่ละ y_i เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าอยู่

ระหว่าง $-p$ และ p จึงมีทั้งสิ้น $2p+1$ ทางเลือกสำหรับแต่ละ y_i และเนื่องจากมี y_i อยู่ q ตัว ใน q-อันดับ จึงมีทั้งสิ้น $(2p+1)^q$ ชุดของ q-อันดับ ที่แตกต่างกัน

เนื่องจาก $q = 2p$ ดังนั้น จำนวน q-อันดับ $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ ที่มีค่า $|y_i| \le p$ มีทั้งสิ้น

$$(2p+1)^q = (2p+1)^{2p} = [(2p+1)^2]^p = [4p^2 + 4p + 1]^p$$

ในขณะที่จำนวน p-อันดับ $\left(\sum_{j=1}^{q} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{q} a_{2j}y_j, \ldots, \sum_{j=1}^{q} a_{pj}y_j\right)$ ของค่าที่เป็นไปได้มีอย่างมาก $(2pq+1)^p = (4p^2+1)^p$ แสดงว่ามีจำนวน q-อันดับ $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$ มากกว่า จำนวนค่า โดยหลักการรังนกพิราบ จะมี q-อันดับ ที่แตกต่างกันอย่างน้อยสองชุดที่ให้ค่าเดียวกันสำหรับนิพจน์ทางซ้ายมือ ให้ q-อันดับทั้งสองนี้เป็น

$$(y_1, y_2, \ldots, y_q) \quad \text{และ} \quad (z_1, z_2, \ldots, z_q)$$

เราจะแสดงว่า q-อันดับ $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ โดยที่ $x_j = y_j - z_j$ ซึ่งให้ $|x_j| \le 2p = q$ $(j = 1, 2, \ldots, q)$ เป็นคำตอบของโจทย์ที่ต้องการ ทั้งนี้เพราะ สังเกตว่า

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ri}y_i = \sum_{i=1}^{q} a_{ri}z_i \qquad (r = 1, 2, \ldots, p)$$

แล้ว

$$\sum_{i=1}^{q} a_{ri}x_i = \sum_{i=1}^{q} a_{ri}(y_i - z_i) = \sum_{i=1}^{q} a_{ri}y_i - \sum_{i=1}^{q} a_{ri}z_i = 0$$

แบบฝึกหัด

1. ให้ a, b, c, d, e, f, g, h เป็นจำนวนจริงแปดจำนวน จงพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งจำนวน จากจำนวนจริงหกจำนวนต่อไปนี้ที่มีค่าไม่เป็นลบ

$$ac + bd,\ ae + bf,\ ag + bh,\ ce + df,\ cg + dh,\ eg + fh$$

2. (Iranian MO) ให้ $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่ามีเซต $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ ที่มีสมบัติว่า

$$1 \le |S \cap \{i, i+1, i+2\}| \le 2 \quad \text{สำหรับ} \quad 1 \le i \le n-2$$

และ

$$\left|\sum_{i \in S} r_i\right| \ge \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{n} |r_i|$$

3. ให้ X เป็นเซต และนิยาม $X' := \{ s - t ; s, t \in X, s \neq t\}$
ให้ $S = \{1, 2,..., 2000\}$ พิจารณาเซตสองเซต $A, B \subseteq S$ ที่มีสมบัติว่า $|A| \cdot |B| \geq 3999$
จงพิสูจน์ว่า $A' \cap B' \neq \varnothing$

4. (Romanian MC) จงหาจำนวนนับค่ามากสุด n ที่ทำให้เงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง มี $x_1,..., x_n \in \mathbb{N}_0$ ไม่ทุกจำนวนเป็น 0 ที่มีสมบัติว่า สำหรับทุกลำดับ $e_1,..., e_n$ ของสมาชิกจากเซต {–1, 0, 1} ที่ไม่ทุกจำนวนเป็น 0 แล้ว n^3 หาร $e_1x_1 + \cdots + e_nx_n$ ไม่ลงตัว

5. (APMC) พิจารณารูปลูกบาศก์ที่มีจุดยอด ณ $(\pm1, \pm1, \pm1)$ กล่าวคือรูปลูกบาศก์นี้ คือ เซต $\{ (x, y, z) ; |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \}$ ให้ $V_1,..., V_{95}$ เป็นจุดที่อยู่ภายในหรือบนรูปลูกบาศก์นี้ ให้ $\mathbf{v}_i$ เป็นเวกเตอร์จาก (0, 0, 0) ไปยัง V_i พิจารณาเวกเตอร์ 2^{95} เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$s_1\mathbf{v}_1 + \cdots + s_{95}\mathbf{v}_{95} \quad \text{เมื่อ } s_i \in \{-1, 1\}$$

(i) ให้ $d = 48$ จงแสดงว่าจากเวกเตอร์ทั้งหมด มีเวกเตอร์ $\mathbf{w} = (a, b, c)$ ที่ทำให้ $a^2 + b^2 + c^2 \leq d$

(ii) จงหา $d < 48$ ที่มีสมบัติเช่นใน (i)

9.2 การอุปนัย

ตัวอย่าง 9.2.1 (AMOC 1987) ให้ $n \in \mathbb{N}, n > 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

วิธีทำ เมื่อ $n = 2$ ค่าทางซ้ายมือ $= \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{3} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ = ค่าทางขวามือ

สมมุติ เพื่อการอุปนัยว่า อสมการเป็นจริง ณ $n > 1$ เมื่อบวก $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ เข้าทั้งสองข้าง ได้

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} &< \sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &< \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{(n+1)+1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{2} \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่าอสมการที่ต้องการเป็นจริง โดยการอุปนัย

ตัวอย่าง 9.2.2 ให้ $n \geq 4$; $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0$; $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_nx_1 \leq \frac{1}{4}$$

วิธีทำ กรณี $n = 4$ เป็นจริง จากการสังเกตว่า

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 &= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3(1 - x_1 - x_2 - x_3) + (1 - x_1 - x_2 - x_3)x_1 \\ &= x_1 + x_3 - 2x_1x_3 - x_3^2 - x_1^2 \\ &= x_1 + x_3 - (x_1 + x_3)^2 \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

โดยที่อสมการท้ายนี้ มาจากการพิจารณา พาราโบลาคว่ำ $y = x - x^2$ ที่มีค่า ณ จุดยอดเป็น ¼

สมมุติว่า อสมการเป็นจริงสำหรับ n (≥ 4) ตัวแปร และพิจารณา กรณี $n + 1$ ตัวแปร ดังนั้น

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_{n+1} + x_{n+1}x_1 &= x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + (x_{n-1} + x_{n+1})x_n + x_{n+1}x_1 \\ &\leq x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + (x_{n-1} + x_{n+1})x_n + (x_{n-1} + x_{n+1})x_1 \end{aligned}$$

เมื่อให้ $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, ... , $y_{n-2} = x_{n-2}$, $y_{n-1} = x_{n-1} + x_{n+1}$, $y_n = x_n$ ซึ่งเป็น n ตัวแปรที่มีผลบวกเป็น 1 โดยสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ว่า

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n+1}x_1 \leq y_1y_2 + y_2y_3 + \cdots + y_ny_1 \leq \frac{1}{4}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 9.2.3 ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$

วิธีทำ เมื่อ n แปรไปเหนือเซตของจำนวนนับ นิพจน์ทางซ้ายมือ ก่อให้เกิดลำดับ $\{a_n\}$ โดยที่

$$a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$

ในขณะที่นิพจน์ทางขวามือ ก่อให้เกิดลำดับ $\{b_n\}$ โดยที่

$$b_n = \frac{3n}{2n+1}$$

โจทย์ของเราจึงกลายเป็นการพิสูจน์ว่า $a_n > b_n$ ($n \in \mathbb{N}$) สังเกตว่า $a_1 = b_1$ สังเกตว่าทั้งลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับเพิ่ม เริ่มต้นจาก a_1 และ b_1 ตามลำดับ พิจารณาขนาดของการเพิ่มพจน์ต่อพจน์ กล่าวคือ $a_n - a_{n-1}$, $b_n - b_{n-1}$ พบว่า

$$b_n - b_{n-1} = \frac{3n}{2n+1} - \frac{3(n-1)}{2(n-1)+1} = \frac{3}{4n^2 - 1} < \frac{3+1}{4n^2} = \frac{1}{n^2} = a_n - a_{n-1}$$

สำหรับทุกจำนวนนับ $n > 1$ ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ เพิ่มขึ้นเร็วกว่าลำดับ $\{b_n\}$ เพราะว่า $a_n > b_n$

ตัวอย่าง 9.2.4 ให้ $a_1,\ldots, a_n \in \mathbb{N}$ มีสมบัติว่า $a_1 \le \cdots \le a_n$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1$ แล้ว $a_n < 2^{n!}$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้แสดงวิธีการอุปนัยถอยหลัง ซึ่งน่าสนใจมาก สมมุติว่า $a_n \ge 2^{n!}$ เราจะหาข้อขัดแย้งโดยการอุปนัยถอยหลังเพื่อแสดงว่า $a_k \ge 2^{k!}$ เมื่อ $k = 1,2,\ldots,n$

สมมุติว่าสิ่งนี้เป็นจริงเมื่อ $k = n , n-1 ,\ldots , m+1$

ดังนั้น
$$\frac{1}{a_m} \le \sqrt[m]{\frac{1}{a_1a_2\cdots a_m}} \le \sqrt[m]{1-\frac{1}{a_1}-\cdots-\frac{1}{a_m}}$$
$$= \sqrt[m]{\frac{1}{a_{m+1}}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \le \sqrt[m]{\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{2^{i!}}} \le \frac{1}{2^{m!}}$$

ขั้นตอนสุดท้ายคือสังเกตว่า
$$\frac{1}{2^{1!}} + \frac{1}{2^{2!}} + \cdots + \frac{1}{2^{k!}} < 1$$
เป็นข้อขัดแย้งที่ต้องการ

ตัวอย่าง 9.2.5 ให้ $a_1, a_2, \ldots , a_n \in \mathbb{R}^+$ $(n \ge 2)$ จงพิสูจน์ว่า
$$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1)\cdots(a_n^3 + 1) \ge (a_1^2a_2 + 1)(a_2^2a_3 + 1) \cdots (a_n^2a_1 + 1)$$

วิธีทำ เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยบน n กรณี $n = 2$ ได้ว่า

$(a_1^3 + 1)(a_2^3 + 1) \ge (a_1^2a_2 + 1)(a_2^2a_1 + 1) \Leftrightarrow a_1^3a_2^3 + a_1^3 + a_2^3 + 1 \ge a_1^3a_2^3 + a_1^2a_2 + a_1a_2^2 + 1$

$\Leftrightarrow a_1^2(a_1 - a_2) + a_2^2(a_2 - a_1) \ge 0 \quad \Leftrightarrow (a_1^2 - a_2^2)(a_1 - a_2) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2(a_1 + a_2) \ge 0$ อสมการท้ายนี้เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนบวก a_1, a_2

แสดงว่าอสมการที่ต้องการพิสูจน์ เป็นจริงเมื่อ $n = 2$

สมมุติว่าอสมการที่ต้องการพิสูจน์ เป็นจริงสำหรับบาง $n \ge 2$ เราจะพิสูจน์ว่าเป็นจริง ณ $n + 1$

สังเกตว่า อสมการ $(a_1^3 + 1)\ldots(a_n^3 + 1)(a_{n+1}^3 + 1) \ge (a_1^2a_2 + 1)\ldots(a_n^2a_{n+1} + 1)(a_{n+1}^2a_1 + 1)$ จะเป็นจริง (เมื่อใช้สมมุติฐานของการอุปนัยแล้ว) ถ้าเงื่อนไขต่อไปนี้เป็นจริง

$$a_{n+1}^3 + 1 \ge \frac{(a_n^2a_{n+1}+1)(a_{n+1}^2a_1+1)}{a_n^2a_1+1}$$

$\Leftrightarrow (a_{n+1}^3 + 1)(a_n^2a_1 + 1) \ge (a_n^2a_{n+1} + 1)(a_{n+1}^2a_1 + 1)$

$\Leftrightarrow a_{n+1}^3a_n^2a_1 + a_n^2a_1 + a_{n+1}^3 + 1 \ge a_{n+1}^3a_n^2a_1 + a_{n+1}a_n^2 + a_{n+1}^2a_1 + 1$

$\Leftrightarrow a_n^2(a_1 - a_{n+1}) + a_{n+1}^2(a_{n+1} - a_1) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a_{n+1} - a_1)(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) \ge 0$

อสมการท้ายนี้ ไม่เป็นจริงในกรณีทั่วไป อย่างไรก็ตาม อสมการแรกเริ่มมีความสมมาตรเชิงวงจร ซึ่งหมายความว่าไม่แปรเปลี่ยนภายใต้การแทน n-อันดับ ของจำนวนบวก $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ด้วย n-อันดับใด ๆ จาก $(a_2, a_3, \ldots, a_n, a_1)$, $(a_3, a_4, \ldots, a_n, a_1, a_2), \ldots, (a_n, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$

ดังนั้น เราสามารถ จัดเรียงใหม่ในตอนเริ่มต้น จาก (n + 1)-อันดับ $(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ ที่กำหนดมาให้ ในลักษณะสมมาตรเชิงวงจร เพื่อทำให้ค่า a_{n+1} เป็นค่าสูงสุด ในบรรดา a_i ทั้งหมด ดังนั้น $a_{n+1} - a_1$ และ $a_{n+1} - a_n$ มีค่าไม่เป็นลบ และอสมการที่ต้องการเป็นจริง เป็นอันสิ้นสุดการพิสูจน์โดยการอุปนัย

ตัวอย่าง 9.2.6 (APMO) ให้ $a_1, a_2, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $a_{i+j} \le a_i + a_j$ สำหรับทุก i, j = 1, 2, ... จงพิสูจน์ว่า $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \ge n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

วิธีทำ ให้ $b_i = \frac{a_i}{i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ คือ $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ge a_n$ $(n \in \mathbb{N})$ เราจะพิสูจน์อสมการนี้โดยการอุปนัยบน n

เมื่อ $n = 1$, $b_1 = a_1 \ge a_1$ แสดงว่ากรณีนี้จริง

ลำดับต่อไป สมมุติว่า $b_1 + b_2 + \cdots + b_k \ge a_k$ เมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n-1$

การที่จะแสดงว่า $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \ge a_n$ เพียงพอที่จะแสดงว่า $nb_1 + nb_2 + \cdots + nb_{n-1} \ge (n-1)a_n$

เพื่อการนี้ สังเกตว่า

$$\begin{aligned} nb_1 + nb_2 + \cdots + nb_{n-1} &= (n-1)b_1 + (n-2)b_2 + \cdots + b_{n-1} + b_1 + 2b_2 + \cdots + (n-1)b_{n-1} \\ &= b_1 + (b_1 + b_2) + \cdots + (b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \quad (\text{เนื่องจาก} na_i = ib_i) \\ &\ge 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \quad (\text{โดยสมมุติฐานของการอุปนัย}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(a_i + a_{n-i}) \ge (n-1)a_n \quad (\text{จากเงื่อนไขที่กำหนดให้}) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 9.2.7 (APMO 1996) ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \le m$ จงพิสูจน์ว่า

$$2^n n! \le \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \le (m^2 + m)^n$$

วิธีทำ การพิสูจน์อสมการทางซ้ายมือ ทำได้โดยสังเกตว่าจาก

$$\binom{m+n}{2n} = \frac{(m+n)!}{(2n)!(m-n)!} \ge 1$$

ได้ว่า

$$\frac{(m+n)!}{(m-n)!} \ge (2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)2n \ge 2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)2n = 2^n n!$$

การพิสูจน์ อสมการทางขวามือ ทำโดยการอุปนัยบน n (โดยตรึง m)

เมื่อ n = 1 ได้ว่า $\frac{(m+1)!}{(m-1)!} = m(m+1) = m^2 + m$ ดังนั้น อสมการที่ต้องการเป็นจริง

สมมุติว่าอสมการที่ต้องการเป็นจริงสำหรับ k , $1 \le k \le m-1$ กล่าวคือ

$$\frac{(m+k)!}{(m-k)!} \le (m^2 + m)^k$$

เนื่องจาก $(m-k)(m+k+1) = m^2 + m - k^2 - k \le m^2 + m$ เมื่อคูณตลอดด้วยอสมการที่ได้จากสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ว่า

$$(m-k)(m+k+1)\frac{(m+k)!}{(m-k)!} \le (m^2+m)(m^2+m)^k \quad \text{ซึ่งคือ} \quad \frac{(m+k+1)!}{(m-k-1)!} \le (m^2+m)^{k+1}$$

ตามต้องการ

ตัวอย่าง 9.2.8 (IMO 1991) เรียกลำดับอนันต์ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ของจำนวนจริง ว่าเป็นลำดับมีขอบเขต เมื่อมีค่าคงตัว C ที่ทำให้ $|x_i| \le C$ สำหรับทุก $i \ge 0$

กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่มีค่า > 1 จงสร้างลำดับอนันต์มีขอบเขต $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ที่มีสมบัติว่า

$$|x_i - x_j| \cdot |i-j|^a \ge 1 \quad \text{สำหรับทุกคู่ของจำนวนเต็มไม่ติดลบ } i, j$$

วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง $a > 1$ เป็นที่ทราบกันดีว่า มีค่าคงตัวจำกัด C_a ที่มีสมบัติว่า

$$\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \cdots + \frac{1}{n^a} < C_a \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ให้ $x_0 = 0$ และตรึงจำนวนเต็ม $k \ge 1$ มาจำนวนหนึ่ง สมมุติว่า เราได้สร้าง $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ มาแล้วที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$|x_i| \le C_a, \qquad |x_i - x_j| \cdot |i-j|^a \ge 1 \qquad (i, j \in \{0, \ldots, k-1\}, i \ne j) \qquad (9.2.8.1)$$

พิจารณาช่วงปิด $J_i = [x_i - d_i, x_i + d_i]$ เมื่อ $d_i = \frac{1}{(k-i)^a}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ ผลรวมของความยาวช่วงทั้งหมด มีค่าไม่เกิน $2d_0 + \cdots + 2d_{k-1} < 2C_a$ (โดย (9.2.8.1))

ดังนั้น เราสามารถหาจำนวนจริง $x_k \in [-C_a, C_a]$ ที่ไม่อยู่ในช่วงใดจาก $J_0, \ldots, J_{k-1}$ ซึ่งหมายความว่า อสมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับ $i = 0, \ldots, k-1$:

$$|x_k| \le C_a, \qquad |x_k - x_i| > d_i = \frac{1}{(k-i)^a}$$

ซึ่งแสดงว่าเงื่อนไข (9.2.8.1) เป็นจริงสำหรับ $i, j \in \{0, \ldots, k\}$, $i \ne j$ กล่าวคือ การสร้างลำดับดังกล่าว เสร็จสิ้นโดยวิธีการอุปนัย

ตัวอย่าง 9.2.9 (IMO 1985) สำหรับพหุนาม $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$ ที่มีสัมประสิทธิ์ a_i เป็นจำนวนเต็ม ให้ $w(P)$ แทนจำนวนของสัมประสิทธิ์ในพหุนาม P ที่เป็นจำนวนคี่ ให้ $Q_i(X) = (1 + X)^i$ $(i = 0, 1, 2,\ldots)$
จงพิสูจน์ว่า ถ้า $i_1, i_2,\ldots, i_n$ เป็นจำนวนเต็มที่มีสมบัติว่า $0 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_n$ แล้ว

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}) \ge w(Q_{i_1})$$

วิธีทำ ก. ในกรณีพิเศษที่ $k = 2^m$ ทุกสัมประสิทธิ์ในการกระจาย $(1 + x)^k$ ยกเว้นสัมประสิทธิ์แรกและสัมประสิทธิ์สุดท้ายมีค่าเป็นคู่ ดังนั้น $(1 + x)^k \equiv 1 + x^k \pmod 2$

ข. ถ้า R , S เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มและ $\deg R < k$ แล้ว $w(R + x^kS) = w(R) + w(S)$ ทั้งนี้เพราะทุกพจน์ใน R มีดีกรีต่ำกว่าทุกพจน์ใน x^kS

ค. อสมการสามเหลี่ยม $w(R + S) \le w(R) + w(S)$ เป็นจริง ทั้งนี้เพราะผลบวกของสัมประสิทธิ์ที่เป็นคี่ของดีกรีเดียวกันใน R และ S ก่อให้เกิดสัมประสิทธิ์คู่ใน R + S แต่ผลบวกของสัมประสิทธิ์ที่เป็นคู่ ไม่ก่อให้เกิดสัมประสิทธิ์ที่เป็นคี่

เราจะพิสูจน์ผลของโจทย์โดยการอุปนัยบน i_n
กรณี $i_n = 0$ อสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน
กรณี $i_n = 1$ เรามีว่า $n = 1$ หรือ 2 เท่านั้น ซึ่งอสมการที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจนเช่นกัน
สมมุติ $i_n > 1$ เลือก m โดยที่ $k = 2^m \le i_n < 2^{m+1}$ และให้

$$Q = Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_n}$$

พิจารณาทางที่เป็นไปได้สองทางคือ (a) $i_1 < k$ หรือ (b) $i_1 \ge k$

- **กรณี (a)** เลือก r โดยที่ $i_r < k \le i_{r+1}$ และให้ $Q = Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_r} + Q_{i_{r+1}} + \cdots + Q_{i_n} = R + (1 + x)^kS$

เมื่อ $R = Q_{i_1} + Q_{i_2} + \cdots + Q_{i_r}$, $(1 + x)^kS = Q_{i_{r+1}} + \cdots + Q_{i_n}$ โดยที่ $\deg R$ และ $\deg S < k$
สังเกตว่าจาก

$$\begin{aligned} w(Q) &= w(R + (1 + x)^kS) && \text{(จาก ก.)} \\ &= w(R + S + x^kS) \\ &= w(R + S) + w(S) && \text{(จาก ข.)} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $R = R + S - S$ และ $w(S) = w(-S)$ อสมการสามเหลี่ยมใน ค. ให้

$$w(R) \le w(R + S) + w(S)$$

เพราะฉะนั้น $w(Q) \ge w(R)$ โดยสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ว่า $w(R) \ge w(Q_{i_1})$ ในกรณีนี้จึงได้ว่า $w(Q) \ge w(Q_{i_1})$

- **กรณี (b)** $i_1 \ge k = 2^m$ ให้ $Q_{i_1} = (1 + x)^kR$, $Q = (1 + x)^kS$

เนื่องจาก $i_n < 2^{m+1}$ จึงได้ว่า $\deg R$ และ $\deg S < k$
โดย ก. และ ข. ได้ $w(Q) = w(S + x^kS) = 2w(S)$ โดยสมมุติฐานของการอุปนัยได้ $W(S) \ge w(R)$
ดังนั้น $w(Q) \ge 2w(R) = w(R + x^kR) = w(Q_{i_1})$ เป็นอันสิ้นสุดการพิสูจน์

ตัวอย่าง 9.2.10 (Putnam 1978) ให้ p และ n เป็นจำนวนนับ

สมมุติว่าจำนวนจริง $c_{k,h}$ (h = 1, 2,...,n; k = 1, 2,..., ph) สอดคล้องกับอสมการ $0 \le c_{h,k} \le 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\sum \frac{c_{h,k}}{h}\right)^2 \le 2p \sum c_{h,k}$$

เมื่อแต่ละผลบวกกระทำเหนือ ทุกคู่อันดับที่เป็นไปได้ตามเงื่อนไขข้างต้น

วิธีทำ ให้ $a_h := \left(\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{ph} c_{h,k}\right)$ เห็นได้ชัดเจนว่า $0 \le a_h \le p$ เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยบน n ว่า

$$\left(\sum_{h=1}^{n} a_h\right)^2 \le 2p \sum_{h=1}^{n} h a_h$$

ซึ่งสมมูลกับสิ่งที่โจทย์ต้องการ

เมื่อ n = 1 ได้ $a_1^2 \le pa_1 \le 2pa_1$ ตามต้องการ

สมมุติว่าอสมการที่ต้องการเป็นจริงเมื่อ n = m

ดังนั้น

$$\left(\sum_{h=1}^{m+1} a_h\right)^2 = \left(\sum_{h=1}^{m} a_h\right)^2 + 2a_{m+1}\sum_{h=1}^{m} a_h + a_{m+1}^2 \le 2p\sum_{h=1}^{m} h a_h + 2a_{m+1}pm + 2pa_{m+1}$$

$$\le 2p\{(m+1)a_{m+1} + \sum_{h=1}^{m} h a_h\} = 2p\sum_{h=1}^{m+1} h a_h \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 9.2.11 (AMOC 1994) ให้ q เป็นจำนวนจริงบวก และ a_n, n = 1, 2,... เป็นจำนวนจริงที่นิยามโดย $a_0 = 1$, $a_1 = 1 + q$ และสำหรับทุกจำนวนนับ k สมมุติว่าสมการต่อไปนี้เป็นจริง

(i) $\frac{a_{2k-1}}{a_{2k-2}} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}$

(ii) $a_{2k} - a_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k}$

จงแสดงว่า สำหรับแต่ละ q ที่กำหนดมาให้ จะมีจำนวนนับ N ที่ทำให้ $a_n > 1994$ เมื่อ $n > N$

วิธีทำ เมื่อลองหาค่าพจน์แรก ๆ ของลำดับ พบว่าคือ

$$1,\ 1 + q,\ (1 + q)^2,\ (1 + q)(1 + 2q),\ (1 + 2q)^2,\ (1 + 2q)(1 + 3q),\ldots$$

ทำให้เดาว่า

$$a_{2k} = (1 + kq)^2 \quad \text{และ} \quad a_{2k+1} = (1 + kq)\{1 + (k + 1)q\} \quad \text{เมื่อ } k = 0, 1, 2,\ldots$$

สูตรทั้งสองนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยง่าย โดยการอุปนัย ซึ่งขอละไว้ในที่นี้

เมื่อใช้สูตรข้างต้นพบว่าลำดับ a_0 , a_1 , a_2 , ... เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ เพราะฉะนั้นสามารถเลือก N ได้เป็นจำนวนอนันต์ค่า เช่น $N = \left[\frac{2\sqrt{1994}-1}{q}\right]+1$

ตัวอย่าง 9.2.12 (AMOC 1986) พิจารณาลำดับ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ที่นิยามโดย

$$a_1 = 3 \text{ , } b_1 = 100, \ a_{n+1} = 3^{a_n}, \ b_{n+1} = 100^{b_n}$$

จงหา m ค่าน้อยสุดที่ทำให้ $b_m > a_{100}$

วิธีทำ สังเกตว่า $a_1 = 3$, $b_1 = 100 = 10^2$, $a_2 = 3^3 = 27$, $b_2 = 10^{200}$, $a_3 = 3^{27}$, $b_3 = 10^{2\cdot 10^{200}}$
เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยว่า $b_{n-1} > a_n > 6b_{n-2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

(a) การพิสูจน์ว่า $b_{n-1} > a_n$ จากข้างต้น พบแล้วว่า $b_1 > a_2$
สมมุติว่า $b_{n-1} > a_n$ เราจะแสดงว่า $b_n > a_{n+1}$
จาก $a_{n+1} = 3^{a_n}$ และ $b_n = 100^{b_{n-1}} = 10^{2b_{n-1}} > \left(3^2\right)^{2b_{n-1}}$
ดังนั้น $b_n > 3^{4b_{n-1}} > 3^{a_n}$ (เนื่องจาก $b_{n-1} > a_n$) ซึ่งชี้ว่า $b_n > a_{n+1}$
เพราะฉะนั้น โดยการอุปนัย ได้ว่า $b_{n-1} > a_n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

(b) การพิสูจน์ว่า $a_{n+2} > 6b_n$
กรณี n = 1 พบจากข้างต้นแล้วว่า $a_3 = 3^{27} > 600 = 6b_1$ สมมุติว่า $a_{n+2} > 6b_n$
ดังนั้น

$$a_{n+3} = 3^{a_{n+2}} > 3^{6b_n} = 3^{b_n}\cdot 3^{5b_n} > 3^{100}\cdot 100^{b_n} \quad \text{(เนื่องจาก } 3^5 > 100 \text{ และ } b_n \geq 100\text{)}$$
$$> 6\, b_{n+1}$$

เมื่อใช้ข้อมูลที่ได้รับพบว่า $b_{98} < a_{100}/6$ และ $b_{99} > a_{100}$ เพราะฉะนั้น m = 99

ตัวอย่าง 9.2.13 (APMO 1997) ให้ $S = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{1993006}}$

เมื่อตัวส่วนเป็น ผลบวกย่อยของลำดับของส่วนกลับของจำนวนสามเหลี่ยม (ซึ่งคือจำนวนที่อยู่ในรูป $t_n = \frac{1}{2}n(n+1)$)
จงพิสูจน์ว่า S > 1001

วิธีทำ สังเกตว่า $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$, $1 + \frac{1}{3} = \frac{2\cdot 2}{3}$, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{t_n} = \frac{n\cdot 2}{n+1}$ ซึ่งพิสูจน์ได้โดยง่ายโดยการอุปนัย
เนื่องจาก S เป็นผลบวกของส่วนกลับของจำนวนเหล่านี้ โดยที่พจน์สุดท้ายคือ $1993006 = \frac{1996\cdot 1997}{2} = t_{1996}$
ดังนั้น

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{1997}{1996}\right) = \frac{1}{2}\left\{1996+\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{1996}\right)\right\} > \frac{1}{2}(1996+6) = 1001$$

ตัวอย่าง 9.2.14 (AMOC 2003) ให้ $a_1, a_2, \ldots$ เป็นลำดับที่นิยามโดย

(i) $a_1 = 0$

(ii) $a_{i+1} = a_i + 1$ หรือ $a_{i+1} = -a_i - 1$ $(i \geq 0)$

ตัวอย่างของลำดับเช่นว่านี้เช่น 0 , 1, 2 , 3, – 4 , –3 , 2 , ...
จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq -\frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

วิธีทำ สังเกตว่าเงื่อนไข (ii) สมมูลกับ

$$a_{i+1}^2 = (a_i + 1)^2 \qquad (9.2.14.1)$$

เราจะแสดงโดยการอุปนัยว่า

$$2\sum_{i=1}^{n} a_i = -n + (a_n + 1)^2$$

เมื่อ $n = 1$ จาก $a_1 = 0$ ดังนั้นค่าทางซ้ายมือ $= 0$ = ค่าทางขวามือ

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริง ณ $n = k$ กล่าวคือ

$$2\sum_{i=1}^{k} a_i = -k + (a_k + 1)^2$$

เมื่อ $n = k + 1$ เรามีว่า ค่าทางซ้ายมือ $= 2\sum_{i=1}^{k} a_i + 2a_{k+1} = -k + (a_k + 1)^2 + 2a_{k+1}$

$= -(k + 1) + a_{k+1}^2 + 2a_{k+1} + 1$ (โดย (9.2.14.1))

$= -(k + 1) + (a_{k+1} + 1) =$ ค่าทางขวามือ

จากการพิสูจน์ข้างต้นได้ว่า $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq -n$ ซึ่งให้อสมการที่ต้องการทันที โดยเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $a_n = -1$

ตัวอย่าง 9.2.15 (Ukranian MO 1996) ลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ นิยามโดย

$$a_0 = 1 \ , \ a_{499} = 0 \text{ และ } a_{n+1} = 2a_1a_n - a_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

(i) จงพิสูจน์ว่า $|a_1| \le 1$

(ii) จงหาค่าของ a_{1996}

วิธีทำ (i) ถ้า $a_1 > 1$ แล้วโดยการอุปนัยได้ว่า $a_{n+1} = 2a_1a_n - a_{n-1} > 2a_n - a_{n-1} > a_n$ แสดงว่า a_n เป็นลำดับเพิ่ม ในทำนองกลับกัน ถ้า $a_1 < -1$ พิจารณา ลำดับ $b_n = (-1)^n a_n$

เราตรวจสอบได้ว่า $b_1 = 1$ และ $b_{n+1} = 2b_1b_n - b_{n-1}$ โดยข้อโต้แย้งเช่นข้างต้น พบว่า b_n เป็นลำดับเพิ่ม ไม่ว่ากรณีใดก็ตาม ในที่สุดจะได้ว่า $|a_{499}| > 1$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

(ii) ให้ $a_1 = \cos A$ โดยการอุปนัย ได้ว่า $a_n = \cos nA$ เมื่อให้ $B = 499A$ แล้ว $\cos B = a_{499} = 0$
ดังนั้น $a_{1996} = \cos 1996A = \cos 4B = 2(2\cos^2 B - 1)^2 - 1 = 1$

ตัวอย่าง 9.2.16 (Canadian MO 1977) ให้ $0 < u < 1$ และนิยาม

$$u_1 = 1 + u, \quad u_2 = \frac{1}{u_1} + u \quad , \ldots, \quad u_{n+1} = \frac{1}{u_n} + u \qquad (n \ge 1)$$

จงแสดงว่า $u_n > 1$ สำหรับทุก $n = 1, 2, 3, \ldots$

วิธีทำ เราใช้การอุปนัยเพื่อแสดงว่า $1 < u_n < \dfrac{1}{1-u}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ เริ่มด้วยการสังเกตว่า

$$1 < 1 + u = u_1 = \frac{(1+u)(1-u)}{1-u} = \frac{1-u^2}{1-u} < \frac{1}{1-u}$$

จากนี้ สมมุติว่า $1 < u_k < \dfrac{1}{1-u}$

ดังนั้น $1 - u < \dfrac{1}{u_k} < 1$ และ $1 = 1 - u + u < \dfrac{1}{u_k} + u = u_{k+1}$ ในขณะที่ $u_{k+1} = \dfrac{1}{u_k} + u < 1 + u$

แบบฝึกหัด

1. ให้ n เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \le \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

2. (APMC) ให้ $S_n := \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{j^2+k^2}}$ จงหาค่าคงตัวค่าน้อยสุดที่ทำให้อสมการ

$$n \le S_n \le nC$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n \ge 3$

3. (APMC) ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$|a_{k+m} - a_k - a_m| \leq 1 \quad \text{สำหรับทุก } k, m \in \mathbb{N}$$

จงแสดงว่า $\left|\frac{a_k}{k} - \frac{a_m}{m}\right| < \frac{1}{k} + \frac{1}{m}$ สำหรับทุก $k, m \in \mathbb{N}$

4. ให้ $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \frac{n}{x_n}$ $(n \geq 1)$ จงแสดงว่า $\sqrt{n} \leq x_n \leq \sqrt{n} + 1$

5. จงแสดงว่า $(n+1)^n \geq 2^n n!$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

6. นิยาม $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}$ $(n > 0)$ จงแสดงว่า

$$\frac{1}{5} \leq x_n < 2 \quad \text{สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}$$

7. (Chinese MO) ให้ $a_1, a_2, \ldots$ เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

จงพิสูจน์ว่า $a_n \leq ma_1 + (n/m - 1)a_m$ สำหรับทุก $n \geq m$

8. (Canadian MO) ให้ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ จงแสดงว่า

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) > \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

9. ให้ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ และ $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n+1}$ เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

$$\sqrt[n]{a_1} - \sqrt[n]{a_2} + \sqrt[n]{a_3} - \cdots - \sqrt[n]{a_{2n}} + \sqrt[n]{a_{2n+1}} < \sqrt[n]{a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2n} + a_{2n+1}}$$

10. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า มี $e > 0$ ที่มีสมบัติว่า สำหรับจำนวนจริงบวก n จำนวน ใด ๆ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จะมี $t > 0$ ที่ทำให้

$$e < \{ta_1\}, \{ta_2\}, \ldots, \{ta_n\} < \frac{1}{2}$$

เมื่อ $\{x\} = x - [x]$ แทนภาคเศษส่วนของจำนวนจริง x)

11. ให้ $a_1, \ldots, a_n$ เป็นลำดับของจำนวนจริงไม่ติดลบ ไม่ทุกตัวเป็น 0 สำหรับ $1 \leq k \leq n$

ให้ $m_k := \max_{1 \leq i \leq k} \frac{a_{k-i+1} + a_{k-i+2} + \cdots + a_k}{i}$ จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริงบวก a ใด ๆ จำนวนเต็ม k ที่มีสมบัติว่า $m_k > a$ มีปริมาณ $< \frac{1}{a}(a_1 + \ldots + a_n)$

9.3 การนับเชิง Combinatorics

ตัวอย่าง 9.3.1 (Putnam 1979) จงหาจำนวนนับ n และจำนวนนับ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ มีสมบัติว่า

$$a_1 + \cdots + a_n = 1979$$

และทำให้ผลคูณ $a_1a_2\ldots a_n$ มีค่าสูงสุด

วิธีทำ เราจะแสดงว่า n = 660 และ ทุกตัวของ a_i (ยกเว้นหนึ่งตัว) มีค่าเป็น 3 โดยที่ a_i ตัวที่ยกเว้นเป็น 2

ขั้นแรก สังเกตว่า a_i มีค่ามากกว่า 4 ไม่ได้ เพราะ เราสามารถเพิ่มค่าผลคูณได้ โดยการแทน 5 ด้วย 2·3, 6 ด้วย 3·3, 7 ด้วย 3·4 ฯลฯ

สังเกตอีกด้วยว่า จะมี 2 และ 4 พร้อมกัน หรือ 2 สามตัวพร้อมกัน ไม่ได้ เพราะ 2·4 < 3·3, 2·2·2 < 3·3

นอกจากนี้ จะมี 4 พร้อมกันสองตัวไม่ได้ เนื่องจาก 4·4 < 2·3·3

สุดท้ายสังเกตว่า ไม่มี a_i ตัวใดเป็น 1 เพราะไม่เพิ่มค่าผลคูณ เพราะฉะนั้น a_i ทุกตัวเป็น 3 ยกเว้นอาจจะมี 4 หนึ่งตัว หรือมี 2 หนึ่งตัว หรือ 2 สองตัว แต่เพราะ 1979 = 3·659 + 2 ค่าที่ยกเว้นที่เป็นไปได้มีเพียง 2 ตัวเดียว และ n = 660

ตัวอย่าง 9.3.2 (IMO 1998) ในการแข่งขันครั้งหนึ่ง มีผู้เข้าแข่งขัน a คน และมีกรรมการ b คน โดยที่ $b \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มคี่ เป็นที่ทราบกันว่า กรรมการแต่ละท่าน ตัดสินให้ผู้เข้าแข่งขันเป็น "ผ่าน" หรือไม่ก็ "ตก" สมมุติว่า k เป็นจำนวนเต็มที่มีสมบัติว่า กรรมการสองท่านใด ๆ มีการตัดสินเหมือนกันได้กับผู้เข้าแข่งขันอย่างมาก k คน

จงพิสูจน์ว่า $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$

วิธีทำ นิยามคำว่า "ผลต่าง"เป็นจำนวนผู้เข้าแข่งขันที่กรรมการสองท่านตัดสินแตกต่างกัน สำหรับกรรมการสองท่านใด ๆ เนื่องจากการตัดสินจะเหมือนกันได้อย่างมากกับผู้เข้าแข่งขัน k คน ดังนั้น ค่าผลต่างระหว่างกรรมการสองคนนี้ จะต้องเป็นอย่างน้อย a – k

เนื่องจากมี $\binom{b}{2}$ ทางในการเลือกกรรมการคู่หนึ่ง ๆ เราได้ว่า โดยรวมแล้วจะมีอย่างน้อย $\binom{b}{2}(a-k)$ ผลต่าง

ให้ผู้เข้าแข่งขันเป็น $P_1, \ldots, P_a$ ให้ x_i เป็นจำนวนกรรมการที่ให้ P_i ผ่าน ให้ y_i เป็นจำนวนกรรมการที่ให้ P_i ตก ดังนั้น $x_i + y_i = b$ นอกจากนี้ ค่าผลต่างที่เกี่ยวข้องกับ P_i คือ x_iy_i ดังนั้น

$$\sum_{i=1}^{a} x_iy_i \geq \binom{b}{2}(a-k)$$

พิจารณา x_1 และ y_1

- ถ้า $x_1 > y_1$ แล้วให้ $b = 2n + 1$ (เพราะ $b \geq 3$ เป็นจำนวนเต็มคี่) เห็นได้ชัดเจนว่า $y_1 \leq n$ ถ้า $x_1y_1 > n^2 + n$ แล้ว $(2n + 1 - y_1)y_1 > n^2 + n$ ดังนั้น $2ny_1 + y_1 - y_1^2 > n^2 + n$
  ซึ่งให้ว่า $y_1 > (n - y_1)^2 + n \geq n$ เป็นข้อขัดแย้ง แสดงว่า $x_1y_1 \leq n^2 + n$

- ถ้า $y_1 > x_1$ แล้วในทำนองเดียวกันกับกรณีที่แล้วจะได้ $x_1y_1 \le n^2 + n$

โดยข้อโต้แย้งประเภทเดียวกันได้ว่า $x_iy_i \le n^2 + n \quad (1 \le i \le n)$ เพราะฉะนั้น

$$a(n^2 + n) \ge \sum_{i=1}^{a} x_iy_i \ge \binom{b}{2}(a-k)$$

อย่างไรก็ตาม $n^2 + n = \frac{1}{4}(4n^2 + 4n + 1) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(b^2 - 1)$ ซึ่งให้ว่า

$$\frac{1}{4}a(b^2-1) \ge \frac{1}{2}b(b-1)(a-k) \iff ab + a \text{ v } 2ab - 2bk$$

$$\iff 2bk \text{ v } ab - a = a(b-1)$$

$$\iff \frac{k}{a} \ge \frac{b-1}{2b} \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 9.3.3 (APMO 2000) ให้ $n, k \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n > k$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

วิธีทำ สมมุติว่า เรามีวัตถุ n ชนิดที่แตกต่างกัน เป็นจำนวนไม่จำกัด โดยที่ k ชนิดเป็นแบบ "พิเศษ" และ $n - k$ ชนิดเป็นแบบ "ธรรมดา" พิจารณากล่อง n กล่อง และสมมุติว่า เราต้องการใส่วัตถุหนึ่งชิ้นในกล่องแต่ละกล่อง โดยให้กล่องจำนวน j กล่องพอดีที่บรรจุวัตถุพิเศษ ในการนี้ มี $\binom{n}{j}$ ทางในการเลือกกล่อง j กล่อง มี k^j ทางในการใส่วัตถุพิเศษในกล่องที่เลือกไว้ และมี $(n-k)^{n-j}$ ทางในการใส่วัตถุธรรมดาลงในกล่องที่เหลือ ดังนั้น จำนวนทางทั้งหมดในปฏิบัติการดังกล่าว คือ $a_j = \binom{n}{j}k^j(n-k)^{n-j}$

ถ้าไม่มีเงื่อนไขว่าด้วยจำนวนกล่องที่บรรจุวัตถุพิเศษ แล้ว จำนวนทางทั้งหมด คือ n^n ดังนั้น

$$n^n = \sum_{j=0}^{n} a_j \qquad (9.3.3.1)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เราได้ว่า $n^n > a_k = \binom{n}{k}k^k(n-k)^{n-k}$

กล่าวคือ $\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} > \binom{n}{k}$ ซึ่งคืออสมการทางขวามือที่ต้องการ

ส่วนอสมการทางซ้ายมือ เขียนได้เป็น $\frac{n^n}{n+1} < \binom{n}{k}k^k(n-k)^{n-k}$

การที่จะพิสูจน์อสมการนี้ เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า a_k เป็นค่าสูงสุดของบรรดา a_j , $0 \le j \le n$ เพราะ $\frac{n^n}{n+1}$ เป็นค่าเฉลี่ยของบรรดา a_j ทั้งหมด โดยความสมมาตรของผลที่ต้องการพิสูจน์ เราสามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไป ได้ว่า $k \le n-k$ และพิจารณา $a_j = \binom{n}{j} k^j (n-k)^{n-j}$ ในตอนแรก สมมุติว่า $j < k$ ดังนั้น $n-j > n-k$ และ

$$a_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} k^j (n-k)^{n-j} = \frac{n!}{(j+1)!(n-j-1)!} k^{j+1} (n-k)^{n-j-1} \left(\frac{j+1}{n-j} \cdot \frac{n-k}{k} \right)$$

$$= \binom{n}{j+1} k^{j+1} (n-k)^{n-j-1} \left(\frac{j+1}{k} \right) \left(\frac{n-k}{n-j} \right)$$

$$= a_{j+1} \left(\frac{j+1}{k} \right) \left(\frac{n-k}{n-j} \right) < a_{j+1}$$

ลำดับต่อไปสมมุติว่า $j > k$ ดังนั้น $n-j < n-k$ และ

$$a_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} k^j (n-k)^{n-j} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} k^{j-1} (n-k)^{n-j+1} \left(\frac{k}{j} \cdot \frac{n-j+1}{n-k} \right)$$

$$< \binom{n}{j-1} k^{j-1} (n-k)^{n-(j-1)} = a_{j-1}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดคือ a_k ตามต้องการ

ตัวอย่าง 9.3.4 (IMO 1989) ให้ n เป็นจำนวนนับ เรานิยามการเรียงสับเปลี่ยน $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ ของเซต $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ว่ามีสมบัติ P ถ้า $|x_i - x_{i+1}| = n$ สำหรับอย่างน้อยหนึ่ง $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$
จงแสดงว่าทุก $n \ge 1$ จำนวนการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมบัติ P มีมากกว่าจำนวนการเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีสมบัตินี้

วิธีทำ กรณี $n = 1$ ผลที่ต้องการเป็นจริงอย่างชัดเจน จากนี้ไปสมมุติ $n \ge 2$
ให้ A แทนเซตของการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมบัติ P ให้ B แทนเซตของการเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีสมบัติ P โจทย์ต้องการให้พิสูจน์ $|B| > |A|$ เพื่อการนี้เป็นการเพียงพอที่เราจะหาฟังก์ชัน $f : A \to B$ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแต่ไม่ทั่วถึง เพื่อความสะดวก เราเรียกคู่ของจำนวนเต็มในรูป $\{k, n+k\}$ $(k = 1,2, \ldots, n)$ ว่าเป็นคู่หูกัน และถ้า k กับ $n+k$ ปรากฏติดกันในการเรียงสับเปลี่ยน เราจะเรียกคู่ของจำนวนเต็ม $\{k, n+k\}$ นี้ว่าคู่หูที่ติดกัน

ให้ $\alpha = x_1 x_2 \cdots x_{2n} \in A$ เนื่องจาก α ไม่มีสมบัติ P ดังนั้นคู่หูของ x_1 ต้องเป็นบาง x_r โดยที่ $3 \le r \le 2n$ นิยาม $f(x) = x_2 x_3 \cdots x_{r-1} x_1 x_r x_{r+1} \cdots x_{2n} \in B$ โดยการถอด x_1 ไปใส่หน้าคู่หู x_r ของมัน เห็นชัดเจนว่า ใน $f(\alpha)$ คู่ของจำนวนเต็ม $\{x_1, x_r\}$ เป็นเพียงคู่หูที่ติดกันเพียงคู่เดียวเท่านั้น

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ให้ $\alpha = x_1x_2\cdots x_{2n}$, $\beta = y_1y_2\cdots y_{2n}$ ทั้งคู่เป็นสมาชิกของ A โดยคู่หูของ x_1 คือ x_r และคู่หูของ y_1 คือ y_s เมื่อ $3 \le r, s \le 2n$ ถ้า $f(\alpha) = f(\beta)$ แล้ว

$$x_2x_3\cdots x_{r-1}x_1x_rx_{r+1}\cdots x_{2n} = y_2y_3\cdots y_{s-1}y_1y_sy_{s+1}\cdots y_{2n}$$

เนื่องจาก $\{ x_1, x_r \}$ (และในทำนองเดียวกัน $\{ y_1, y_s \}$) เป็นคู่หูที่ติดกันเพียงคู่เดียวใน $f(\alpha)$ (และ $f(\beta)$ ตามลำดับ) ดังนั้นต้องได้ว่า $r = s$, $x_1 = y_1$, $x_r = y_r$ ซึ่งให้ว่า $x_i = y_i$ ($i = 1,2,\ldots,2n$) กล่าวคือ $\alpha = \beta$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ส่วนการที่ f ไม่ทั่วถึง มาจากความจริงที่ว่าเซต f(A) ประกอบด้วยการเรียงสับเปลี่ยนที่มีหนึ่งคู่หูที่ติดกันพอดี ในขณะที่ f(B) ประกอบด้วยการเรียงสับเปลี่ยนที่มีจำนวนคู่หูที่ติดกันมากกว่าหนึ่งคู่ด้วยเมื่อ $n \ge 2$

ตัวอย่าง 9.3.5 (USAMO 1980) จงหาจำนวนสูงสุดที่เป็นไปได้ ของอนุกรมเลขคณิตที่มีสามพจน์ โดยที่พจน์ทั้งสามเลือกมาจากลำดับของจำนวนจริง n จำนวน $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

วิธีทำ พิจารณาลำดับเลขคณิตสามพจน์ที่มีพจน์กลางเป็น a_i เมื่อ $1 < i < n$

- ถ้า $n = 2k + 1$ เป็นคี่ และพจน์กลาง a_i โดยที่ $1 < i \le k$ แล้ว จะมีทางเลือกพจน์แรก $i - 1$ ทางได้แก่ $a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}$ สำหรับพจน์กลาง a_i เช่นว่านี้ จำนวนลำดับเลขคณิตมีอย่างมาก $1+2+\cdots+(k-1) = \frac{1}{2}k(k-1)$ ในขณะที่พจน์ท้ายที่เป็นไปได้ เมื่อพจน์กลางเป็น a_i โดยที่ $k < i < n$ มีทางเลือกได้ $n - i$ ทางได้แก่ $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n$ แสดงว่าจำนวนลำดับเลขคณิตเช่นว่านี้ มีได้อย่างมาก $1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k + 1)$

  ดังนั้น จำนวนลำดับในกรณี n คี่ มีอย่างมาก

$$\frac{1}{2}k(k-1) + \frac{1}{2}k(k+1) = k^2 = \frac{1}{4}(n-1)^2$$

- ถ้า n เป็นคู่ พิจารณาในทำนองเดียวกัน พบว่า จำนวนลำดับเลขคณิตมีอย่างมาก $\frac{1}{4}(n^2 - 2n)$

ผลจากทั้งสองกรณี สามารถเขียนรวมได้โดยใช้ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม ว่า จำนวนลำดับมีได้อย่างมาก

$$\left[\frac{(n-1)^2}{4}\right]$$

โดยที่ค่าขอบเขตนี้ บรรลุได้จริง เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิตเสียเอง

ตัวอย่าง 9.3.6 (Canadian MO 1972) ลำดับเรขาคณิตที่อัตราส่วนร่วมมีค่ามากกว่า 1 และสมาชิกทั้งหมดมาจากเซตของจำนวนเต็ม ตั้งแต่ 100 ถึง 1000 มีจำนวนพจน์ได้มากที่สุดเท่าใด

วิธีทำ จากตัวอย่างของลำดับเรขาคณิต 128, 192, 288, 432, 648, 972 ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม $\frac{3}{2}$ แสดงว่าลำดับที่ยาวที่สุดต้องมีความยาวอย่างน้อย 6 เราจะแสดงว่าความยาวสูงสุดที่ต้องการคือ 6

พิจารณาลำดับเรขาคณิต $100 \le a < ar < ar^2 < \cdots < ar^{n-1} \le 1000$ เมื่อพจน์ทั้งหมด n พจน์เป็นจำนวนเต็ม และ $r > 1$ เห็นได้ชัดว่า r ต้องเป็นจำนวนตรรกยะ ให้ $r = p/q$ โดยที่จำนวนเต็ม $p > q \ge 1$, $(p, q) = 1$

เนื่องจาก $ar^{n-1} = a\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $q^{n-1} \mid a$

เลือก $p = q + 1$ ได้ลำดับเรขาคณิต

$$100 \le a < a\left(\frac{q+1}{q}\right) < \cdots < a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \le 1000$$

ซึ่งมีความยาว n และสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม (เพราะ $q^{n-1} \mid a$)

- ถ้า $q \ge 3$ แล้ว $1000 \ge a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \ge (q+1)^{n-1} \ge 4^{n-1}$ ซึ่งให้ $n \le 5$
- ถ้า $q = 1$ แล้ว $1000 \ge a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \ge a2^{n-1} \ge 100 \cdot 2^{n-1}$ ซึ่งให้ $n \le 4$
- ถ้า $q = 2$ แล้ว $1000 \ge a\left(\frac{q+1}{q}\right)^{n-1} \ge a\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \ge 100\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ ซึ่งให้ $n \le 6$

เพราะฉะนั้น ความยาวสูงสุดของลำดับคือ 6

ตัวอย่าง 9.3.7 (Canadian MO 1974) มีสแตมป์มูลค่า 8 เซนต์ และ 15 เซนต์ จำนวนไม่จำกัด เนื่องจากมูลค่าไปรษณีย์บางจำนวนไม่สามารถสร้างได้โดยใช้แสตมป์ทั้งสองแบบ เช่น มูลค่า 7 เซนต์ มูลค่า 29 เซนต์ ถามว่ามูลค่าไปรษณีย์มากสุดที่ไม่สามารถสร้างได้โดยใช้แสตมป์ทั้งสองแบบเป็นเท่าใด (กล่าวคือ จงหาจำนวนนับ n ที่เป็นมูลค่าไปรษณีย์ซึ่งสร้างไม่ได้โดยใช้แสตมป์ทั้งสองแบบ ในขณะที่มูลค่าที่สูงกว่าทั้งหมดสร้างได้)

วิธีทำ มูลค่า 98, 99, ... , 105 สร้างได้ดังแสดงต่อไปนี้

98 = 8.1 + 15.6	99 = 8.3 + 15.5	100 = 8.5 + 15.4	101 = 8.7 + 15.3
102 = 8.9 + 15.2	103 = 8.11 + 15.1	104 = 8.13 + 15.0	105 = 8.0 + 15.7

เนื่องจากจำนวนเหล่านี้เป็นจำนวนนับที่อยู่ถัดกัน 8 จำนวน ดังนั้น จำนวนที่มีค่าสูงกว่านี้ (คือ 106, 107, ...) สามารถสร้างได้โดยใช้แสตมป์ทั้งสองแบบ โดยการเติมพหุคูณของสแตมป์ 8 เซนต์ เข้าไปในจำนวนทั้งแปดข้างต้น

ขั้นตอนสุดท้าย คือตรวจสอบโดยตรง (ซึ่งขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด) ว่ามูลค่า 97 เซนต์ สร้างไม่ได้โดยใช้แสตมป์ทั้งสองแบบ สรุปได้ว่า 97 เป็นมูลค่าสูงสุดที่สร้างไม่ได้

แบบฝึกหัด

1. (Bulgarian MO 1998) ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาจำนวนของลำดับ $a_1,\ldots, a_{2n}$ ที่มีสมบัติว่า

$$a_i = \pm 1 \text{ และ } \left|\sum_{i=2k-1}^{j} a_i\right| \leq 2 \quad \text{สำหรับทุกตรรชนี } 1 \leq k \leq j \leq n$$

2. (Putnam 1995) สมมุติว่ามีสร้อยที่ประกอบด้วยลูกปัด n ลูก ลูกปัดแต่ละลูกมีจำนวนเต็มกำกับอยู่ลูกละหนึ่งจำนวน โดยที่ผลบวกของค่าจำนวนเต็มทั้งหมดเป็น $n - 1$ จงพิสูจน์ว่า เราสามารถตัดสร้อยเส้นนี้ให้เหลือเป็นเส้นตรงที่มีลูกปัดหมายเลขเรียงกันเป็น $x_1,\ldots, x_n$ โดยที่

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \leq k - 1 \qquad (k = 1, 2,\ldots, n)$$

3. (Belarus MO 2002) ให้ M เป็นเซตของจำนวนจริงที่แตกต่างกัน 20 จำนวน สำหรับสองจำนวน a, b ใด ๆ ใน M, $a < b$ ทราบว่า จะมี $x \in M$ ที่ทำให้ $a < -x < b$ ถามว่าสมาชิกใน M ที่เป็นบวกมีจำนวนทั้งสิ้นเท่าใด

4. (Iranian MO) ให้ $S = \{1, 2,\ldots, n\}$ และ $A_1,\ldots, A_k$ เป็นเซตย่อยของ S ที่มีสมบัติว่า

$$\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup A_{i_3} \cup A_{i_4}\right| \leq n - 2 \quad \text{เมื่อ } 1 \leq i_1, i_2, i_3, i_4 \leq k$$

จงพิสูจน์ว่า $k \leq 2^{n-2}$

5. ให้ X เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิก $|X| = n$ และให้ $A_1,\ldots, A_m$ เป็นเซตย่อยของ S ที่มีสมบัติว่า

(i) $|A_i| = 3 \quad (i = 1, 2,\ldots, m)$

(ii) $|A_i \cap A_j| \leq 1$ สำหรับทุก $i \neq j$

จงพิสูจน์ว่า มีเซตย่อยของ X ที่มีจำนวนสมาชิกอย่างน้อย $[\sqrt{2n}]$ ที่ไม่บรรจุทุก A_i $(i = 1,\ldots, m)$

6. ในงานแสดงสินค้าครั้งหนึ่ง มีผู้เข้าชม 1999 คน จากผู้ชมทุก 50 คน มีอย่างน้อย 2 คนที่รู้จักกัน จงพิสูจน์ว่า เราสามารถหาผู้เข้าชมได้อย่างน้อย 41 คน ที่แต่ละคนรู้จักกับผู้เข้าชมอีก 1958 คน

7. ให้ $\{x_n\}_{n \geq 0}$ เป็นลำดับค่าไม่ลดของจำนวนเต็มไม่ติดลบ ที่มีสมบัติว่า สำหรับทุก $k \geq 0$ จำนวนพจน์ในลำดับที่มีค่า $\leq k$ มีเป็นจำนวนจำกัด และให้จำนวนนี้เป็น y_k จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{i=0}^{n} y_j \geq (n + 1)(m + 1) \quad \text{สำหรับทุก } m, n \in \mathbb{N}$$

8. ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และให้ F เป็นกลุ่มของเซตย่อยของ $\{1,\ldots, n\}$ ที่มีสมาชิก m ตัว โดยที่สองเซตย่อยใด ๆ ดังกล่าว ตัดกันเป็นเซตไม่ว่าง จงหาจำนวนสมาชิกที่มากที่สุดที่เป็นได้ของ F

9. (Estonian MO) กำหนดให้มีจำนวนจริงห้าจำนวน ที่มีสมบัติว่า เมื่อเลือกสามจำนวนใดๆ ออกมาแล้ว ผลต่างระหว่างผลบวกของจำนวนทั้งสามนี้ กับผลบวกของอีกสองจำนวนที่เหลือ มีค่าเป็นบวกเสมอ
จงพิสูจน์ว่า ผลคูณของผลต่างทั้ง 10 ค่าที่เป็นไปได้ มีค่า $\leq$ ผลคูณของกำลังสองของจำนวนทั้งห้า

10. (Romanian MC) ให้ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ จงหาจำนวนฟังก์ชัน $f : \{1,\ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ที่มีสมบัติว่า
$$|f(k + 1) - f(k)| \geq 3 \quad (k = 1, 2,\ldots, n - 1)$$

11. ให้ M เป็นเซตจำกัดของจำนวนจริง ที่มีสมบัติว่า จากสามจำนวนใด ๆ ของ M เราสามารถเลือกสองจำนวนออกมาได้ โดยผลบวกของจำนวนทั้งสอง เป็นจำนวนที่เป็นสมาชิกของ M ถามว่า M มีจำนวนสมาชิกมากที่สุดได้เป็นเท่าใด

12. ให้ $a_1,\ldots, a_{20}$ เป็นจำนวนนับที่มีค่าต่างกัน เซตของผลบวกระหว่างคู่ของสมาชิก $\{a_i + a_j ; 1 \leq i \leq j \leq 20\}$ มีสมาชิกทั้งสิ้น 201 ตัว ถามว่า จำนวนสมาชิกที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของเซต $\{|a_i - a_j| ; 1 \leq i < j \leq 20\}$ เป็นเท่าใด

บทที่ 10
อสมการที่เกี่ยวข้องกับสมบัติพิเศษของฟังก์ชัน

โจทย์อสมการบางจำพวก สามารถจัดรูปแบบให้เป็นอสมการที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันพิเศษบางประเภท ทำให้สามารถประยุกต์สมบัติต่าง ๆ ที่ฟังก์ชันดังกล่าวมี มาใช้ในการแก้โจทย์ดังกล่าวได้ เป็นต้นว่า ในบทที่ 4 เราพบมาแล้วเกี่ยวกับฟังก์ชันนูน ที่เชื่อมโยงกับอสมการ Jensen ในบทที่ 6 เกี่ยวกับพหุนามสมมาตร ในบทที่ 7 เกี่ยวกับ พหุนามเอกพันธุ์ นอกจากที่กล่าวมาแล้ว ที่เทคนิคที่ปรากฏเสมออื่น ได้แก่

ก) จัดนิพจน์ในโจทย์ให้อยู่ในรูปผลบวกของฟังก์ชันกำลังสอง ซึ่งเราทราบว่าฟังก์ชันจริงยกกำลังสองไม่เคยมีค่าเป็นลบ

ข) จัดนิพจน์ให้อยู่ในรูปฟังก์ชัน quadratic แล้วพิจารณาค่า discriminant (ซึ่งเคยพบมาแล้วในการพิสูจน์อสมการ Cauchy-Schwarz)

ค) ใช้สมบัติพิเศษของจำนวนนับว่า ในเซตของจำนวนนับ ต้องมีจำนวนที่มีค่าน้อยสุด

ง) ใช้สมบัติพิเศษ หรือเอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

พื้นฐานอื่น ๆ ที่เกี่ยวกับฟังก์ชัน หาอ่านได้ส่วนที่สองของหนังสือเล่มนี้

10.1 อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันพีชคณิต

นิยาม เราจะเรียก y ว่าเป็น **ฟังก์ชันพีชคณิต** ของ x ถ้ามีฟังก์ชันตรรกยะ $R_1,R_2,\ldots,R_m$ ของ x ซึ่ง y สอดคล้องสมการ

$$y^m + R_1y^{m-1} + \ldots R_{m-1}y + R_m = 0$$

ตัวอย่างเช่น $y = \sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}}$ เป็นฟังก์ชันพีชคณิตของ x เพราะ y สอดคล้องกับสมการ $y^4 - 4xy^2 - 4xy - x = 0$

ตัวอย่าง 10.1.1 ให้ $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ พิจารณาพหุนามกำลังสอง $f(x) = (x - a_1)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$ จงแสดงว่า $f(x)$ บรรลุค่าต่ำสุด ณ จุด $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ และพิสูจน์ว่า $(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \geq \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)^2$

วิธีทำ $f(x) = nx^2 - 2x(a_1 + \cdots + a_n) + (a_1^2 + \cdots + a_n^2)$ เป็นพหุนามกำลังสอง ที่มีกราฟเป็นพาราโบลาหงายขึ้น (เนื่องจากสัมประสิทธิ์ของ x^2 มีค่าเป็นบวก) ดังนั้น จุดยอดของกราฟเป็นจุดต่ำสุด ซึ่งคือจุดที่มีพิกัด $x = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n)$ แสดงว่าข้อสรุปแรกเป็นจริง

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นผลบวกของพจน์ที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ดังนั้น $f(x) \geq 0$ แสดงว่า ดิสคริมิแนนต์ของ $f(x)$ ต้องมีค่า ≤ 0 ซึ่งให้ว่า $(a_1 + \cdots + a_n)^2 - n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \leq 0$ เมื่อจัดรูปจะได้อสมการที่สองที่ต้องการ

ตัวอย่าง 10.1.2 ถ้าพหุนามกำลังสอง $f(x) := ax^2 + bx + c$ มีค่าไม่เกิน 1 สำหรับทุกจำนวนจริง $x \in [0, 1]$ จงพิสูจน์ว่า $|a| + |b| + |c| \leq 17$

วิธีทำ แทนค่า $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ พบว่า $|c| \leq 1$, $\left|\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right| \leq 1$, $|a + b + c| \leq 1$ ให้ $m = a + 2b + 4c$, $n = a + b + c$ ได้ $a = -m + 2n + 2c$, $b = m - n - 3c$

ดังนั้น $|m| \leq 4$, $|n| \leq 1$ และ

$$|a| \leq |m| + |2n| + |2c| \leq 4 + 2 + 2 = 8$$
$$|b| \leq |m| + |n| + |3c| \leq 4 + 1 + 3 = 8$$

เพราะฉะนั้น $|a| + |b| + |c| \leq 8 + 8 + 1 = 17$

ตัวอย่าง 10.1.3 ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leq \sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$ และหาด้วยว่าอสมการเป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ ยกกำลังสามของอสมการที่ต้องการทั้งสองข้าง ได้อสมการที่สมมูลกันเป็น

$$\frac{a}{b} + 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + 3\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \leq 4 + 2\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}$$ ซึ่งสมมูลกับ $$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geq 3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$$

ให้ $x = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ (> 0) เมื่อคูณทั้งสองข้างของอสมการท้ายนี้ด้วย x^3 (> 0) แล้วจัดรูป ได้อสมการที่สมมูลกันเป็น

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$$

จากการตรวจพินิจ พบว่า $x = 1$ เป็นรากหนึ่งของ $x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

ดังนั้น

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x - 1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1)$$

เนื่องจาก $x^4 + 2x^3 + 2x + 1 > 0$ สำหรับแต่ละจำนวนจริง $x > 0$

ดังนั้น

$$x^6 - 3x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) \geq 0$$

ซึ่งคืออสมการที่ต้องการพิสูจน์

สังเกตว่าอสมการท้ายนี้ เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ กล่าวคือ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

ตัวอย่าง 10.1.4 ถ้า $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1$

วิธีทำ ให้ $f(a, b, c, d) := (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d$

พิจารณา กรณีที่ตัวแปรทั้งหมดถูกตรึงไว้ ยกเว้นหนึ่งตัวที่อนุญาตให้แปรไปทั่วช่วง $[0, 1]$ เพื่อความสะดวก

สมมุติว่า b, c, d ถูกตรึง แต่ a แปรไปเหนือช่วงปิด $[0, 1]$ ในกรณีนี้ ฟังก์ชัน f ขึ้นกับตัวแปรa ตัวเดียว ให้เขียนเป็น

$$f^*(a) = (1-a)K + a + M \quad \text{เมื่อ } K = (1-b)(1-c)(1-d),\ M = b + c + d$$

สังเกตว่า f^* เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นใน a ดังนั้นจะบรรลุค่าต่ำสุด ณ จุดปลายของช่วง $[0, 1]$ ในที่นี้ต้องเป็นจุดปลายซ้าย $a = 0$ เพราะ $f^*(a) = (1-K)a + K + M$ มีความชัน $1 - K = 1 - (1-b)(1-c)(1-d) \geq 0$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ $f^*(a)$ เกิด ณ $a = 0$ เนื่องจากข้อโต้แย้งดังกล่าว ไม่ได้ใช้ความจริงว่าเป็นตัวแปรใด

ดังนั้น ข้อสรุปเดียวกันย่อมใช้ได้กับตัวแปรอื่น จึงได้ว่า ค่าต่ำสุดของ f เกิด ณ $(a, b, c, d) = (0, 0, 0, 0)$

เพราะฉะนั้น $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq f(0, 0, 0, 0) = 1$

ตัวอย่าง 10.1.5 ให้ $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$, $a \neq 0$ ถ้า $n \in \mathbb{Z}$ มีสมบัติว่า $n < p(n) < p(p(n))$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $p(p(n)) < p(p(p(n))) \iff a > 0$

วิธีทำ เพื่อความสะดวก ให้ $p^2(x) := p(p(x))$, $p^3(x) := p(p(p(x)))$ สังเกตว่า ถ้า $x \neq y$ แล้ว

$$\frac{p(x) - p(y)}{x - y} = a(x + y) + b$$

เนื่องจาก $a \neq 0$ จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $p^2(n) < p^3(n) \iff a > -1$

พิจารณา $\dfrac{p^3(n) - p^2(n)}{p^2(n) - p(n)} - \dfrac{p^2(n) - p(n)}{p(n) - n} = a\{p^2(n) + p(n)\} + b - \{a(p(n) + n) + b\} = a\{p^2(n) - n\}$

ดังนั้น

$$p^3(n) - p^2(n) = \{p^2(n) - p(n)\}\left\{a(p^2(n) - n) + \frac{p^2(n) - p(n)}{p(n) - n}\right\}$$

ซึ่งให้ว่า

$$p^3(n) > p^2(n) \iff a\{p^2(n) - n\} + \frac{p^2(n) - p(n)}{p(n) - n} > 0$$

$$\iff a > \frac{-\{p^2(n) - p(n)\}}{\{p^2(n) - n\}\{p(n) - n\}}$$

$$\iff a > -1$$

(ทั้งนี้เพราะ $0 < \dfrac{p^2(n) - p(n)}{\{p^2(n) - n\}\{p(n) - n\}} < \dfrac{1}{p(n) - n} \leq 1$ และ a, n, p(n), $p^2(n)$ ต่างก็เป็นจำนวนเต็มทั้งสิ้น)

ตัวอย่าง 10.1.6 ให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ จงพิสูจน์ว่า อสมการ $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$ เป็นจริง $\Leftrightarrow$ อสมการ $ax + x/(x - 1) > b$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง $x > 1$

วิธีทำ ถ้า $a \geq b$ แล้ว $\sqrt{a} \geq \sqrt{b}$ ซึ่งแสดงว่าอสมการแรกซ้ายมือ เป็นจริงเสมอ

ในขณะที่ ถ้า $x > 1$ แล้ว $ax + \dfrac{x}{x-1} > a + 1 > b$ ซึ่งแสดงว่า อสมการทางขวามือเป็นจริงเสมอ
เพราะฉะนั้น จากนี้ไป จะสมมุติว่า $b > a$
ถ้า $x > 1$ แล้ว อสมการทางขวามือ สมมูลกับ $f(x) := ax^2 - (a + b - 1)x + b > 0$

- **สมมุติ $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$** : ดิสคริมิแนนต์ของ f(x) คือ

$$D = (a + b - 1)^2 - 4ab = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b} - 1)(\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1)(\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)$$

สังเกตว่า $\sqrt{a} + \sqrt{b} + 1 > 0$ และ $\sqrt{a} - \sqrt{b} - 1 < 0$
นอกจากนี้ จาก $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$ เราได้ว่า $1 > \sqrt{b} - \sqrt{a}$ และ $\sqrt{b} + \sqrt{a} > (\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})$
ดังนั้น $\sqrt{b} + \sqrt{a} - 1 > b - a - 1$

ถ้า $\sqrt{b} + \sqrt{a} - 1 > 0$ แล้ว $D < 0$ ดังนั้น $f(x) > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง

ถ้า $\sqrt{b} + \sqrt{a} - 1 \leq 0$ แล้ว $b - a - 1 < 0$ และถ้า x_1, x_2 เป็นรากของ $f(x) = 0$ แล้ว

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2a}(a + b - 1) < 1$$

กล่าวคือ พิกัด y ของจุดยอดของพาราโบลา $y = f(x)$ อยู่ทางซ้ายของจุด $x = 1$ และเนื่องจาก $f(1) = 1 > 0$ จึงได้ว่า $f(x) > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x > 1$

- **สมมุติ $f(x) > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x > 1$:** เราจะพิสูจน์ว่า $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$ สมมุติสิ่งนี้เป็นเท็จ กล่าวคือสมมุติว่า $\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 \leq 0$ ดังนั้น $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 > 0$ (ทั้งนี้ เพราะ ถ้า $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 \leq 0$ แล้ว โดยการบวกอสมการ $\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 \leq 0$ เข้ากับ $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 \leq 0$ จะได้ $\sqrt{a} \leq 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง)
เพราะฉะนั้น $\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1 > 0$ ซึ่งชี้ว่า $(\sqrt{b} + \sqrt{a})(\sqrt{b} - \sqrt{a}) > \sqrt{b} - \sqrt{a}$ กล่าวคือ $b - a > \sqrt{b} - \sqrt{a}$

ในอีกทิศทางหนึ่ง เราทราบจากอสมการข้างต้นว่า $D \geq 0$ $f(x) > 0$ $(x > 1)$ และ $f(1) = 1 > 0$
ดังนั้น จุดยอดของพาราโบลา $y = f(x)$ มีพิกัด x อยู่ทางซ้ายของจุด $x = 1$ กล่าวคือ $\dfrac{1}{2a}(a + b - 1) < 1$
ดังนั้น $b - a - 1 < 0$ ซึ่งให้ว่า $a - b + 1 > 0$

เมื่อบวกอสมการ $a - b + 1 > 0$ เข้าด้วยกันกับ $b - a > \sqrt{b} - \sqrt{a}$ ได้ว่า $\sqrt{a} + 1 > \sqrt{b}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งที่ต้องการ

ตัวอย่าง 10.1.7 ให้ $f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ เมื่อ $a \in \mathbb{R}$
จงหา a ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้

(a) สมการ $f(x) = 0$ มีรากจริงสองราก x_1, x_2 (อาจเท่ากันได้) ที่สอดคล้องกับ $\left|x_1^3 - x_2^3\right| \leq 4$

(b) อสมการ $f(x) \geq 0$ เป็นจริงสำหรับทุก $x \in \mathbb{Z}$

วิธีทำ (a) ค่าดิสคริมิแนท์ของ f คือ $D = a^2 - 4(a^2 - 4) = 16 - 3a^2$
เนื่องจาก $x_1 + x_2 = a$ และ $x_1x_2 = a^2 - 4$
เราได้ว่า $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = a^2 - (a^2 - 4) = 4$
ดังนั้น

$$4 \geq \left|x_1^3 - x_2^3\right| = \left|x_1 - x_2\right|\left|x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right| \Leftrightarrow \left|x_1 - x_2\right| \leq 1$$

จาก $x_1, x_2 = \frac{a \pm \sqrt{D}}{2}$ ได้ว่า $|x_1 - x_2| = \sqrt{D}$
ดังนั้น f(x) มีรากจริงสองราก x_1, x_2 ที่สอดคล้องกับ $\left|x_1^3 - x_2^3\right| = 4$ ก็ต่อเมื่อ $0 \leq D = 16 - 3a^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0$
ซึ่งให้ว่า $a \in \left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$

(b) ถ้า $D = 16 - 3a^2 \leq 0$ กล่าวคือ $a \in \left(-\infty, -\frac{4\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{4\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ แล้ว $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$
ถ้า $D > 0$ แล้ว เงื่อนไข $\sqrt{D} = \left|x_1 - x_2\right| \leq 1$ จำเป็น (แต่ไม่เพียงพอ) ในการที่จะทำให้ $f(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in \mathbb{Z}$
ในกรณีนี้ได้ $a \in \left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{5}\right] \cup \left[\sqrt{5}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$
เราต้องหา a ในช่วงเหล่านี้ที่มีสมบัติว่า $f(x) \geq 0$ เมื่อ $x \in \mathbb{Z}$

ถ้า $f(x) < 0$ สำหรับบาง $x \in \mathbb{Z}$ จากกราฟของ f(x) ซึ่งเป็นพาราโบลาหงาย จุดยอดอยู่ที่ $x = \frac{9}{2}$ จุดตัดแกน x ทั้งสองอยู่ที่ $-\frac{9}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2}$ จุด x ต้องอยู่ห่าง $\frac{9}{2}$ ไม่เกิน $\frac{1}{2}$
จาก $-\frac{3}{2} < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq -\frac{9}{2} \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} < -1$ หรือไม่ก็ $\frac{3}{2} > \frac{2\sqrt{3}}{3} \geq \frac{9}{2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$
สรุปได้ว่าจุด x เช่นว่านี้มีเพียง $x = \pm 1$

ดังนั้นหากเราต้องการ $0 \leq f(-1) = 1 + a + a^2 - 4$ และ $0 \leq f(1) = 1 - a + a^2 - 4$
แล้ว $a \in \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{4\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right]$

เมื่อรวมข้อมูลเหล่านี้เข้าด้วยกัน สรุปได้ว่า ค่า a ที่ต้องการอยู่ในเซตต่อไปนี้

$$a \in \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \infty\right)$$

ตัวอย่าง 10.1.8 (IMO 1974) ให้ P เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว และมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ถ้า n(P) เป็นจำนวนของจำนวนเต็ม k ที่แตกต่างกัน ที่ทำให้ $\{P(k)\}^2 = 1$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $n(P) - \deg P \leq 2$ เมื่อ deg P แทนดีกรีของพหุนาม P

วิธีทำ โจทย์สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้ ให้ P(x) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมีดีกรี d จงแสดงว่าสมการ

$$\{P(x)\}^2 = 1 \qquad (10.1.8.1)$$

มีรากที่เป็นจำนวนเต็มได้อย่างมาก d + 2 ราก

สมการ (10.8.1.1) เขียนได้ในรูป

$$\{P(x)\}^2 - 1 = \{P(x) - 1\}\{P(x) + 1\} = 0$$

ให้ $Q(x) = P(x) - 1$ ดังนั้น $Q(x) + 2 = P(x) + 1$ และโจทย์กลายเป็น ให้ Q(x) เป็นพหุนามที่มีดีกรี d และมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่าสมการ

$$Q(x)\{Q(x) + 2\} = 0$$

มีรากที่เป็นจำนวนเต็มได้อย่างมาก d + 2 ราก

กล่าวคือ จงแสดงว่า Q(x) และ Q(x) + 2 มีจำนวนรากที่เป็นจำนวนเต็มรวมกันแล้วได้อย่างมาก d + 2 ราก

เพื่อเป็นการพิสูจน์สิ่งนี้ เราจะใช้ทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้: ให้ mเป็นรากที่เป็นจำนวนเต็มของพหุนาม F(x) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น รากที่เป็นจำนวนเต็มของพหุนาม F(x) + p หรือ F(x) – p เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะที่เป็นไปได้ คือ m – p, m – 1, m + 1, m + p

การพิสูจน์ทฤษฎีบทประกอบทำได้ดังนี้ เนื่องจาก m เป็นรากของ F(x) ดังนั้น x – m เป็นตัวประกอบของ F(x) กล่าวคือ F(x) = (x – m)G(x) ซึ่งให้ว่า $F(x) \pm p = (x - m)G(x) \pm p$ เมื่อ G เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $F(x) \pm p = 0$ สำหรับบางจำนวนเต็ม x แล้ว $(x - m)G(x) \pm p = 0$ กล่าวคือ $(x - m)G(x) = \pm p$ ดังนั้น x – m หาร p ลงตัว แต่ตัวหารของ p มีเพียง ± 1 และ $\pm p$ จึงได้ว่า $x - m = \pm 1$ หรือ $\pm p$ เพราะฉะนั้น x = m + 1, m – 1, m + p, m – p ตามที่ต้องการพิสูจน์

เมื่อประยุกต์ทฤษฎีบทประกอบนี้ พร้อมด้วย p = 2 กับสถานการณ์ของเรา ที่มี m เป็นรากที่เป็นจำนวนเต็มค่าน้อยสุดของ Q(x){Q(x) + 2} โดยสมมุติว่ารากจำนวนเต็มมีจริง เพื่อความสะดวกสมมุติว่า m เป็นรากของ Q(x) โดยทฤษฎีบทประกอบได้ว่า รากที่เป็นไปได้ของ Q(x) + 2 คือ m + 1, m + 2 เนื่องจาก Q(x) มีรากได้อย่างมาก d ราก ดังนั้นพหุนามผลคูณ Q(x){Q(x) + 2} มีรากที่เป็นจำนวนเต็มได้อย่างมาก d + 2 ราก

ตัวอย่าง 10.1.9 (IMO 1962) จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$

วิธีทำ ให้ $f(x) := \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$ ดังนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันจริง ก็ต่อเมื่อ $-1 \leq x \leq 3$ สำหรับค่า x ในช่วงนี้ ฟังก์ชัน f(x) เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ อย่างต่อเนื่อง จาก f(–1) = 2 มายัง f(3) = –2

ดังนั้น จะมีค่า x = a เพียงหนึ่งเดียวที่ทำให้ f(a) = $\frac{1}{2}$ ดังนั้น คำตอบของโจทย์ คือทุกจำนวนจริง ที่สอดคล้องกับ $-1 \le x < a$ สังเกตว่า f(1) = 0 ดังนั้น a < 1

การหาค่า a ทำโดยการแก้สมการ $\frac{1}{2} = f(a) = \sqrt{3-a} - \sqrt{a+1}$ ซึ่งให้ $a = 1 \pm \frac{\sqrt{31}}{8}$

จาก a < 1 ค่าที่สอดคล้องกับเครื่องหมายลบ เท่านั้นที่ใช้ได้ เพราะฉะนั้นคำตอบคือ $-1 \le x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$

ตัวอย่าง 10.1.10 จงหาค่า $a \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้อสมการ

$$x^2\left\{2-\log_2\left(\frac{a}{a+1}\right)\right\} + 2x\left\{1+\log_2\left(\frac{a}{a+1}\right)\right\} - 2\left\{1+\log_2\left(\frac{a}{a+1}\right)\right\} > 0$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x

วิธีทำ อสมการในโจทย์มีความหมาย เมื่อ $\frac{a}{a+1} > 0$ กล่าวคือเมื่อ $a < -1$ หรือ $a > 0$ นอกจากนี้ เราทราบว่า พหุนามกำลังสอง มีค่าเป็นบวกสำหรับทุกค่าจริงของตัวแปร x เมื่อสัมประสิทธิ์นำเป็นบวก และดิสคริมิแนนต์เป็นลบ ดังนั้น ค่า a ที่ต้องการ ต้องสอดคล้องกับเงื่อนไขของ

$$2-\log_2\left(\frac{a}{a+1}\right) > 0 \quad \text{และ} \quad -\left\{\log_2\left(\frac{a}{a+1}\right)\right\}^2 + 4\log_2\left(\frac{a}{a+1}\right) + 5 < 0$$

เมื่อแก้อสมการทั้งคู่นี้พร้อมกัน พบว่า $0 < a < 1$

ตัวอย่าง 10.1.11 เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ ให้ P(n) แทนจำนวนของฟังก์ชันกำลังสอง $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(a) $a,b,c \in \{1,2,\ldots,n\}$;

(b) สมการ f(x) = 0 มีรากเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด

จงพิสูจน์ว่า $n < P(n) < n^2$ เมื่อ $n \ge 4$

วิธีทำ เนื่องจากสมการกำลังสอง $x^2 + kx + k - 1 = 0$ $(k = 2,3,..n)$ และ $2x^2 + 4x + 2 = 0$, $x^2 + 4x + 4 = 0$ ทุกสมการมีรากเป็นจำนวนเต็มทั้งหมด จึงได้ทันทีว่า P(n) > n

ให้ f สอดคล้องกับสมมุติฐานของโจทย์ ดังนั้นเขียนได้ว่า

$$f(x) = a(x + \alpha_1)(x + \alpha_2)$$

โดยที่ $\alpha_1,\alpha_2 \in Z$; $a, a(\alpha_1 + \alpha_2), a\alpha_1\alpha_2 \in \{1,2,\ldots,n\}$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เราได้ว่า $\alpha_2 \le \frac{n}{a\alpha_1}$

ดังนั้น

$$P(n) \le \sum_{\substack{1\le\alpha_1\le n \\ 1\le a\le n}} \frac{n}{a\alpha_1} = n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2$$

เนื่องจาก $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} < \sqrt{n}$ เมื่อ $n \ge 5$ และ $p(4) = 5$
ดังนั้น $P(n) < n^2$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 10.1.12 (IMO 1973) ให้ a, b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้สมการ

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

มีรากจริงอย่างน้อยหนึ่งราก จงหาคู่อันดับ (a, b) เหล่านี้ทั้งหมด และหาค่าต่ำสุดของ $a^2 + b^2$

วิธีทำ พิจารณาสมการ

$$x + \frac{1}{x} = y \qquad (y \in \mathbb{R}) \qquad (10.1.12.1)$$

สมการนี้สมมูลกับ $x^2 - yx + 1 = 0$ ซึ่งเป็นสมการกำลังสองใน x ที่มีรากจริง ก็ต่อเมื่อ ดิสคริมิแนนท์ $y^2 - 4 \ge 0$ กล่าวคือ ก็ต่อเมื่อ $|y| \ge 2$ สำหรับการแก้สมการ $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ หารตลอดด้วย x^2 แล้วเปลี่ยนตัวแปร $y = x + \frac{1}{x}$ ได้ $y^2 + ay + (b-2) = 0$ รากของสมการกำลังสองนี้คือ

$$y = x + \frac{1}{x} = \frac{1}{2}\left\{-a \pm \sqrt{a^2 - 4(b-2)}\right\}$$

และเงื่อนไขที่ว่าสมการแรกเริ่ม (ใน x) มีรากจริงอย่างน้อยหนึ่งรากชี้ว่า $|y| \ge 2$ กลายเป็น $|a| + \sqrt{a^2 - 4(b-2)} \ge 4$ ซึ่งสมมูลกับ $\sqrt{a^2 - 4(b-2)} \ge 4 - |a|$ ซึ่งให้เงื่อนไขของคู่อันดับที่ต้องการทั้งหมด
เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้าง แล้วลบด้วย a^2 ได้ $8|a| \ge 8 + 4b$ เมื่อหารตลอดด้วย 4 แล้วยกกำลังสองอีกครั้งหนึ่ง ได้ $4a^2 \ge b^2 + 4b + 4$ เมื่อบวกด้วย $4b^2$ ทั้งสองข้าง ได้ $4a^2 + 4b^2 \ge 5b^2 + 4b + 4$
ดังนั้น

$$a^2 + b^2 \ge \frac{5}{4}\left(b^2 + \frac{4b}{5} + \frac{4}{5}\right) = \frac{5}{4}\left(b + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}$$

ค่าต่ำสุดของนิพจน์ทางขวามือ เกิดเมื่อ $b = -\frac{2}{5}$, $a = \pm\frac{4}{5}$ และค่าต่ำสุดของ $a^2 + b^2$ คือ $\frac{4}{5}$

ตัวอย่าง 10.1.13 (IMO 1988) จงแสดงว่าเซตของจำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \ge \frac{5}{4}$$

เป็นยูเนียนของช่วงที่ต่างสมาชิกกัน และผลบวกของความยาวช่วงทั้งหมดคือ 1988

วิธีทำ เราแทน 70 และ 5/4 ด้วยจำนวนเต็มบวก n และจำนวนจริง c และพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \cdots + \frac{n}{x-n} \qquad (10.1.13.1)$$

ที่นิยามบนเซต $J_0 \cup J_1 \cup \cdots \cup J_n$ เมื่อ $J_0 = (-\infty, 1)$, $J_k = (k, k+1)$ $(k = 1,\ldots, n-1)$, $J_n = (n, \infty)$ ภายในแต่ละช่วงเหล่านี้ ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องและลดลงโดยแท้ ตรึงค่า $k \in \{1,\ldots, n-1\}$ แล้วตรวจพฤติกรรมของ f ณ จุดปลายช่วงของ J_k เมื่อ $x \longrightarrow k$ จากทางขวา $f(x) \longrightarrow \infty$ และเมื่อ $x \longrightarrow k+1$ จากทางซ้าย $f(x) \longrightarrow -\infty$ (ซึ่งมาจากพฤติกรรมของผลบวก $\frac{k}{x-k} + \frac{k+1}{x-(k+1)}$ ในขณะที่พจน์อื่นในนิยามของ f ลู่เข้าสู่ค่าลิมิตที่มีค่าจำกัด) ดังนั้น จะมีจุดหนึ่งเดียว $p_k \in J_k$ ที่ทำให้ $f(p_k) = c$

ในกรณีของช่วง $J_n = (n, \infty)$ ค่าลิมิตของ f ณ n คือ ∞ ในขณะที่เมื่อ $x \longrightarrow \infty$ ค่าลิมิตของ f คือ 0 เนื่องจาก c เป็นจำนวนบวก เราเห็นว่า ในกรณีนี้เช่นกัน จะมีจุดหนึ่งเดียว $p_n \in J_n$ ที่ทำให้ $f(p_n) = c$ นิยามช่วงที่ต่างสมาชิกกัน $I_k = (k, p_k]$ $(k = 1,\ldots, n)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันลดในแต่ละช่วง J_k จึงได้ว่า $f(x) \geq c$ เมื่อ $x \in I_k$ และ $f(x) < c$ เมื่อ $x \in J_k - I_k$ $(k = 1,\ldots, n)$ ใน J_0 ทุกพจน์ใน (10.1.13.1) เป็นลบ ดังนั้น $f(x) < 0$ ทำให้ได้ว่า $\{x; f(x) \geq c\} = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ เราเหลือเพียงการคำนวนความยาวของช่วง $I_1, I_2,\ldots, I_n$

พิจารณาพหุนาม $Q(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$
เมื่อ $k \in \{1,\ldots, n\}$ ให้ $P_k(x)$ เป็นพหุนามที่ได้จาก Q(x) ด้วยการลบตัวประกอบ $(x-k)$ ออก นิยาม

$$F(x) = Q(x)(c - f(x)) = cQ(x) - P_1(x) - 2P_2(x) - \cdots - nP_n(x) \qquad (10.1.13.2)$$

แต่ละจำนวนของ $p_1,\ldots, p_n$ เป็นรากของสมการ $f(x) = c$

ดังนั้นย่อมเป็นรากของ $F(x) = 0$ ด้วย และ F ย่อมไม่มีรากอื่นอีก เพราะมีดีกรีเป็น n สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ของ Q คือ $-(1 + 2 + \cdots + n)$ สัมประสิทธิ์ของ x^{n-1} ในแต่ละพหุนาม $P_1,\ldots, P_n$ (ที่มีดีกรี $n-1$) มีค่าเท่ากับ 1 ในพหุนาม F ที่นิยามโดย (10.1.13.2) พจน์ x^{n-1} ปรากฏพร้อมด้วยสัมประสิทธิ์

$$D = -c(1 + 2 + \cdots + n) - 1 - 2 - \cdots - n$$

และพจน์นำ x^n มีสัมประสิทธิ์เป็น c ดังนั้น รากของ F รวมกันได้

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = -\frac{D}{c} = \frac{c+1}{c} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

ช่วง I_k มีความยาว $p_k - k$ ดังนั้น ผลบวกของความยาวของ $I_1, I_2,\ldots, I_n$ คือ

$$(p_1 - 1) + \cdots + (p_n - n) = (p_1 + \cdots + p_n) - (1 + \cdots + n) = \frac{c+1}{c} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2c}$$

เมื่อ $n = 70$, $c = \frac{5}{4}$ นิพจน์นี้มีค่า 1988 ตามต้องการ

ตัวอย่าง 10.1.14 (IMO 1960) จำนวนจริง x ต้องมีค่าเท่าใด จึงจะทำให้ อสมการต่อไปนี้เป็นจริง

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$$

วิธีทำ นิพจน์ทางซ้ายมือของอสมการ มีความหมาย สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$ และเป็นจำนวนจริง เมื่อ $x \geq -\frac{1}{2}$ สมมุติว่า x สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสองนี้ เมื่อคูณทั้งเศษ และส่วนของนิพจน์ทางซ้ายมือด้วย $(1 + \sqrt{1+2x})^2$ แล้วได้อสมการที่สมมูลกันเป็น

$$(1 + \sqrt{1+2x})^2 < 2x + 9$$

เปลี่ยนตัวแปร $y = \sqrt{1+2x}$ ได้ $(1 + y)^2 < y^2 + 8$ เมื่อจัดรูปจะได้ $y < \frac{7}{2}$

กล่าวคือ $x < \frac{45}{8}$ เพราะฉะนั้นคำตอบที่สมบูรณ์ คือ $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{45}{8}$, $x \neq 0$

ตัวอย่าง 10.1.15 (USAMO 1989) ให้ $P(z) = z^n + c_1z^{n-1} + c_2z^{n-2} + \cdots + c_n$ เป็นพหุนามในตัวแปรเชิงซ้อน z และสัมประสิทธิ์ c_k เป็นจำนวนจริง สมมุติว่า $|P(i)| < 1$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง a, b ที่ทำให้

$$P(a + bi) = 0 \text{ และ } (a^2 + b^2 + 1)^2 < 4b^2 + 1$$

วิธีทำ ให้รากของ P(z) เป็น $r_1, \ldots, r_n$ ดังนั้น $P(z) = (z - r_1)(z - r_2)\cdots(z - r_n)$ อสมการที่กำหนดให้มา คือ $|i - r_1| \cdot |i - r_2| \cdots |i - r_n| < 1$ เนื่องจาก $|i - r| = \sqrt{1+r^2} \geq 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง r เพราะฉะนั้น ผลคูณของ $|i - r_j|$ ที่มี r_j ไม่ใช่จำนวนจริง ต้องมีค่า < 1

นอกจากนี้ บรรดา r_j ที่ไม่ใช่จำนวนจริง จะต้องปรากฏเป็นคู่สังยุค (เพราะสัมประสิทธิ์ของพหุนามเป็นจำนวนจริง) ดังนั้น จึงได้ว่า มีบางราก $r_j = a + bi$ ที่มีสมบัติว่า $|i - r_j| \cdot |i - \overline{r_j}| < 1$

ดังนั้น $P(a + bi) = 0$ และ

$$1 > |i - (a + bi)| \cdot |i - (a - bi)| = \sqrt{a^2 + (1-b)^2} \cdot \sqrt{a^2 + (1+b)^2}$$
$$= \sqrt{(a^2 + b^2 + 1) - 2b} \cdot \sqrt{(a^2 + b^2 + 1) + 2b} = \sqrt{(a^2 + b^2 + 1)^2 - 4b^2}$$

เมื่อยกกำลังสองและจัดรูป จะได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 10.1.16 (Canadian MO 1985) ให้ $1 < x_1 < 2$ และนิยาม $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$

จงพิสูจน์ว่า เมื่อ $n \geq 3$ แล้ว $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$

วิธีทำ ให้ $x_{n+1} = f(x_n)$ โดยที่ $f(x) = \sqrt{2} + \frac{1}{2}(x - \sqrt{2})(2 - \sqrt{2} - x) = -\frac{x^2}{2} + x + 1$

ดังนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันลด จาก $\frac{3}{2}$ ไปยัง 1 เมื่อ x เพิ่มจาก 1 ไปยัง 2 ดังนั้น

$$1 < x_1 < 2 \Rightarrow 1 < x_2 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{11}{8} < x_3 < \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{8}(11 - 8\sqrt{2}) < x_3 - \sqrt{2} < \frac{1}{8}(12 - 8\sqrt{2})$$

ดังนั้น

$$|x_3 - \sqrt{2}| < 2^{-3}$$

สมมุติว่า $|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-n}$ สำหรับบาง $n \geq 3$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - \sqrt{2}| &= \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| \cdot |2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - x_n| \\ &\leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| \left\{|2 - 2\sqrt{2}| + |\sqrt{2} - x_n|\right\} \leq \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| \left(2\sqrt{2} - 2 + \frac{1}{8}\right) \\ &< \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}| < 2^{-(n+1)} \qquad \text{(เนื่องจาก } 2\sqrt{2} - 2 + 1/8 < 1\text{)}\end{aligned}$$

ซึ่งให้ผลที่ต้องการ โดยการอุปนัย

แบบฝึกหัด

1. ให้ $P(x) = ax^2 + bx - 3988a$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$
จงหาค่าของ $P(1994)$ เมื่อกำหนดว่าอสมการ $\{P(x) + x + 1\}^2 + 3\{1 - xP(x)\} \leq 0$ มีคำตอบ

2. ฟังก์ชัน $E(x, y) = x^4 + 5x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y + 4$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ x, y เป็น จำนวนจริงค่าใด

3. (APMC) ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

$$f(x) = \frac{x + x^2 + \cdots + x^n}{(1 + x^n)^2} \quad \text{เมื่อ } x \in (0, \infty)$$

และหาค่า x ทั้งหมดที่ให้ค่าสูงสุดนี้

4. (APMC) ให้ $a, b \in \mathbb{R}_0$ จงพิสูจน์ว่า

$$\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2}\right)^2 \leq \frac{a + \sqrt[3]{a^2 b} + \sqrt[3]{ab^2} + b}{4} \leq \frac{a + \sqrt{ab} + b}{3} \leq \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2}}{2}\right)^3}$$

และหาด้วยไต้สมการในแต่ละอสมการ เมื่อใด

5. (APMC) จงหาพหุนามทั้งหมดในรูป $P_n(x) = n!x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + (-1)^n(n + 1)n \in \mathbb{Z}[x]$ ที่มีราก $x_1, \ldots, x_n$ ทั้งหมดเป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับอสมการ

$$k \leq x_k \leq k + 1 \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

6. (APMC) พิจารณาฟังก์ชัน $f_0(x) = 2x$, $f_1(x) = \dfrac{x}{x-1}$ เมื่อ $x > 1$ จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง a, b ที่สอดคล้องกับ $1 < a < b$ จะมีจำนวนเต็ม $k \geq 1$ และ k-อันดับของดรรชนี $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{0, 1\}$ ที่ทำให้

$$a < f_{i_k}(f_{i_{k-1}}(\cdots(f_{i_1}(2))\cdots)) < b$$

7. ให้ $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n > 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \leq \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}$$

8. (Romanian MC) สำหรับ $a, b \in \mathbb{R}^+$ ให้ $t(a, b)$ เป็นรากบวกของสมการ

$$(a + b)x^2 - 2(ab - 1)x - (a + b) = 0$$

ให้ $M = \{(a, b); a \neq b, t(a, b) \leq \sqrt{ab}\}$ จงหาค่าต่ำสุดของ $t(a, b)$ เมื่อ $(a, b) \in M$

9. (Bulgarian MC) ให้ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ จงพิสูจน์ว่า

$$(x_1 + \cdots + x_n) - (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$$

และถามด้วยว่า อสมการนี้เป็นสมการเมื่อใด

10. มีจำนวนจริง a, b, c หรือไม่ที่ทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + a| + |x + y + b| + |y + c| > |x| + |x + y| + |y|$$

11. พิจารณาทุกฟังก์ชันพหุนามกำลังสอง $f(x) = ax^2 + bx + c$ ที่มีสมบัติว่า $a < b$ และ $f(x) \geq 0$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$ จงหาค่าต่ำสุดของนิพจน์ $\dfrac{a+b+c}{b-a}$

12. (British MO) ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ มีสมบัติว่า $a < b < c$, $a + b + c = 6$, $ab + bc + ca = 9$ จงพิสูจน์ว่า $0 < a < 1 < b < 3 < c < 4$

13. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ พิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad g(x) = cx^2 + bx + a$$

กำหนดให้ว่า $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$, $|f(1)| \leq 1$
จงแสดงว่า เมื่อ $x \in [-1, 1]$ แล้ว $|f(x)| \leq 5/4$ และ $|g(x)| \leq 2$

14. ให้ $a \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $(a^3 - a + 2)^2 > 4a^2(a^2 + 1)(a - 2)$

15. (Irish MO 1992) ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า ถ้ารากทุกรากของสมการกำลังสาม

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

เป็นจำนวนจริงที่อยู่ทางซ้ายของแกน y แล้ว $ab > 0$, $bc - ad > 0$ และ $ad > 0$

10.2 อสมการที่เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ตัวอย่าง 10.2.1 ให้ $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{x\cos ec(x) + y\cos ec(y)}{2} < \sec\left(\frac{x+y}{2}\right)$

วิธีทำ เราจะพิสูจน์อสมการที่แข็งขึ้นคือ ถ้า $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ แล้ว

$$\frac{x\cos ec(x) + y\cos ec(y)}{2} < \sec\left(\frac{x}{2}\right)\sec\left(\frac{y}{2}\right) < \sec\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

อสมการสุดท้ายทางขวามือเป็นจริงเพราะ $\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{y}{2}\right)$

$$< \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

จึงเหลือเพียงการพิสูจน์แรกทางซ้ายมือ ให้ T เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด ณ (0,0), (1,0), $\left(1, \tan\left(\frac{x}{4}\right)\right)$

ให้ S เป็นส่วนของจานหนึ่งหน่วยที่ถูกบรรจุอยู่ใน T

เนื่องจาก พื้นที่ของ S < พื้นที่ของ T

ดังนั้น

$$x < 4\tan\left(\frac{x}{4}\right) = \sin x \sec\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right) \quad \text{ซึ่งให้ว่า } x\cos ec\, x < \sec\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right)$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{x\cos ec(x) + y\cos ec(y)}{2} < \frac{1}{2}\left(\sec\left(\frac{x}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right) + \sec\left(\frac{y}{2}\right)\sec^2\left(\frac{y}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sec\left(\frac{x}{2}\right)\sec\left(\frac{y}{2}\right)\left\{\cos\left(\frac{y}{2}\right)\sec^2\left(\frac{x}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)sce^2\left(\frac{y}{4}\right)\right\}$$

$$= \sec\left(\frac{x}{2}\right)\sec\left(\frac{y}{2}\right)\left\{\frac{\cos\left(\frac{y}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{y}{2}\right)}\right\}$$

$$< \sec\left(\frac{x}{2}\right)\sec\left(\frac{y}{2}\right)$$

ตัวอย่าง 10.2.2 จงพิสูจน์ว่า

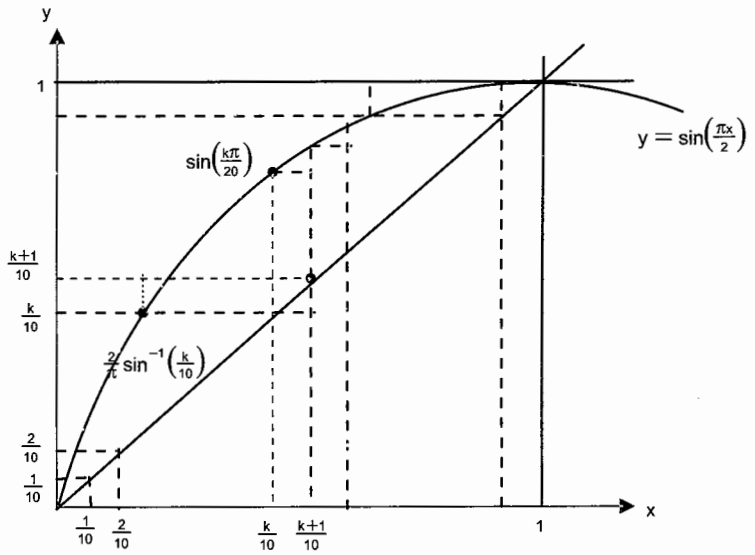
$$\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{20}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{9\pi}{20}\right) < \frac{99}{10} - \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{2}{10}\right) - \cdots - \frac{2}{\pi}\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)$$

วิธีทำ พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

พบว่าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใต้กราฟ และเหนือแกน x เมื่อ $x \in [k/10, (k+1)/10]$ มีค่า $\frac{1}{10}\sin(k\pi/20)$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทางซ้ายของกราฟ แต่ทางขวาของแกน y เมื่อ $y \in \left[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10}\right]$ มีค่า $\frac{2}{10\pi}\sin^{-1}\left(\frac{k}{10}\right)$

โดยที่พื้นที่ทั้งสอง อยู่ภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัส $\left[0, \frac{1}{10}\right] \times \left[0, \frac{1}{10}\right]$



ดังนั้นเมื่อรวมพื้นที่เหล่านี้เข้าด้วยกันได้

$$\frac{1}{10}\left[\sin\left(\frac{\pi}{20}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{9\pi}{20}\right)\right]+\frac{2}{10\pi}\left[\sin^{-1}\left(\frac{1}{10}\right)+\cdots+\sin^{-1}\left(\frac{9}{10}\right)\right] < 1-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{99}{100}$$

เมื่อจัดรูป ได้อสมการที่ต้องการ

ตัวอย่าง 10.2.3 ให้ $x \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $(\sin x)\,x^2 + (\cos x)\,x + x^2 + \frac{1}{2} > 0$

วิธีทำ ให้ $x_0 \in \mathbb{R}$ พิจารณาพหุนามกำลังสอง $P(z) := (1+\sin x_0)z^2 + (\cos x_0)z + \frac{1}{2}$

ดิสคริมิแนนต์ของพหุนามนี้ คือ

$$\cos^2 x_0 - 2(1+\sin x_0) = 1 - \sin^2 x_0 - 2 - 2\sin x_0 = -(\sin x_0 + 1)^2 < 0 \quad \text{เมื่อ } x_0$$

เป็นจำนวนจริงที่ไม่อยู่ในรูป $2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

ดังนั้น $P(z) > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง z

ถ้า $x_0 \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ ซึ่งให้ว่า $(\sin x)\,x^2 + (\cos x)\,x + x^2 + \frac{1}{2} > 0$ เมื่อ $x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

ในกรณีที่ $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ อสมการที่ต้องการเป็นจริง เพราะค่าทางซ้ายมือคือ $\frac{1}{2} > 0$

ตัวอย่าง 10.2.4 (IMO 1977) ให้ a, b, A, B เป็นจำนวนจริงบวก และ

$$f(\theta) = 1 - a\cos\theta - b\sin\theta - A\cos 2\theta - B\sin 2\theta$$

จงพิสูจน์ว่า ถ้า $f(\theta) \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง θ แล้ว $a^2 + b^2 \leq 2$ และ $A^2 + B^2 \leq 1$

วิธีทำ ให้ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ดังนั้น $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$ และมีมุม α ที่มีสมบัติว่า $\frac{a}{r} = \cos\alpha$, $\frac{b}{r} = \sin\alpha$ ดังนั้น เราสามารถเขียนได้ว่า

$$a\cos\theta + b\sin\theta = r\left\{\frac{1}{r}(a\cos\theta) + \frac{1}{r}(b\sin\theta)\right\} = r(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) = r\cos(\theta - \alpha)$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ และ $\frac{A}{R} = \cos 2\beta$, $\frac{B}{R} = \sin 2\beta$ และได้ว่า

$$A\cos 2\theta + B\sin 2\theta = R\left\{\frac{1}{R}(A\cos 2\theta) + \frac{1}{R}(B\sin 2\theta)\right\}$$
$$= R(\cos 2\beta\cos 2\theta + \sin 2\beta\sin 2\theta) = R\cos 2(\theta - \beta)$$

จากนี้ f สามารถเขียนได้ในรูป

$$f(\theta) = 1 - r\cos(\theta - \alpha) - R\cos 2(\theta - \beta) \qquad (10.2.4.1)$$

เมื่อ $\theta = \alpha + 45^\circ$ และ $\theta = \alpha - 45^\circ$ นิพจน์ (10.2.4.1) ให้

$$f(\alpha + 45^\circ) = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2(\alpha - \beta + 45^\circ) \qquad (10.2.4.2)$$

และ

$$f(\alpha - 45^\circ) = 1 - \frac{r}{\sqrt{2}} - R\cos 2(\alpha - \beta - 45^\circ) \qquad (10.2.4.3)$$

ถ้า $r > \sqrt{2}$ แล้ว $1 - \frac{r}{\sqrt{2}} < 0$ และเนื่องจาก มุม $2(\alpha - \beta) + 90^\circ$ และ $2(\alpha - \beta) - 90^\circ$ ต่างกันอยู่ 180° ค่าโคไซน์ของมุมทั้งสองเท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงข้ามกัน ดังนั้นนิพจน์หนึ่งจาก $R\cos 2(\alpha - \beta + 45^\circ)$, $R\cos 2(\alpha - \beta - 45^\circ)$ เป็นบวก ทำให้ได้ว่าขวามือของสมการหนึ่งจาก (10.2.4.2), (10.2.4.3) ต้องเป็นลบ ซึ่งหมายความว่าอย่างน้อยค่าหนึ่งของ $f(\alpha + 45^\circ)$, $f(\alpha - 45^\circ)$ เป็นลบ ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐาน สรุปได้ว่า $r^2 = a^2 + b^2 \leq 2$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อหาค่า f ณ β และ ณ $\beta + \pi$ ได้ว่า

$$f(\beta) = 1 - r\cos(\beta - \alpha) - R\cos 0 = 1 - r\cos(\beta - \alpha) - R \qquad (10.2.4.4)$$

และ

$$f(\beta + \pi) = 1 - r\cos(\beta - \alpha + \pi) - R\cos 2\pi = 1 - r\cos(\beta - \alpha + \pi) - R \qquad (10.2.4.5)$$

ถ้า $R > 1$ แล้ว $1 - R < 0$ และเนื่องจาก $\beta - \alpha$ และ $\beta - \alpha + \pi$ ต่างกันอยู่ π ค่าโคไซน์จะมีเครื่องหมายตรงข้ามกัน ดังนั้น ขวามือของสมการหนึ่งจาก (10.2.4.4), (10.2.4.5) เป็นลบ กล่าวคือ อย่างน้อยค่าหนึ่งของ $f(\beta)$, $f(\beta + \pi)$ ต้อง < 0 ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐาน เพราะฉะนั้น $R^2 = A^2 + B^2 \leq 1$

ตัวอย่าง 10.2.5 เมื่อ $x \in [0, 1]$ จงพิสูจน์ว่า $\left|\frac{\pi}{4} - \sin^{-1}x\right| \le \frac{\pi}{4}\sqrt{1 - 2x\sqrt{1-x^2}}$

วิธีทำ ให้ $x = \sin A$, $0 \le A \le \frac{\pi}{2}$, และ $f(t) = (\sin t)/t$ เมื่อ $t \neq 0$, $f(0) = 1$ เนื่องจาก

$$\left|\frac{\pi}{4} - \sin^{-1}x\right| = \left|\frac{\pi}{4} - A\right| \quad \text{และ}$$

$$\sqrt{1 - 2x\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1 - 2\sin A\cos A} = \left|\cos A - \sin A\right| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - A\right)\right|$$

อสมการที่ต้องการพิสูจน์ เปลี่ยนรูปเป็น

$$\sin t \ge \frac{4t}{\pi\sqrt{2}} \quad \text{เมื่อ } 0 \le t = \left|\frac{\pi}{4} - A\right| \le \frac{\pi}{4}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ และ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ อสมการที่ต้องการพิสูจน์ เป็นจริงอย่างชัดเจน และกลายเป็นสมการ เมื่อ $t = 0$ ซึ่งคือ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ให้ค่าสูงสุดของ f) และเมื่อ $t = \frac{\pi}{4}$ ซึ่งคือ $x = 0$ หรือ $x = 1$ (ให้ค่าต่ำสุดของ f)

ตัวอย่าง 10.2.6 จงพิสูจน์ว่า

(1) $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$

(2) $\cos(\sin^{-1} x) < \sin^{-1}(\cos x)$ $\quad (0 \le x \le 1)$

(3) $\left|\sin(px)\right| < p\left|\sin x\right|$ $\quad (p \in \mathbb{N},\ p > 1,\ \sin x \neq 0)$

วิธีทำ (1) ให้ $A = \cos x$ ดังนั้น $\sin A = \sin(\cos x)$ เนื่องจาก $\sin A < A$ ได้ $\sin(\cos x) < \cos x$ ในทำนองเดียวกันจาก $\sin x < x$ ได้ $\cos x < \cos(\sin x)$ ซึ่งให้ว่า $\sin(\cos x) < \cos x < \cos(\sin x)$

(2) ให้ $\sin A = \cos x$ ดังนั้น $A = \sin^{-1}(\cos x)$ แต่จาก $\sin A < A$ ได้ $\cos x < \sin^{-1}(\cos x)$
ในทำนองเดียวกัน จาก $x > \sin x$ ได้ $\sin^{-1}x > \sin^{-1}(\sin x) = x$ และ $\cos(\sin^{-1} x) < \cos x$
เพราะฉะนั้น $\cos(\sin^{-1} x) < \cos x < \sin^{-1}(\cos x)$

(3) จากเอกลักษณ์ $\frac{\sin 2kx}{\sin x} = 2\{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cdots + \cos(2k-1)x\}$

ได้ $\left|\frac{\sin 2kx}{\sin x}\right| < 2k$, $\left|\frac{\sin 2(k+1)x}{\sin x}\right| = \left|\frac{\sin(2kx)\cos x}{\sin x} + \cos(2kx)\right| < 2k + 1$

เมื่อแทนค่า $p = 2k, 2k + 1$ ได้

$$\left|\frac{\sin(px)}{\sin x}\right| < p$$

ตัวอย่าง 10.2.7 จงหาค่าสูงสุดของ $\sin A_1 \sin A_2 \cdots \sin A_n$ เมื่อกำหนดให้ว่า $\tan A_1 \tan A_2 \cdots \tan A_n = 1$

วิธีทำ ให้ $P = \sin A_1 \sin A_2 \cdots \sin A_n$ จาก $\tan A_1 \tan A_2 \cdots \tan A_n = 1$
ได้ว่า

$$P = \cos A_1 \cos A_2 \cdots \cos A_n$$

ดังนั้น

$$P^2 = \sin A_1 \cos A_1 \sin A_2 \cos A_2 \cdots \sin A_n \cos A_n = \frac{1}{2^n}(\sin 2A_1 \sin 2A_2 \cdots \sin 2A_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

ซึ่งให้ว่า $|P| \leq \frac{1}{\sqrt{2^n}}$ โดยเป็นสมการ เมื่อ $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \frac{\pi}{4}$

ตัวอย่าง 10.2.8 จงพิสูจน์ว่า $x \cot\left(\frac{x}{2}\right) - x \tan^3\left(\frac{x}{2}\right) < 2$ เมื่อ $0 < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร $A = \frac{1}{2}x$ และใช้อสมการที่รู้จักกันดีคือ $\tan A > A$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ได้ว่า $\tan\left(\frac{x}{2}\right) > \frac{x}{2}$
เมื่อ $0 < x < \pi$ ดังนั้น $2 > x \cot\left(\frac{x}{2}\right) > x \cot\left(\frac{x}{2}\right) - x \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$ เมื่อ $0 < x < \pi$

ตัวอย่าง 10.2.9 เมื่อ $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ จงพิสูจน์ว่า $a^2 (\tan x)(\cos x)^{1/3} + b^2 \sin x \geq 2xab$ และถามว่าเป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ พิจารณา พหุนามกำลังสอง ใน (a, b) เมื่อ x มีค่าดรึง: $a^2 (\tan x)(\cos x)^{1/3} + b^2 \sin x - 2xab$ ได้ว่า ดิสคริมิแนนต์ คือ $D = 4\{x^2 - (\tan x)(\cos x)^{1/3}(\sin x)\} = b^2\left(\left(\frac{a}{b}\right)^2 (\tan x)(\cos)^{1/3} - 2x\left(\frac{a}{b}\right) + \sin x\right)$

ถ้า $x = 0$ แล้ว $D = 0$ และพหุนามนี้เป็นศูนย์ จากนี้ไปสมมุติว่า $0 < x < \frac{\pi}{2}$
เราจะแสดงว่า $D < 0$ ซึ่งสมมูลกับ

$$\cos x < \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \qquad (10.2.9.1)$$

ซึ่งชี้ว่า พหุนามกำลังสองนี้ เป็นบวกเสมอ ยกเว้น ณ $(a, b) = (0, 0)$ เนื่องจาก

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{และ} \quad \frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6} \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} < \left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3$ ซึ่งสมมูลกับ $x^2 < 9$ ซึ่งเป็นจริงอย่างชัดเจน

โดยที่เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ x = 0 หรือ (a, b) = (0, 0)

ตัวอย่าง 10.2.10 (Putnam 1970) พิจารณากราฟของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx^3 + Ex^2y + Fxy^2 + Gy^3 = 0 \text{ เมื่อ } B^2 - 4AC < 0$$

จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนบวก d ที่ทำให้ ไม่มีจุด (x, y) ใดบนกราฟ สอดคล้องกับอสมการ $0 < x^2 + y^2 < d^2$

วิธีทำ ให้ $(x, y) = (r\cos t, r\sin t)$, $r > 0$ เป็นจุดใด ๆ บนกราฟ ดังนั้น

$$Ar^2\cos^2 t + Br^2 \sin t \cos t + Cr^2\sin^2 t + Dr^3\cos^3 t + Er^3\cos^2 t \sin t + Fr^3 \cos t \sin^2 t + Gr^3\sin^3 t = 0$$

เมื่อแก้สมการนี้ได้ $$r = \frac{\left|A\cos^2 t + B\sin t\cos t + C\sin^2 t\right|}{\left|D\cos^3 t + E\cos^2 t\sin t + F\cos t\sin^2 t + G\sin^3 t\right|}$$

สังเกตว่าตัวส่วนมีค่า $\le |D| + |E| + |F| + |G|$ ในขณะที่

ตัวเศษที่ไม่ใส่เครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ $= \frac{1}{2}A(1 + \cos 2t) + \frac{1}{2}B \sin 2t + \frac{1}{2}C(1 - \cos 2t)$

$$= \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}\{(A - C)\cos 2t + B \sin 2t\}$$

$$= \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}\left(\frac{(A - C)\cos 2t}{\{(A - C)^2 + B^2\}^{1/2}} + \frac{B\sin 2t}{\{(A - C)^2 + B^2\}^{1/2}\{(A - C)^2 + B^2\}^{1/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(A + C) + \frac{1}{2}\{(A - C)^2 + B^2\}^{1/2}\sin(2t + u)$$

เมื่อ $\sin u = \frac{A - C}{\{(A - C)^2 + B^2\}^{1/2}}$, $\cos u = \frac{B}{\{(A - C)^2 + B^2\}^{1/2}}$

ดังนั้น ค่าต่ำสุดของตัวเศษคือ $N = \frac{1}{2}\left\{|A + C| - \sqrt{(A - C)^2 + B^2}\right\}$ ซึ่งเป็นค่าบวกเพราะ $B^2 < 4AC$

เพราะฉะนั้น $r \ge \frac{N}{|D| + |E| + |F| + |G|}$

ให้ $d = \frac{N}{|D| + |E| + |F| + |G|}$ เราได้ว่า ไม่มีจุดใดบนกราฟ ที่อยู่ในระยะ $0 < r < d$

ตัวอย่าง 10.2.11 (IMO 1965) จงหาจำนวนจริง $x \in [0, 2\pi]$ ที่สอดคล้องกับอสมการ

$$2\cos x \le \left|\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x}\right| \le \sqrt{2}$$

วิธีทำ สังเกตว่า อสมการทางขวามือ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x ทั้งนี้ เพราะ ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของจำนวนบวกสองจำนวน มีค่าไม่มากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนที่มาก นอกจากนี้ อสมการทางซ้ายมือ เป็นจริงสำหรับ

จำนวนจริง x ที่ทำให้ $\cos x \le 0$ ซึ่งคือ $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ ส่วนการหาค่า x อื่น สังเกตว่าถ้า $\cos x \ge 0$ แล้วอสมการทางซ้ายมือ สมมูลกับ อสมการที่ได้จากการยกกำลังสองทั้งสองข้าง ซึ่งคือ

$$4\cos^2 x \le 1 + \sin 2x - 2\sqrt{1-\sin^2 2x} + 1 - \sin 2x = 2 - 2\left|\cos 2x\right| \text{ ซึ่งสมมูลกับ}$$

$$2 + 2\cos 2x \le 2 - 2\left|\cos 2x\right| \text{ ซึ่งสมมูลกับ}$$

$$\left|\cos 2x\right| \le -\cos 2x$$

อสมการสุดท้ายนี้ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $\cos 2x \le 0$ ซึ่งให้ว่า $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ เมื่อรวมกับข้อมูลข้างต้น สรุปได้ว่า คำตอบของอสมการคือ $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $a, b \in \mathbb{R}$, $f(x) = a\cdot\cos x + b\cdot\sin x$ เมื่อทราบว่าอสมการ $f(x) > 1$ ไม่มีคำตอบ แล้วจงแสดงว่า $|b| \le 1$

2. ให้ $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $xy + yz + zx = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2y(1-y^2)}{(1+y^2)^2} + \frac{2z(1-z^2)}{(1+z^2)^2} \le \frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2}$$

3. (Bulgarian MO 1997) สำหรับ $b \in \mathbb{R}$ ให้ $f(b)$ เป็นค่าสูงสุดของฟังก์ชัน

$$\left|\sin x + \frac{2}{3+\sin x} + b\right|$$

เมื่อแปร x ไปเหนือเซตของจำนวนจริง จงหาค่าต่ำสุดของ $f(b)$

4. (Bulgarian MO 1999) จงหาทุกจำนวนจริงบวก a ที่ทำให้อสมการ $a^{\cos x} + a^{2\sin^2 x}$ เป็นจริงสำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

5. ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{ab} + \sqrt{cd} \le \sqrt{(a+d)(b+c)}$

6. ให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ มีสมบัติว่า $abc + a + c = b$ จงหาค่าสูงสุดของ

$$\frac{2}{a^2+1} + \frac{2}{b^2+1} + \frac{3}{c^2+1}$$

7. (Belarus MO) ลำดับของจำนวนจริงคู่หนึ่ง $x_1, x_2, \ldots$ และ $y_1, y_2, \ldots$ มีนิยามดังนี้

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1+x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1+\sqrt{1+y_n^2}} \qquad (n \geq 1)$$

จงพิสูจน์ว่า $2 < x_n y_n < 3$ สำหรับทุก $n > 1$

8. (Czech-Slovak MO) ให้ $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ จงหาค่าสูงสุดของนิพจน์

$$V_n = \sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \cdots + \sin x_n \cos x_1 \quad \text{เมื่อ } x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

9. (Chinese MO) ให้ $n \in \mathbb{N}, x_0 = 0, x_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ และ $x_1 + \cdots + x_n = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$1 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\cdot\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} < \frac{\pi}{2}$$

10. (Czech-Slovak MO 2000) จงหาคำตอบทั้งหมดใน $\mathbb{R}$ ของระบบอสมการ

$$\sin x + \cos y \geq \sqrt{2}, \quad \sin y + \cos z \geq \sqrt{2}, \quad \sin z + \cos x \geq \sqrt{2}$$

11. จงพิสูจน์อสมการต่อไปนี้

$$\sin^n(2x) + \{\sin^n x - \cos^n x\}^2 \leq 1 \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R})$$

บทที่ 11
อสมการประเภทอื่น ๆ

เนื้อหาในบทนี้เกี่ยวข้องกับโจทย์อสมการ ซึ่งไม่สามารถจัดได้อย่างชัดเจน และ/หรือไม่ได้ใช้วิธีการที่ปรากฏมาก่อนในเก้าบทแรก ส่วนใหญ่เป็นโจทย์จากการแข่งขัน ระดับต่าง ๆ ในต่างประเทศ เพื่อความสะดวกในการอ้างอิง เราจะแบ่งโจทย์ดังกล่าวออกเป็นสามหัวข้อ ได้แก่อสมการที่เกี่ยวข้องกับลำดับ อสมการที่เกี่ยวข้องกับการหาค่า และอสมการที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์

11.1 อสมการที่เกี่ยวข้องกับลำดับ

ตัวอย่าง 11.1.1 ลำดับ $\{x_n ; n \geq 0\}$ ของจำนวนจริงไม่ติดลบ สอดคล้องกับอสมการ

$$x_{n-1}^2 \leq c\, x_{n-2}\, x_n \quad (n \geq 2) \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวบวก}$$

จงแสดงว่าเมื่อ n, k เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq k \leq n$ แล้ว $x_k \leq c^{k(n-k)/2}\, x_n^{k/n}\, x_0^{(n-k)/n}$

วิธีทำ สังเกตว่า ถ้า $x_s = 0$ สำหรับบาง $s \geq 2$ แล้ว $x_{s-1} = 0$ และถ้า $x_s = 0$ สำหรับบาง $s \geq 0$ แล้ว $x_{s+1} = 0$ ดังนั้น ได้ว่า $x_k = 0$ สำหรับทุก $k \geq 1$ หรือ $x_k > 0$ สำหรับทุก $k \geq 0$

ในกรณีแรก สามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่าอสมการที่ต้องการเป็นจริง เมื่อเราตีความ $x^0 = 1$ ถ้า $x = 0$

ในกรณีที่สอง นิยาม $u_s = \dfrac{x_s}{x_{s-1}}$ $(s \geq 1)$ เนื่องจาก $u_s \leq c u_{s+1}$ $(s \geq 1)$ ได้ว่า $u_s \leq c^t\, u_{s+t}$ สำหรับทุก $s \geq 1$, $t \geq 0$ ดังนั้น

$$\left(\frac{x_k}{x_0}\right)^{n-k} = \left(\prod_{s=1}^{k} u_s\right)^{n-k} \leq \left(\prod_{s=1}^{k} c^{k+1-s} u_{k+1}\right)^{n-k} = c^{(n-k)k(k+1)/2} u_{k+1}^{k(n-k)}$$

$$\leq c^{(n-k)k(k+1)/2} \left(\prod_{s=0}^{n-k-1} c^s u_{k+1+s}\right)^k = c^{nk(n-k)/2} \left(\frac{x_n}{x_k}\right)^k$$

ตัวอย่าง 11.1.2 ลำดับของจำนวนจริง $\{u_n\}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$u_1 = 1 \text{ และ } u_n = 1/(u_1 + \cdots + u_{n-1}) \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } n > 1$$

จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ N ที่มีสมบัติว่า $u_1 + u_2 + \cdots + u_N > 1989$

วิธีทำ สมมุติเพื่อหาข้อขัดแย้งว่า ไม่มีจำนวนนับ N ดังกล่าว ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนนับ n ได้ว่า

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le 1989$$

ซึ่งให้ว่า $u_{n+1} \ge \frac{1}{1989} 1$

ให้ $M = 1989^2 + 1$ เนื่องจาก $u_1 = 1$ ดังนั้น

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_M \ge 1 + \frac{1}{1989}(M - 1) = 1990 > 1989$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งที่ต้องการ

ตัวอย่าง 11.1.3 ให้ $c_1 = 1$, $c_2 = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{2^2}}}$, $c_3 = \sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{3^2+\sqrt{3^3}}}}$ และในกรณีทั่วไป เมื่อ $n > 2$ ให้ $c_n = \sqrt{1+\sqrt{n+\sqrt{n^2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n^n}}}}}$ จงพิสูจน์ว่า $c_n < n$ สำหรับทุก $n > 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $c_n = \sqrt{n}\cdot\sqrt{\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{n}{n^2}+\sqrt{\frac{n^2}{n^4}+\sqrt{\cdots+\sqrt{\frac{n^n}{n^{2^n}}}}}}}$ สังเกตว่า ค่าภายใต้เครื่องหมายกรณฑ์ใหญ่น้อยกว่า $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}$ ให้ค่าท้ายนี้เป็น a_{n+1} (ซึ่งมี 1 อยู่ทั้งสิ้น $n+1$ ตัว ภายใต้กรณฑ์ทั้งหลาย) ดังนั้น $c_n < (\sqrt{n})\, a_{n+1}$

สังเกตว่า $a_{n+1}^2 = 1 + a_n$ และ ถ้า a_n มีลิมิตเป็น L แล้ว $L^2 = 1 + L$ ซึ่งให้ว่า $L = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.6$

การที่จะแสดงว่า a_n มีลิมิต เราจะแสดงว่า (i) $\{a_n\}$ เป็นลำดับเพิ่ม และ (ii) $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

(i) เห็นได้ชัดเจน เพราะในการก้าวจาก a_n ไปยัง a_{n+1} เราแทน 1 ตัวสุดท้ายด้วย $1 + \sqrt{1}$ ซึ่งมีค่ามากขึ้น

(ii) เราทดลองพิจารณา 2 เป็นค่าขอบเขตบน เห็นได้ชัดว่า $a_1 = \sqrt{1} < 2$ เมื่อใช้การอุปนัย ได้ว่า

$$a_{n+1}^2 = 1 + a_n < 1 + 2 < 4$$

ดังนั้น $a_{n+1} < 2$ ตามต้องการ

จาก $c_n < L\sqrt{n} < n$ ตราบเท่าที่ $n > L^2 \approx 2.6$ ดังนั้น ผลที่ต้องการเป็นจริง เมื่อ $n \ge 3$

ส่วนกรณี $n = 2$ สามารถตรวจสอบได้โดยทันทีว่าเป็นจริง

ตัวอย่าง 11.1.4 (IMO 1970) ให้ $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$1 = a_0 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le \cdots$$

นิยามจำนวนจริง $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ โดย $b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}$

(a) จงพิสูจน์ว่า $0 \le b_n < 2$ สำหรับทุก n

(b) ให้ c เป็นจำนวนจริงที่ $0 \le c < 2$ จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง $a_0, a_1, \ldots$ที่มีสมบัติข้างต้น โดยที่ $b_n > c$ เมื่อ n มีค่ามากพอ

วิธีทำ (a) สังเกตว่า $\frac{a_{k-1}}{a_k} \le 1$ ดังนั้น $b_n \ge 0$ สำหรับทุกจำนวนนับ n ให้ $\sqrt{a_k} = A_k$ พจน์ที่ k ของผลบวก b_n คือ

$$\left(1-\frac{A_{k-1}^2}{A_k^2}\right)\frac{1}{A_k} = \frac{A_{k-1}^2}{A_k}\left(\frac{1}{A_{k-1}^2}-\frac{1}{A_k^2}\right) = \frac{A_{k-1}^2}{A_k}\left(\frac{1}{A_{k-1}}+\frac{1}{A_k}\right)\left(\frac{1}{A_{k-1}}-\frac{1}{A_k}\right)$$

$$= \frac{A_{k-1}}{A_k}\left(1+\frac{A_{k-1}}{A_k}\right)\left(\frac{1}{A_{k-1}}-\frac{1}{A_k}\right) \le 2\left(\frac{1}{A_{k-1}}-\frac{1}{A_k}\right)$$

เมื่อบวกอสมการเหล่านี้ สำหรับ k = 1, 2, ..., n สังเกตว่าค่าทางขวามือเป็นอนุกรมที่ตัดลดทอนกันได้ และได้ว่า

$$0 \le b_n \le 2\left(\frac{1}{A_0}-\frac{1}{A_n}\right) = 2\left(1-\frac{1}{A_n}\right) < 2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ n}$$

(b) ให้ $0 \le c < 2$ เราจะแสดงว่ามี a_i ที่เหมาะสมโดยการสร้างเป็นพจน์ในลำดับเรขาคณิต

ให้ $\frac{1}{\sqrt{a_k}} = d^k$ ดังนั้น พจน์ที่ k ของผลบวก b_n คือ $\left(1-\frac{d^{-2(k-1)}}{d^{-2k}}\right)d^k = (1-d^2)d^k$

ดังนั้น

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(1-d^2)d^k = (1-d^2)\sum_{k=1}^{n}d^k = (1-d^2)\frac{d-d^{n+1}}{1-d} = d(1+d)(1-d^n)$$

เราเลือก d ที่อยู่ระหว่าง 0 และ 1 การที่ให้ $b_n = d(1+d)(1-d^n) > c$ สำหรับ n ที่มีค่าสูงมากพอ เราต้องมีเงื่อนไขว่า $d(1+d) > c$ สิ่งนี้ทำได้สำหรับ c ใด ๆ ที่ < 2 เพราะ d(1 + d) มีค่าเข้าใกล้ 2 เมื่อ $d \to 1$

เนื่องจาก d < 1 เราเห็นว่า $1-d^n$ มีค่าใกล้ 1 เท่าใดก็ได้ เมื่อ n มีค่าสูงมากพอ

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $1-d^n > \frac{c}{d(1+d)}$ กล่าวคือ $d(1+d)(1-d^n) > c$ สำหรับทุก n ที่มีค่าสูงมากพอ

ตัวอย่าง 11.1.5 (IMO 1995) จงหาค่าสูงสุดของ x_0 ที่มีสมบัติว่า มีลำดับของจำนวนจริงบวก $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้

(i) $x_0 = x_{1995}$

(ii) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ (i = 1, 2,..., 1995)

วิธีทำ สมการในเงื่อนไข (ii) สามารถเขียนได้ในรูป $(x_{i-1}x_i - 1)(x_{i-1} - 2x_i) = 0$ ดังนั้น สำหรับแต่ละ i = 1,..., 1995 ได้ว่า

$$x_i = \frac{1}{x_{i-1}} \quad \text{หรือ} \quad x_i = x_{i-1}/2 \qquad (11.1.5.1)$$

เราจะแสดงว่า มีอย่างน้อยหนึ่ง x_i ที่มีค่าเป็น 1 สมมุติว่าไม่จริง ดังนั้น ทุก x_s อยู่ในยูเนียนของช่วงที่ต่างสมาชิกกัน $\cdots\cup\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)\cup\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cup\left[\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2]\cup(2,4]\cup(4,8]\cup\cdots$

ให้ระบายสีช่วงเหล่านี้สลับกันเป็น ⋯ แดง, น้ำเงิน, แดง, น้ำเงิน,⋯ จาก (11.1.5.1) เห็นได้ว่า ในแต่ละคู่ของ x_i ที่อยู่ถัดกัน หนึ่งพจน์ต้องอยู่ในช่วงแดง และอีกหนึ่งพจน์อยู่ในช่วงน้ำเงิน ดังนั้น x_0 และ x_{1995} อยู่ในช่วงที่มีสีแตกต่างกัน ขัดแย้งกับ (i) ดังนั้น จะต้องมีค่า k ที่ทำให้ $x_k = 1$

จาก (11.1.5.1) ถ้า x_i อยู่ในช่วงที่อยู่ในรูป $\left[\frac{1}{a},a\right]$ (สำหรับบางจำนวนบวก a) ดังนั้น $\frac{1}{a} \le x_i \le a$

- ถ้า $x_i = \frac{1}{x_{i-1}}$ แล้ว $\frac{1}{a} \le x_{i-1} = \frac{1}{x_i} \le a$
- ถ้า $x_i = \frac{x_{i-1}}{2}$ แล้ว $\frac{2}{a} \le x_{i-1} = 2x_i \le a$
- ถ้า $x_{i+1} = \frac{1}{x_i}$ แล้ว $\frac{1}{a} \le x_{i+1} \le a$
- ถ้า $x_{+1i} = \frac{x_i}{2}$ แล้ว $\frac{1}{2a} \le x_{i+1} \le \frac{a}{2}$

ดังนั้น x_{i-1} และ x_{i+1} จะอยู่ในช่วง $\left[\frac{1}{2a},2a\right]$ พจน์ $x_k = 1$ จึงเป็นเพียงพจน์เดียวของช่วงลดทอน [1, 1]

ดังนั้น $x_{k\pm1} \in \left[\frac{1}{2},2\right]$, $x_{k\pm2} \in \left[\frac{1}{4},4\right]$ และโดยการอุปนัย ได้ว่า x_{k-j} , $x_{k+j} \in \left[\frac{1}{2^j},2^j\right]$ สำหรับทุก j ที่มีสมบัติว่า x_{k-j} และ x_{k+j} มีความหมาย

กล่าวคือ สำหรับ j ที่สอดคล้องกับอสมการ $j \le k$ และ $j \le 1995 - k$ เมื่อเลือก j ให้เป็นค่าปลายทั้งสอง จะได้ $x_0 \le 2^k$ และ $x_0 = x_{1995} \le 2^{1995-k}$ ดังนั้น $x_0 \le 2^m$ เมื่อ $m = \min\{k, 1995 - k\} \le 997$ ขณะที่ค่า $x_0 = 2^{997}$ บรรลุได้ ถ้าเราให้ $x_i = 2^{997-i}$ (i = 0, 1,..., 1994) และ $x_{1995} = x_0$ ซึ่งสมการ (11.1.5.1) เป็นจริงด้วย

เพราะฉะนั้น 2^{997} เป็นค่าสูงสุดของ x_0

ตัวอย่าง 11.1.6 (IMO 1977) ในลำดับจำกัดของจำนวนจริงลำดับหนึ่ง ทราบว่าผลบวกของทุก 7 จำนวนที่อยู่ถัดกัน เป็นลบเสมอ และผลบวกของทุก 11 จำนวนที่อยู่ถัดกันเป็นบวกเสมอ จงหาจำนวนพจน์ที่มากสุดที่เป็นไปได้ของลำดับเช่นว่านี้

วิธีทำ เราจะพิสูจน์ว่าจำนวนพจน์มากสุดที่เป็นไปได้คือ 16

จะแสดงว่า $n < 17$ ทั้งนี้เพราะถ้า $n \geq 17$ แล้ว เราสามารถเรียงพจน์ 17 พจน์ที่อยู่ถัดกันได้เป็นดารางต่อไปนี้

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_7 \\ x_2 & x_3 & \dots & x_8 \\ & & \dots & \\ x_{11} & x_{12} & \dots & x_{17} \end{array}$$

เมื่อบวกพจน์ตามแถวพบว่าได้ค่าลบ แต่ถ้าบวกตามแนวตั้งพบว่าได้ค่าบวก ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ขั้นตอนสุดท้ายคือ แสดงว่ามีลำดับเช่นว่านี้ ที่มีพจน์ 16 พจน์ เช่นโดยการยกตัวอย่างดังนี้

$$5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5, -13, 5, 5, 5, -13, 5, 5$$

ตัวอย่าง 11.1.7 (APMO) จงหาลำดับของจำนวนจริง $a_1, a_2, \dots, a_{1995}$ ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, \dots, 1994 \quad \text{และ} \quad 2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geq a_1 + 1$$

วิธีทำ สมมุติว่า ลำดับ $a_1, a_2, \dots, a_{1995}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{1995} 2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq \sum_{n=1}^{1995} a_n - \sum_{n=1}^{1994} (n-1) + 1 = \sum_{n=1}^{1995} a_n - \sum_{n=1}^{1995} \{(n-1) - 1\}$$

กล่าวคือ

$$0 \geq \sum_{n=1}^{1995} \{a_n - (n-1) + 1 - 2\sqrt{a_n - (n-1)}\}$$

สังเกตว่า $\{\sqrt{a_n - (n-1)} - 1\}^2 = a_n - (n-1) - 2\sqrt{a_n - (n-1)} + 1 \quad (n = 1, 2, \dots, 1995)$

ดังนั้น

$$0 \geq \sum_{n=1}^{1995} \{a_n - (n-1) + 1 - 2\sqrt{a_n - (n-1)}\} = \sum_{n=1}^{1995} \{\sqrt{a_n - (n-1)} - 1\}^2 \geq 0$$

ซึ่งให้ว่า $\sqrt{a_n - (n-1)} = 1$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 1995$

กล่าวคือ $a_n = n$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 1995$

ในทำนองกลับกัน ถ้า $a_n = n$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 1995$ แล้ว

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} = 2 = n + 1 - (n-1) = a_{n+1} - (n-1) \quad \text{เมื่อ } n = 1, 2, \dots, 1994$$

และ

$$2\sqrt{a_{1995} - 1994} = 2 = 1 + 1 = a_1 + 1$$

สรุปได้ว่า $a_n = n$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 1995$ เป็นเพียงลำดับเดียวที่เป็นคำตอบของโจทย์

ตัวอย่าง 11.1.8 (AMOC 1996) ลำดับ $a_0, a_1, \ldots, a_{1997}$ มีสมบัติต่อไปนี้

(i) $0 \leq a_n \leq 1$ สำหรับทุก $n \geq 0$

(ii) $a_n \geq \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1})$ สำหรับทุก $n \geq 1$

(a) จงพิสูจน์ว่า $a_{1997} - a_{1996} \leq 1/1997$

(b) จงหาลำดับที่สอดคล้องตามเงื่อนไขทั้งสองข้างต้น และมีค่า $a_{1997} - a_{1996} = 1/1997$

วิธีทำ (a) สมมุติว่ามีลำดับ $a_0, a_1, \ldots, a_{1997}$ ที่มีสมบัติว่า $a_{1997} - a_{1996} > 1/1997$

ให้ $a_{1997} = x$ และ $a_{1997} - a_{1996} = d$ โดย (ii) ได้ว่า $a_n - a_{n-1} \geq a_{n+1} - a_n$ สำหรับทุก $1 \leq n \leq 1996$

ดังนั้น $a_1 - a_0 \geq a_2 - a_1 \geq \ldots \geq a_{1997} - a_{1996} = d$ ซึ่งให้ว่า

$$a_{1997} - a_0 = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{1997} - a_{1996}) \geq d + d + \ldots + d = 1997d$$

ดังนั้น $a_{1997} - a_0 \geq 1997d > 1$ เพราะ $d > 1/1997$

แต่โดย (i) ทราบว่า $1 + 0 \leq 1 + a_0 < a_{1997} \leq 1$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $a_{1997} - a_{1996} \leq 1/1997$

(b) พิจารณาลำดับ 0, 1/1997, 2/1997, ... , 1996/1997, 1

ลำดับนี้สอดคล้องตามเงื่อนไข (i), (ii) ของโจทย์ และมีค่า $a_{1997} - a_{1996} = 1/1997$

แบบฝึกหัด

1. (Romanian MC) ให้ $a \in \mathbb{R}^+$ และ $\{x_n\}_{n \geq 1}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} \geq (n+2)x_n - \sum_{k=1}^{n-1} k x_k \qquad (n \geq 1)$$

จงแสดงว่ามีจำนวนนับ n ที่มีสมบัติว่า $x_n > 1999!$

2. (Korean MO) ให้ $a_1, \ldots, a_{1999}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงไม่ติดลบ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $a_1 + \ldots + a_{1999} = 2$

(ii) $a_1a_2 + a_2a_3 + \ldots + a_{1998}a_{1999} + a_{1999}a_1 = 1$

ให้ $S = a_1^2 + \ldots + a_{1999}^2$ จงหาค่าสูงสุด และต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ S

3. ให้ $a_1, \ldots, a_n$ และ $b_1, \ldots, b_n$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มคู่หนึ่ง จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \{|a_i - a_j| + |b_i - b_j|\} \leq \sum_{1 \leq i < j \leq n} |a_i - b_j|$$

4. (Romanian MC)

(a) ให้ $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า

(i) $x_1y_1 < x_2y_2 < \ldots < x_ny_n$

(ii) $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} \leq \dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \ldots + \dfrac{1}{y_n}$

(b) ให้ $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \subseteq \mathbb{N}$ เป็นเซตที่มีสมบัติว่า สำหรับทุกเซตย่อยที่แตกต่างกัน $B, C \subseteq A$ เรามีว่า

$$\sum_{x \in B} x \neq \sum_{x \in C} x$$

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} < 2$

5. ลำดับ $a_1, a_2, \ldots$ นิยามโดย $a_1 = 0$,

$$a_n = a_{[n/2]} + (-1)^{n(n+1)/2} \qquad (n > 1)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $k \geq 0$ จงหาจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $2^k \leq n < 2^{k+1}$ และ $a_n = 0$

6. (Romanian MC) ลำดับ $\{a_n\}_{n \geq 2}$ มีนิยามดังนี้ ถ้า $p_1, p_2, \ldots, p_k$ เป็นตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะของ n แล้วนิยาม $a_n = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k}$ จงแสดงว่า สำหรับทุกจำนวนนับ $N \geq 2$ เรามีว่า

$$\sum_{n=2}^{N} a_2 a_3 \ldots a_n < 1$$

7. ลำดับ Fibonacci มีนิยามดังนี้ $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \ldots + \frac{a_n}{2^n} < 2$$

8. ลำดับ $\{a_n\}_{n \geq 1}$ ของจำนวนนับ บรรจุแต่ละจำนวนนับหนึ่งครั้งพอดี นอกจากนี้ สำหรับทุกคู่ของจำนวนนับที่ต่างกัน m, n เรามีว่า

$$\frac{1}{1998} < \frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998$$

จงแสดงว่า $|a_n - n| < 2{,}000{,}000$ สำหรับทุก n

9. (Canadian MO) กำหนดให้ว่าลำดับของจำนวนจริง $a_1,..., a_{100}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{100} \geq 0$

(ii) $a_1 + a_2 \leq 100$

(iii) $a_3 + a_4 + ... + a_{100} \leq 100$

จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ $a_1^2 + ... + a_{100}^2$ และหาทุกลำดับ $a_1,..., a_{100}$ ที่ให้ค่าสูงสุดนี้

10. (Iranian MO) ให้ $c_1, c_2,...$ เป็นลำดับของจำนวนนับ กำหนดให้ว่า สำหรับจำนวนนับ m,n ใดๆ ที่สอดคล้องกับ $1 \leq m \leq c_1 + ... + c_n$ เราสามารถหา จำนวนนับ $a_1,..., a_n$ ได้ที่ทำให้

$$m = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i}$$

จงหาค่าสูงสุดของ c_i สำหรับแต่ละ i

11.2 อสมการที่เกี่ยวข้องกับการหาค่า

ตัวอย่าง 11.2.1 จงหาจำนวนจริง r ทั้งหมดที่ทำให้ มีคู่อันดับ $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ เพียงคู่เดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $y - x = r$

(ii) $x^2 + y^2 + 2x \leq 1$

วิธีทำ เงื่อนไข (ii) สมมูลกับ $x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 1 + 1$

กล่าวคือ $(x + 1)^2 + y^2 \leq 2$ ซึ่งคือบริเวณภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง ณ (-1, 0) และ รัศมี $\sqrt{2}$

สมการใน (i) $y - x = r$ เป็นเส้นตรงที่มีความชัน 1 ดังนั้นการหาคู่อันดับ (x, y) หนึ่งเดียวของคำตอบ คือเราต้องหาจุดสองจุดของเส้นตรงที่มีความชัน 1 ซึ่งตัดกับวงกลมนี้ จุดสองจุดนี้ คือจุดที่เส้นตรงซึ่งมีความชัน –1 ตัดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม และเส้นรอบวงของวงกลมดังกล่าว ซึ่งคือ จุด (–2, 1) และ (0,–1) และให้ค่า r = 3, –1 ตามลำดับ

ตัวอย่าง 11.2.2 (IMO 1973) ให้ $a_1, a_2,..., a_n$ เป็นจำนวนบวก n จำนวน และให้ q เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า $0 < q < 1$ จงหาจำนวนจริง n จำนวน $b_1, b_2,..., b_n$ ที่ทำให้

(a) $a_k < b_k$ $(k = 1, 2,..., n)$

(b) $q < \frac{b_{k+1}}{b_k} < \frac{1}{q}$ $(k = 1, 2,..., n - 1)$

(c) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n < \frac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$

วิธีทำ เงื่อนไข (b) สมมูลกับ

$$(b^*) \qquad qb_k < b_{k+1} < \frac{b_k}{q}$$

เราจะพิจารณาโจทย์ดัดแปลงต่อไปนี้แทนโจทย์ที่กำหนดมา : ให้ $a_1, a_2,..., a_n$ เป็นจำนวนไม่ติดลบ n จำนวน และแทน $<$ ด้วย $\leq$ ใน (a), (b*), (c) จากคำตอบของโจทย์ดัดแปลงนี้เราจะพบด้วยว่าได้คำตอบของโจทย์ดั้งเดิมด้วย

ถ้า $(b_1, b_2,..., b_n)$ เป็นคำตอบของโจทย์ดัดแปลง สำหรับเวกเตอร์ $(a_1, a_2,..., a_n)$ ที่กำหนดมาให้ และ $(b'_1, b'_2,..., b'_n)$ เป็นคำตอบของโจทย์ดัดแปลงสำหรับอีกเวกเตอร์หนึ่ง $(a'_1, a'_2,..., a'_n)$ แล้ว

$(b_1 + b'_1, b_2 + b'_2,..., b_n + b'_n)$ เป็นคำตอบของโจทย์ดัดแปลงสำหรับเวกเตอร์ $(a_1 + a'_1, a_2 + a'_2,..., a_n + a'_n)$

ทั้งนี้เพราะ เราเพียงแต่บวกอสมการที่สอดคล้องกันจาก (a), (b*), (c) สำหรับทั้งสองคำตอบเพื่อแสดงว่าผลบวกเป็นคำตอบของอสมการเวกเตอร์ผลบวก

ลำดับต่อไปสังเกตว่า ถ้า $(b_1, b_2,..., b_n)$ เป็นคำตอบของโจทย์ดัดแปลงสำหรับเวกเตอร์ $(a_1, a_2,..., a_n)$ และถ้า c เป็นจำนวนบวก แล้ว $(cb_1, cb_2,..., cb_n)$ เป็นคำตอบของโจทย์ดัดแปลงสำหรับเวกเตอร์ $(ca_1, ca_2,..., ca_n)$ ทั้งนี้เพราะ เราเพียงคูณอสมการ (a), (b*), (c) ที่สอดคล้องกันด้วย c

เมื่อรวมข้อสังเกตเหล่านี้เข้าด้วยกัน ได้ว่าถ้าเราสามารถแก้โจทย์ดัดแปลงสำหรับหลาย ๆ เวกเตอร์ $(a_1, a_2,..., a_n)$ แล้ว เราสามารถแก้โจทย์ดัดแปลงได้สำหรับเซตที่สร้างจากเวกเตอร์คำตอบเหล่านี้ด้วยการบวก และการคูณด้วยค่าคงตัวบวก โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เพียงพอที่จะแก้โจทย์ดัดแปลงสำหรับ เวกเตอร์หนึ่งหน่วย n เวกเตอร์ต่อไปนี้ $u_1 = (1, 0, 0,..., 0)$, $u_2 = (0, 1, 0,..., 0),..., u_n = (0, 0, 0,..., 1)$ ทั้งนี้เพราะ เวกเตอร์ $(a_1, a_2,..., a_n)$ อื่น ที่มีพิกัดเป็นจำนวนไม่ติดลบ สามารถเขียนได้จากเวกเตอร์เหล่านี้ ด้วยการบวก และการคูณด้วยค่าคงตัวบวก

โจทย์ดัดแปลงสามารถแก้ได้ง่ายสำหรับแต่ละเวกเตอร์หนึ่งหน่วยเหล่านี้ สำหรับ u_1 อสมการ (a) พร้อมด้วย $k = 1$ ให้ $b_1 = 1$ เป็นค่าต่ำสุดของบรรดา b_k ทำให้ได้ว่า $a_k \leq b_k$, $k > 1$ เป็นจริงโดยอัตโนมัติ (b*) เป็นจริงเช่นในการเลือก $b_1 = 1$, $b_2 = q$, $b_3 = q^2$, ..., $b_n = q^{n-1}$ เมื่อเลือกเช่นนี้แล้ว อสมการ (c) เป็นจริงอย่างชัดเจน เพราะ

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} < 1 + q + q^2 + \cdots$$
$$= \frac{1}{1-q} < \frac{1+q}{1-q}$$
$$= \frac{1+q}{1-q}(1 + 0 + 0 + \cdots + 0)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ i, $u_i = (0, 0,..., 1, 0,...)$ ที่มี 1 ปรากฏอยู่ที่พิกัดที่ i และ 0 ในพิกัดที่เหลือทั้งหมด และ $a_i = 1$ อสมการ (a) สำหรับ $k = i$ ให้ $b_i = 1$ เป็นค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ b_k ทั้งหมด ส่วนอสมการ (b*) เลือก

$$b_k = q^{k-1} \text{ สำหรับ } i < k \text{ และ } \quad b_k = q^{i-k} \text{ สำหรับ } k < i$$

ตัวอย่าง 11.2.3 (IMO 1999) ให้ n เป็นจำนวนเต็ม ≥ 2

(a) จงหาค่าคงตัวค่าน้อยสุดที่ทำให้อสมการต่อไปนี้เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนจริงบวก $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i \right)^4$$

(b) สำหรับค่าคงตัวต่ำสุด C นี้ จงหาด้วยว่าอสมการเป็นสมการเมื่อใด

วิธีทำ ให้ $T := x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$ ดังนั้น $T^2 = A + B$

สังเกตว่า $x_i^2 + x_j^2 \leq A$ เมื่อ $i < j$
ดังนั้น

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j \cdot A = \frac{AB}{2} = \frac{1}{8}\{(A+B)^2 - (A-B)^2\}$$

$$\leq \frac{1}{8}(A+B)^2 = \frac{T^4}{8} \qquad (11.2.3.1)$$

ดังนั้น อสมการในโจทย์เป็นจริงเมื่อ $C = \frac{1}{8}$

ในบรรทัดแรกของ (11.2.3.1) สมการเป็นจริง เมื่อแต่ละคู่ของดรรชนีที่แตกต่างกัน i, j จะต้องมีว่า $x_i x_j = 0$ (กล่าวคือ จำนวนหนึ่งจาก x_i, x_j เป็น 0) หรือไม่ก็ มีหนึ่งคู่ i,j ที่ทำให้ $x_i^2 + x_j^2 = A$ ในกรณีหลังนี้ ทุกจำนวนที่เหลือใน $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ต้องเป็น 0 ดังนั้น เราได้สมการในบรรทัดแรกของ (1) ก็ต่อเมื่อ อย่างมากสองจำนวนใน $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ จะแตกต่างจาก 0 ได้ พิจารณา n-อันดับที่มีสมบัติดังกล่าว กล่าวคือ ประกอบด้วยสองจำนวนบวก a, b และ $n-2$ จำนวนเป็น 0 ดังนั้น $A = a^2 + b^2$, $B = 2ab$ สังเกตว่าสมการในบรรทัดสุดท้ายของ (1) บังคับว่า $A = B$ สิ่งนี้เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ $a = b$

สรุปได้ว่า ค่าคงตัวต่ำสุด C คือ $\frac{1}{8}$ และในกรณีที่ $C = \frac{1}{8}$ อสมการเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของ $(a, a, 0, \ldots, 0)$ โดยมี a เป็นค่าใด ๆ ที่ ≥ 0

ตัวอย่าง 11.2.4 (Putnam 1968) ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $ad \neq bc$ และให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า มีจำนวนตรรกยะ r, s ที่ทำให้

$$0 < |ra + sb - e| < \varepsilon, \qquad 0 < |rc + sd - f| < \varepsilon$$

วิธีทำ ให้ t เป็นจำนวนตรรกยะ ที่มีสมบัติว่า $0 < t < \varepsilon$ และพิจารณาระบบสมการในตัวแปร r, s :

$$ar + bs = e + t, \qquad cr + ds = f + t$$

ระบบนี้มีคำตอบใน r, s เพราะดีเทอร์มิแนนต์ $ad - bc \neq 0$ และค่าคำตอบ r, s เป็นจำนวนตรรกยะที่ต้องการ

ตัวอย่าง 11.2.5 (Putnam 1984) จงหาค่าต่ำสุดของ

$$(u-v)^2+\left(\sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}\right)^2 \quad \text{เมื่อ } 0<u<\sqrt{2} \text{ และ } v>0$$

วิธีทำ โจทย์ถามหาระยะทางสั้นสุด(ยกกำลังสอง) ระหว่างเสี้ยวหนึ่งของวงกลม $x^2+y^2=2$ ในจตุภาคเปิดที่หนึ่ง กับครึ่งซีกของพาราโบลา $xy=9$ ในจตุภาคเดียวกัน

เนื่องจากเส้นสัมผัสของโค้งทั้งสอง ณ จุด (1, 1) และ (3, 3) ตามลำดับ แบ่งโค้งทั้งสองออกจากกัน และตั้งฉากกับเส้นตรง $x=y$ ดังนั้น ระยะทางสั้นสุด คือ 8

ตัวอย่าง 11.2.6 (USAMO 1997) สมมุติว่าลำดับของจำนวนจริงไม่ติดลบ $a_1, a_2, \ldots, a_{1997}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$a_i+a_j \le a_{i+j} \le a_i+a_j+1 \quad \text{สำหรับทุก } i, j \text{ ที่ทำให้ } i+j \le 1997$$

จงแสดงว่า มีจำนวนจริง x ที่มีสมบัติว่า $a_n=[nx]$ (จำนวนเต็มค่ามากสุดที่ $\le nx$) สำหรับทุก $1 \le n \le 1997$

วิธีทำ เราจะแสดงว่าจำนวนจริง x ที่อยู่ในทุกช่วงครึ่งเปิดเหล่านี้ทั้งหมด มีสมบัติที่ต้องการ

$$I_n := \left[\frac{a_n}{n}, \frac{a_n+1}{n}\right), \quad n=1, 2, \ldots, 1997$$

ให้ $L=\max\limits_{1\le n\le 1997}\frac{a_n}{n}=\frac{a_p}{p}$ และ $U=\min\limits_{1\le n\le 1997}\frac{a_n+1}{n}=\frac{a_q+1}{q}$

เราจะแสดงว่า

$$\frac{a_n}{n}<\frac{a_m+1}{m} \quad \text{ซึ่งสมมูลกับ} \quad ma_n<n(a_m+1) \qquad (11.2.6.1)$$

สำหรับทุก $m, n \in \{1, \ldots, 1997\}$ หากอสมการนี้เป็นจริง จะได้ว่า $L<U$ เพราะ ถ้า $L \ge U$ แล้ว จะขัดแย้งกับ (11.2.6.1) เมื่อ $n=p, m=q$ ซึ่งให้ว่าจำนวนอตรรกยะ $x \in [L, U)$ มีสมบัติที่ต้องการ

เราพิสูจน์ (11.2.6.1) สำหรับทุก $m, n \in \{1, \ldots, 1997\}$ โดยการอุปนัยบน m+n กรณีฐาน $m=n=1$ เห็นชัดเจนว่าเป็นจริง ขั้นตอนการอุปนัย แบ่งเป็นสามกรณีย่อย

- ถ้า $m=n$ แล้ว (11.2.6.1) เป็นจริงอย่างชัดเจน
- ถ้า $m>n$ แล้ว โดยสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ $(m-n)a_n<n(a_{m-n}+1)$ เมื่อบวกทั้งสองข้างด้วย $n(a_{m-n}+a_n) \le na_m$ จะได้ (11.2.6.1) ที่ต้องการ
- ถ้า $m<n$ แล้ว สมมุติฐานของการอุปนัยให้ $ma_{n-m}<(n-m)(a_m+1)$ เมื่อบวกทั้งสองข้างด้วย $ma_n \le m(a_m+a_{n-m}+1)$ จะได้ (11.2.6.1) ที่ต้องการ

แบบฝึกหัด

1. จงหาจำนวนจริง r ทั้งหมดที่มีสมบัติต่อไปนี้ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ จะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้

$$\left| r - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{3n}$$

2. ให้ $c \in \mathbb{Z}$ พิจารณาสมการ $3y^4 + 4cy^3 + 2xy + 48 = 0$ ในตัวแปร x, y จงหาทุก $c \in \mathbb{Z}$ ที่ทำให้จำนวนคำตอบ (x, y) สูงสุด ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (A), (B) ต่อไปนี้

   (A) $|x|$ เป็นจำนวนเต็มยกกำลังสอง

   (B) y เป็นจำนวนเต็มไร้กำลังสอง (กล่าวคือ ไม่มีจำนวนเฉพาะ p ใด ที่มีสมบัติว่า $p^2 \mid y$)

3. (Czech-Slovak MO) สำหรับแต่ละจำนวนจริง $r > 1$ จงหาค่าสูงสุดของผลบวก $x + y$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$(x + \sqrt{1+x^2})(y + \sqrt{1+y^2}) = r$$

4. (British MO) นิยาม $q(n) := \left[\frac{n}{[\sqrt{n}]} \right]$ $(n \in \mathbb{N})$

จงหาทุกจำนวนนับ ที่สอดคล้องกับอสมการ $q(n) > q(n+1)$

5. ให้ $x, y \in \mathbb{R}^+$ และ $s := \min \{ x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y} \}$ จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ s และหาด้วยว่า x, y เป็นเท่าใด เมื่อ s มีค่าสูงสุดนี้

6. ให้ $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}^+$ $(i = 1, \ldots, n)$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$ และ

$$s := \max \left\{ \frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_1+x_2+x_3}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n} \right\}$$

จงหาค่าต่ำสุดของ s และหาด้วยว่า $x_1, \ldots, x_n$ เป็นเท่าใดที่ให้ค่าต่ำสุดของ s

7. ให้ $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน n จำนวน เมื่อ $n \geq 3$ ให้ m, M เป็นสมาชิกค่าน้อยสุด และค่ามากสุด ของ A ตามลำดับ สมมุติว่า มีพหุนาม $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ที่มีสมบัติว่า

   (i) $m < p(a) < M$ สำหรับทุก $a \in A$

   (ii) $p(m) < p(a)$ สำหรับทุก $a \in A$ ที่มีค่า a ไม่เท่ากับ m และ M

   จงพิสูจน์ว่า $n \leq 5$ และมีจำนวนเต็ม b, c ที่มีสมบัติว่า แต่ละสมาชิกของ A เป็นรากของสมการ $p(x) + x^2 + bx + c = 0$

8. สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $w(n)$ แทนจำนวนของตัวหารที่เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันของ n จงหาจำนวนนับค่าน้อยสุด k ที่ทำให้ $2^{w(n)} \leq k\sqrt[4]{n}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

9. จงหาค่าต่ำสุดของนิพจน์
$$\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$$
เมื่อแปร x, y ไปเหนือ $\mathbb{R}$

10. (APMC) พิจารณาคู่อันดับ $(a, b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ที่มีสมบัติว่า ผลคูณ $a^b b^a$ เมื่อเขียนเป็นทศนิยมแล้ว มีสองหลักท้าย (หลักสิบ หลักหน่วย) เป็น 98 จงหาคู่อันดับ (a, b) ที่ทำให้ผลคูณ ab มีค่าต่ำสุด

11.3 อสมการที่เกี่ยวข้องกับเมทริกซ์

ตัวอย่าง 11.3.1 (IMO 1971) ให้ $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ สมมุติว่า เมื่อใดก็ตามที่มีสมาชิก $a_{ij} = 0$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกในแถวที่ i รวมกับในคอลัมน์ที่ j มีค่า $\geq n$ จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเมทริกซ์นี้ มีค่า $\geq \frac{n^2}{2}$

วิธีทำ ให้ผลบวกของแถวที่ i เป็น $R_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ให้ผลบวกของคอลัมน์ที่ j เป็น

$$C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \text{ และให้ } p = \min_{i,j}\{R_i, C_j\}$$

- **กรณีที่ 1**: $p \geq \frac{n}{2}$ ดังนั้น ผลบวก S ของทุกสมาชิกของเมทริกซ์ มีค่า $\geq np \geq n\left(\frac{n}{2}\right)$ ตามต้องการ

- **กรณีที่ 2**: $p < \frac{n}{2}$ โดยการสลับหน้าที่ของแถว หรือคอลัมน์ (ถ้าจำเป็น) แล้วเรียงลำดับแถวเสียใหม่ สามารถสมมุติได้ว่า สมาชิกในแถวแรกมีผลบวกเป็น p และโดยการเรียงลำดับคอลัมน์เสียใหม่ (ถ้าจำเป็น) เราสามารถสมมุติได้ว่าสมาชิก q ตัวแรกของแถวแรกไม่เป็นศูนย์ ในขณะที่สมาชิกที่เหลือในแถวแรกเป็น 0 โดยสมมุติฐาน ผลบวกของสมาชิกในแต่ละ $n - q$ คอลัมน์ที่นำด้วย 0 บวกกับผลบวก p ของสมาชิกในแถวแรกมีค่า $\geq n$ ดังนั้น ผลบวกของสมาชิกในแต่ละคอลัมน์เหล่านี้ มีค่า $\geq n - p$ เนื่องจากมีทั้งสิ้น $n - q$ คอลัมน์ดังกล่าว จึงได้ว่าผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในคอลัมน์เหล่านี้มีค่า $\geq (n - p)(n - q)$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน q คอลัมน์แรกมีค่าอย่างน้อย pq (โดยนิยามของ p) เพราะฉะนั้น ผลบวก S ของสมาชิกทั้งหมดในเมทริกซ์ สอดคล้องกับ

$$S \geq (n-p)(n-q) + pq = n^2 - np - nq + 2pq = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}(n-2p)(n-2q)$$

จากสมมุติฐาน $p \le \frac{n}{2}$ ดังนั้น $n - 2p > 0$

นอกจากนี้ $q \le \frac{n}{2}$ (ทั้งนี้เพราะ ถ้ามีสมาชิกมากกว่า $\frac{n}{2}$ ในแถวแรกเป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลบวกของมัน คือ p จะมีค่า $\ge \frac{n}{2}$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง) ดังนั้น $n - 2q \ge 0$ และ $S \ge \frac{n^2}{2}$ ในทุกกรณี

ตัวอย่าง 11.3.2 (Canadian MO 1990) เซตของจำนวนจริงที่แตกต่างกัน $\frac{n}{2}(n+1)$ จำนวน ได้รับการจัดแบบสุ่มเป็นรูปสามเหลี่ยม

X

X X

X X X

.....

X X ..... X X

ให้ M_k แทนค่ามากสุดในแถวที่ k (นับจากด้านบน) จงหาความน่าจะเป็นที่ $M_1 < M_2 < M_3 < \cdots < M_n$

วิธีทำ ให้ p_n แทนความน่าจะเป็นที่โจทย์ต้องการเมื่อมีแถวอยู่ทั้งสิ้น n แถว เห็นได้ชัดเจนว่า $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{2}{3}$ ในกรณีทั่วไป การที่จะได้อสมการที่ต้องการ จำนวนค่ามากสุดต้องไปอยู่ในแถวล่างสุด ซึ่งความน่าจะเป็นสำหรับการนี้ (คือมีจำนวนตัวมากสุดในแถวล่าง) คือ $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n+1}$ โดยไม่มีข้อกำหนดอื่นใดบนจำนวนที่เหลือสำหรับจำนวนในแถวล่างสุด แต่ความน่าจะเป็นในการที่ $n-1$ แถวถัดขึ้นมา สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ โดยนิยาม คือ p_{n-1} ดังนั้น

$$p_n = \frac{2}{n+1} p_{n-1} = \frac{2^n}{(n+1)!} \quad (n \ge 1)$$

โดยการอุปนัย เมื่อนิยาม $p_0 = 1$

แบบฝึกหัด

1. (APMC) กำหนดให้ มีกลุ่มของจำนวนจริง จัดในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็น

$$\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

โดยที่ทุก $|a_{ij}| \le 1$ และ ผลบวกในแต่ละคอลัมน์ $a_{1j} + \cdots + a_{mj} = 0 \quad (j = 1,\ldots, n)$

จงพิสูจน์ว่า เมื่อเราสามารถทำการจัดเรียงสมาชิกในแต่ละคอลัมน์เสียใหม่ เพื่อให้ได้กลุ่มในรูป

$$\begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \cdots & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{matrix}$$

ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า ค่าสัมบูรณ์ของผลบวกในแต่ละแถว $|b_{i1} + \cdots + b_{in}| < 2$

2. (APMC) จำนวนจริงที่แตกต่างกันทั้งหมด ได้รับการจัดเป็นกลุ่มรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่มี m แถว และ n คอลัมน์ ตอนแรกในแต่ละแถว สมาชิกได้รับการเรียงจากน้อยไปมาก (ซ้ายไปขวา) จากนั้น ในแต่ละคอลัมน์ได้รับการจัดเรียงจากมากไปน้อย (บนมาล่าง) จงพิสูจน์ว่าเมื่อจัดเรียงตามลำดับดังกล่าวแล้ว ทุกแถวยังคงเรียงจากน้อยไปมาก (ซ้ายไปขวา) อยู่เช่นเดิม

3. กำหนดให้มีกลุ่ม $n \times n$ ของจำนวนบวก

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

ให้ m_j แทนจำนวนค่าน้อยสุดในคอลัมน์ที่ j , $m = \max \{m_j : j = 1,\ldots, n\}$

M_j แทนจำนวนค่ามากสุดในแถวที่ I , $M = \min \{M_i : I = 1,\ldots, n\}$

จงพิสูจน์ว่า $m \le M$

4. (Belarus MO) จงหาจำนวนเต็ม n และจำนวนจริง m ทั้งหมด ที่มีสมบัติว่าแต่ละช่องใน ตาราง n x n สามารถกำกับได้ด้วยจำนวนเต็ม 1, 2,..., n^2 โดยที่แต่ละจำนวนปรากฏในช่องเพียงแต่ละช่องหนึ่งครั้งพอดี และสอดคล้องกับอสมการ

$$(m - 1)a_{ij} \le (I + j)^2 - (I + j) \le ma_{ij} \qquad (1 \le I, j \le n)$$

เมื่อ a_{ij} คือจำนวนที่อยู่ในช่องที่ (I, j)

5. ในตารางจัตุรัสขนาด $n^2 \times n^2$ เขียนจำนวนนับลงในแต่ละช่องของตารางนี้ ในลักษณะที่ว่าผลต่างของจำนวนที่อยู่ในช่องที่อยู่ติดกัน (ซึ่งคือ ช่องสองช่องที่มีขอบร่วมกัน) มีค่า $\le n$ จงพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อย $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ ช่องในตารางนี้ ที่บรรจุสมาชิกเดียวกัน

6. (Japanese MO) แต่ละช่องในตารางขนาด 1999 x 1999 บรรจุก้อนหินจำนวน 1 หรือ 0 ก้อน จงหาจำนวนก้อนหินน้อยสุดที่ต้องใช้ เมื่อกำหนดว่า เมื่อเลือกช่องที่ไม่มีก้อนหินอยู่ มาช่องใดช่องหนึ่ง แล้ว จำนวนก้อนหินในแถว และคอลัมน์ที่ช่องนี้ตั้งอยู่ มีค่ารวมกัน ≥ 1999

7. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ถูกจัดเรียงในตาราง 10 x 10 ในลักษณะที่ว่า ไม่มีจำนวนเต็มที่อยู่ในช่องติดกันมีผลบวกน้อยกว่า S จงหาค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของ S

8. ในตารางขนาด n x n มีกติกาว่า เบี้ยที่วางในช่องหนึ่ง จะสามารถ "ควบคุม" ช่องอื่นที่อยู่ในแถว หรือคอลัมน์เดียวกับมัน หรือช่องที่วางอยู่ในแนวทแยงมุมตะวันตกเฉียงเหนือ หรือแนวทแยงมุมตะวันออกเฉียงใต้ จงหาจำนวนเบี้ยน้อยสุดที่วางได้ในตาราง โดยที่เบี้ยดังกล่าว "ควบคุม" ช่องอื่นทั้งหมดในตารางได้

9. เขียนจำนวนเต็ม 1, –1 ลงในช่องของตาราง 2000 x 2000 ถ้าทราบว่าผลบวกของจำนวนในช่องทั้งหมดเป็นลบ จงพิสูจน์ว่ามีคอลัมน์อยู่ 1000 คอลัมน์ และแถวอยู่ 1000 แถว ที่มีสมบัติว่าผลบวกของจำนวนในช่องที่แถวและคอลัมน์ดังกล่าวตัดกัน มีค่า ≥ 1000

10. จำนวนนับ 1, 2,..., n^2 ได้รับการวางไว้ในช่องของตารางสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด n x n ในลักษณะที่ว่า เมื่อวางจำนวนใหม่เข้าไป ให้เขียนผลบวกของจำนวนที่มีอยู่ก่อนทั้งหมดในแถว และคอลัมน์ที่จำนวนนี้จะถูกวาง ไว้บนกระดานดำ
จงหาการจัดวางจำนวนทั้งหมดนี้ ที่ทำให้ผลบวกของจำนวนที่เขียนไว้บนกระดานดำทั้งหมดมีค่าน้อยสุด

11. ในช่องของตารางขนาด 10 x 10 มีจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 บรรจุอยู่ช่องละหนึ่งจำนวน จากแต่ละแถวเลือกจำนวนที่มีค่ามากที่สุดเป็นลำดับที่สาม จงแสดงว่า ผลบวกของจำนวนเหล่านี้ $\geq$ ผลบวกของจำนวนทั้งหมดในแถวบางแถว

ส่วนที่ 2
สมการเชิงฟังก์ชัน
(Functional Equations)

บทที่ 1
ฟังก์ชัน

1.1 สมบัติพื้นฐาน

ให้ A และ B เป็นเซต เรียก f ว่าเป็น ***ฟังก์ชัน*** จาก A ไปยัง B (บางครั้งเขียน $f : A \rightarrow B$ แทนประโยคที่ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B) ถ้ามี y ใน B เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $y = f(x)$ โดยเซต A เรียกว่า ***โดเมน*** (domain) และ เซต B เรียกว่า ***เรนจ์*** (range) ของฟังก์ชัน f

ถ้า $f(x) = y$ จะเรียก y ว่าเป็น ***ภาพ*** (image) ของ x และเรียก x ว่าเป็น ***บุพภาพ*** (pre-image) ของ y

ฟังก์ชันที่มีโดเมน และเรนจ์เป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนจริงเรียกว่า ***ฟังก์ชันจริง***

จุด p ที่อยู่ทั้งในโดเมน และเรนจ์ของฟังก์ชัน f จะเรียกว่า ***จุดตรึง*** (fixed point) ของฟังก์ชันนี้ เมื่อ $f(p) = p$ แนวคิดเรื่องจุดตรึง (เช่นที่เราจะพบต่อไป) บ่อยครั้งมีประโยชน์ในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน แนวคิดดังกล่าวนี้พบเสมอในวิชาการวิเคราะห์เชิงฟังก์ชันของคณิตศาสตร์ขั้นสูง

ปรกติ นิยมเขียนฟังก์ชันในสองรูปแบบ ได้แก่

1. รูปแบบ ***ชัดแจ้ง*** (explicit form) เช่น $y = 3x + 2x^2 - 1$ หรือ $y = x \tan x$
2. รูปแบบ ***โดยปริยาย*** (implicit form) เช่น $xy = 3x^2$ หรือ $(x+y)/xy = 1$

รูปแบบโดยปริยายนั้น หากจะนำไปใช้ จำเป็นต้องตรวจสอบว่า y ที่ได้จากการแก้สมการที่กำหนดให้ดังกล่าวเป็นฟังก์ชันหรือไม่ เช่นในกรณี $x^2 + 2y^2 = 3$ พบว่าสำหรับแต่ละค่าของ x อาจหาค่าของ y ได้มากกว่าหนึ่งค่า ทำให้ y ไม่ใช่ฟังก์ชัน

รูปแบบชัดแจ้ง บางครั้งอาจจะกำหนดโดยใช้เงื่อนไขได้ เช่น

$$y = f(x) = \begin{cases} 3x & \text{เมื่อ } x < 0 \\ \sin x & \text{เมื่อ } x \in [0,1] \\ x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases} \qquad (1.1)$$

หรือ

$$y = f(x) = \begin{cases} 0 \text{ เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \\ \\ \frac{1}{q} \text{ เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะในรูป } \frac{p}{q} \text{ โดย } p,q \text{ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน และ } q > 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

เป็นที่ตกลงกันว่า หากโดเมนของฟังก์ชันไม่ได้รับการกำหนดอย่างชัดเจน จะหมายถึงเซตที่ใหญ่ที่สุดที่สมาชิกสามารถแทนค่าลงไป แล้วทำให้นิพจน์ที่ได้มีความหมายถูกต้อง

ถ้า $f : A \longrightarrow B$ และ A_1 เป็นเซตย่อยของ A แล้ว $f(A_1)$ หมายถึงเซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกของ B ที่อยู่ในรูป $y = f(x)$ เมื่อ x เป็นสมาชิกใน A_1 กล่าวคือ $f(A_1) = \{f(x) \in B ; x \in A_1\}$ หรือ $\{f(x) ; x \in A_1\}$ เซต $f(A_1)$ เรียกว่าเป็น ***ภาพ*** ของ A_1

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมน มี B เป็นเรนจ์ และ f(A) = B แล้วจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันจาก A ***ทั่วถึง*** B (surjection)

เรียกฟังก์ชันจริง f ที่นิยามบนเซต A ว่าเป็น

1. ฟังก์ชัน***เพิ่ม***บนเซต A ถ้า $f(x) < f(y)$ เมื่อ $x, y \in A$ และ $x < y$
2. ฟังก์ชัน***ลด***บนเซต A ถ้า $f(x) > f(y)$ เมื่อ $x, y \in A$ และ $x < y$
3. ฟังก์ชัน***ไม่เพิ่ม***บนเซต A ถ้า $f(x) \geq f(y)$ เมื่อ $x, y \in A$ และ $x < y$
4. ฟังก์ชัน***ไม่ลด***บนเซต A ถ้า $f(x) \leq f(y)$ เมื่อ $x, y \in A$ และ $x < y$

ฟังก์ชันทั้งสี่ประเภทนี้ เรียกว่าเป็น ***ฟังก์ชันทางเดียว*** (monotone) โดยสองประเภทแรกจะเรียกว่า ฟังก์ชัน***ทางเดียวโดยแท้*** (strictly monotone) ฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันเพิ่มไม่จำเป็นที่จะต้องเป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(t) = \frac{t}{t+1}$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วงเปิด $A_1 = (-\infty,-1)$ และบนช่วงเปิด $A_2 = (-1,\infty)$ แต่ไม่ใช่ฟังก์ชันเพิ่ม(หรือแม้แต่เป็นฟังก์ชันทางเดียว) บนโดเมน $A = A_1 \cup A_2$

ตัวอย่าง 1.1.2 กำหนดฟังก์ชัน g โดย $g(t) = 0$ เมื่อ $t \leq 1$ และ $g(t) = t - 1$ เมื่อ $t > 1$ จะได้ว่า g เป็นฟังก์ชันไม่ลด แต่ไม่ใช่ฟังก์ชันเพิ่ม

เรียกฟังก์ชันจริง f ที่นิยามบนเซต A ว่าเป็น

1. ฟังก์ชันมี***ขอบเขตบน*** ถ้ามีค่าคงที่ K ที่ทำให้ $f(t) < K$ สำหรับทุก $t \in A$
2. ฟังก์ชันมี***ขอบเขตล่าง*** ถ้ามีค่าคงที่ K ที่ทำให้ $f(t) > K$ สำหรับทุก $t \in A$
3. ฟังก์ชัน***มีขอบเขต***เหนือเซต A ถ้า f เป็นทั้งฟังก์ชันมีขอบเขตบนและขอบเขตล่าง กล่าวคือ มีค่าคงที่ K_1, K_2 ที่ทำให้ $K_1 < f(t) < K_2$ สำหรับทุก $t \in A$

เรียกฟังก์ชันจริง f ว่าเป็น ***ฟังก์ชันเป็นคาบ*** ที่มี***คาบ*** เท่ากับ a ($a \neq 0$) เมื่อ $f(x) = f(x + a)$ สำหรับทุกค่าของ x ที่อยู่ในโดเมนของ f

ตัวอย่าง 1.1.3 (Canadian MO 1975) เป็นที่ทราบกันดีว่า cos x และ sin x เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ที่มีคาบเป็น 2π แต่กลับไม่เป็นที่ทราบกันมากนักว่า ฟังก์ชัน $\sin x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ทั้งนี้คงเป็นเพราะการพิสูจน์ทำไม่ได้ง่ายนัก ต่อไปนี้เป็นการพิสูจน์ความจริงนี้วิธีหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ $g(x) = \sin(x^2)$ และสมมุติว่ามีคาบเท่ากับ p จาก $g(x) = g(-x)$ ทุก x
ดังนั้น $g(p+x) = g(p-x)$ ด้วย ทำให้ได้ว่า

$$\sin(p^2+x^2-2px) = \sin(p^2+x^2+2px)$$

นั่นคือ

$$0 = \sin(p^2+x^2+2px) - \sin(p^2+x^2-2px) = 2\cos(p^2+x^2)\sin(2px) \qquad \text{ทุก } x$$

พิจารณาบนช่วงปิด I = [a,b] ถ้า $p \neq 0$ แล้ว เนื่องจากจำนวนจริง x ใน I ที่ทำให้ฟังก์ชัน $\cos(p^2+x^2)$ หรือ $\sin(2px)$ มีค่าเท่ากับศูนย์ มีเพียงจำนวนจำกัด แสดงว่าปริมาณของจำนวนจริง x ที่ทำให้นิพจน์ทางขวามือมีค่าเป็นศูนย์มีเพียงจำนวนจำกัด ซึ่งขัดแย้งกับสมการข้างต้น ที่กำหนดไว้ว่านิพจน์ทางขวามือต้องมีค่าเป็นศูนย์สำหรับทุกจำนวนจริง x ในช่วงนี้ ดังนั้น จึงมีทางเป็นไปได้ทางเดียว คือ $p = 0$ เท่านั้น กล่าวคือ $\sin(x^2)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ

ตัวอย่าง 1.1.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันจริง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$|f(x)| \leq 1, \quad f(x + \tfrac{13}{42}) + f(x) = f(x + \tfrac{1}{6}) + f(x + \tfrac{1}{7}) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันคาบ

วิธีทำ ให้ $a = \frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{7}$ ดังนั้น $a + b = \frac{13}{42}$
ใช้สมการข้างต้นพร้อมกับอีกห้าสมการที่ได้จากการแทน x ด้วย $x + a, x + 2a, \ldots, x + 5a$ ตามลำดับ แล้ว บวกสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน ได้

$$f(x + 1 + b) + f(x) = f(x + 1) + f(x + b)$$

ใช้สมการนี้พร้อมกับอีกหกสมการที่ได้จากการแทน x ด้วย $x +b, x + 2b, \ldots, x + 6b$ ตามลำดับ แล้วบวกสมการเหล่านี้เข้าด้วยกัน ได้

$$f(x + 2) + f(x) = 2f(x + 1)$$

ซึ่งเขียนใหม่ได้เป็น

$$f(x + 2) - f(x + 1) = f(x + 1) - f(x)$$

ให้ $c := f(x + 1) - f(x)$ โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ สามารถแสดงได้ว่า

$$f(x + n) - f(x + n - 1) = c \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

ซึ่งชี้ว่า

$$f(x + n) - f(x) = nc$$

และแสดงว่า ถ้า $c \neq 0$ แล้ว $f(x + n)$ มีค่าอย่างไม่มีขอบเขต

ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข $|f(x)| \leq 1$ เพราะฉะนั้น $c = 0$

ทำให้ได้ว่า

$$f(x + 1) = f(x) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

กล่าวคือ

f เป็นฟังก์ชันคาบ ที่มีคาบเป็น 1

แบบฝึกหัด

1. ถ้า f มีสมบัติว่า $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ เป็นจริง สำหรับจำนวนจริง x ใดๆและ a เป็นค่าคงตัว ที่ตรึงไว้ แล้ว ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันคาบ

2. (AMOC 1995) ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + 2) = f(x - 1)f(x + 5) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ

เรียกฟังก์ชันจริง f ว่าเป็น ***ฟังก์ชันคู่*** เมื่อ $f(x) = f(-x)$ สำหรับทุกค่า x, -x ที่อยู่ในโดเมนของ f และเรียกฟังก์ชันจริง f ว่าเป็น***ฟังก์ชันคี่*** เมื่อ $f(x) = - f(-x)$ สำหรับทุกค่า x, -x ที่อยู่ในโดเมนของ f

ตัวอย่าง 1.1.5 1. $f(x) = x^2$, cos x, $|x|$ ทั้งสามฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันคู่ที่มีโดเมนเป็น $\mathbb{R}$

2. $f(x) = x$, sin x ทั้งคู่เป็นฟังก์ชันคี่ที่มีโดเมนเป็น $\mathbb{R}$

ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ***ฟังก์ชันประกอบ*** (composite function) $g \circ f : A \to C$ มีนิยามเป็น

$$g \circ f\,(t) = g(f(t))$$

สังเกตว่าในฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ เรนจ์ของฟังก์ชัน f ต้องเป็นเซตย่อยของโดเมนของฟังก์ชัน g

ตัวอย่าง 1.1.6 ให้ $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $g(t) = 1 - t^2$ จะได้ว่าทั้งโดเมนของ f (แทนด้วย D_f) และ เรนจ์ของ f คือช่วงเปิด $(0,\infty)$ ส่วนโดเมนของ g (แทนด้วย D_g) คือ เซตของจำนวนจริง และเรนจ์ของ g (แทนด้วย R_g) คือ $(-\infty,1]$ จะเห็นได้ว่า $(f \circ g)(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ดังนั้นโดเมนของฟังก์ชันประกอบ $f \circ g$ คือช่วงเปิด $(-1,1) \neq D_g$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซต A และ $f(A) \subseteq A$ แล้วเราสามารถสร้างฟังก์ชันประกอบอันดับสูงขึ้นได้ เช่น $f \circ f = f(f(t))$ หรือ $f \circ f \circ f(t) = f(f(f(t)))$ ฯลฯ

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน เราสามารถสร้างฟังก์ชันใหม่ได้โดยอาศัยการปฏิบัติการทางพีชคณิต คือ f+g, f – g, f·g , $\frac{f}{g}$ โดยนิยาม

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (f - g)(t) = f(t) - g(t), \quad (f\cdot g)(t) = f(t)\cdot g(t) \text{ และ}$$

$$\frac{f}{g}(t) = \frac{f(t)}{g(t)} \text{ ตราบเท่าที่ } g(t) \neq 0$$

โดยทั่วไปแล้ว สัญลักษณ์ f∘f แทนฟังก์ชันประกอบ ส่วน f·f แทนผลคูณของฟังก์ชัน ส่วนค่าการทำซ้ำ (iterate) ของฟังก์ชัน f∘f (t) จะแทนด้วย $f^2(t)$ ในขณะที่ค่ากำลังสองของฟังก์ชัน จะแทนด้วย $(f(t))^2$

ให้ f เป็นฟังก์ชันนิยามบนเซต A ถ้า $x \neq y$ แล้ว $f(x) \neq f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in A$ แล้วจะเรียก f ว่าเป็น ***ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง*** (injective function) ในกรณีดังกล่าว ถ้า f(A) = B แล้วสำหรับแต่ละ $y \in B$ จะมี $z \in A$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ f(z) = y โดย z นี้จะขึ้นกับ y ซึ่งเขียนแทนได้ด้วย $z = \varphi(y)$ โดยที่ φ เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

นอกจากนี้พบว่า f∘φ เป็นฟังก์ชันที่เรียกว่า***ฟังก์ชันเอกลักษณ์*** ที่นิยามบน B ด้วย กล่าวคือ $(f\circ\varphi)(t) = t$ สำหรับทุก $t \in B$ ในทำนองเดียวกัน φ∘f ก็จะเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ที่นิยามบน A ฟังก์ชัน φ ดังกล่าวเรียกว่าเป็น ***ฟังก์ชันผกผัน*** ของ f ซึ่งนิยมเขียนแทนด้วย f^{-1} และมีได้เพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้น สรุปได้เป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1.1 ถ้า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปทั่วถึง B (นั่นคือ f(A) = B) แล้วจะได้ว่ามีฟังก์ชัน f^{-1} เพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปทั่วถึง A ที่มีสมบัติว่า

$$(f\circ f^{-1})(t) = t \text{ สำหรับทุก } t \in B \text{ และ } (f^{-1}\circ f)(t) = t \text{ สำหรับทุก } t \in A$$

พิสูจน์ สำหรับแต่ละ $b \in B$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะมี $a \in A$ ที่ f(a) = b และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่า a ดังกล่าวมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น ต่อไปเราจะนิยามฟังก์ชัน g ขึ้นมาโดย

$$g(b) = a \qquad \text{เมื่อ } f(a) = b$$

ต่อไปจะแสดงว่า $(f\circ g)(b) = b$ สำหรับทุก $b \in B$ และ $(g\circ f)(a) = a$ สำหรับทุก $a \in A$

ให้ $b \in B$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะมี $a \in A$ ที่ f(a) = b

ดังนั้น

$$(f\circ g)(b) = (f(g(b)) = f(a) = b$$

ให้ $a \in A$ ดังนั้น

$$(g\circ f)(a) = (g(f(a)) = a$$

กล่าวคือ $f^{-1} = g$

ต่อไปจะแสดงความเป็นหนึ่งเดียวของฟังก์ชัน f^{-1} โดยสมมุติว่ามีฟังก์ชัน h ที่มีสมบัติว่า

$$(f\circ h)(t) = t \text{ สำหรับทุก } t \in B \text{ และ } (h\circ f)(t) = t \text{ สำหรับทุก } t \in A$$

จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $b \in B$

$$h(b) = h((f \circ f^{-1})(b)) = (h \circ (f \circ f^{-1}))(b) = (h \circ f)(f^{-1}(b)) = f^{-1}(b)$$

ดังนั้น $h = f^{-1}$ ◆

สังเกตว่ากราฟของฟังก์ชันผกผันเป็นภาพสะท้อนของกราฟของ f เทียบกับเส้นตรง $y = x$ ตัวอย่างฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันผกผันซึ่งกันละกัน เช่น $f(t) = \log_{10} t$ และ $f^{-1}(t) = 10^t$

ฟังก์ชันที่นิยามบนเซต $\mathbb{N}_0$ (เซตของจำนวนเต็มจำนวนเต็มไม่ติดลบ) $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ บางครั้งนิยมที่จะเขียน φ_n, a_n หรือ x_n แทน $\varphi(n)$ และเรียก φ ว่าเป็นลำดับ (sequence) เขียนแทนด้วย $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ เช่น $\{n^2+2n-1\}_{n=1}^{\infty}$ ในที่นี้พจน์ทั่วไป (พจน์ที่ n) ของลำดับคือ $a_n = n^2+2n-1$

1.2 ฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ A และ $B \subseteq \mathbb{R}$ เรากล่าวว่า $f : A \to B$ ***ต่อเนื่อง*** ณ จุด $a \in \mathbb{R}$ เมื่อ

1. $f(a)$ หาค่าได้
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้ และ
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

ตัวอย่าง 1.2.1 ฟังก์ชัน f และ g ที่นิยามโดย $f(x) = 3x$ และ $g(x) = x^2 - 1$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ฟังก์ชันในสมการ (1.2)ไม่ต่อเนื่อง ณ จุดตรรกยะ ฟังก์ชัน h ที่นิยามโดย $h(x) = [x]$ (ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม ซึ่งจะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป) เป็นฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่อง ณ จุดที่เป็นจำนวนเต็ม แต่จะต่อเนื่องทุกแห่งที่เหลือ

โดยปรกติแล้ว การตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่งโดยนิยามข้างต้นทำได้ไม่ง่ายนัก ทฤษฎีบทต่อไปนี้ (ซึ่งปรกติพิสูจน์ในระดับมหาวิทยาลัย) กล่าวถึงสามแนวคิดที่สมมูลกันของความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดหนึ่ง ๆ

ทฤษฎีบทว่าด้วยความต่อเนื่อง

ให้ f เป็นฟังก์ชันและ a เป็นสมาชิกในโดเมน ดังนั้น ประพจน์ต่อไปนี้ สมมูลต่อกัน

ก. f ต่อเนื่อง ณ จุด a

ข. ให้ $\varepsilon > 0$ แล้วจะได้ว่ามีจำนวนจริงบวก δ (ขึ้นกับ ε และ a) ที่มีสมบัติว่า ถ้า x เป็นสมาชิกในโดเมนที่

$$|x - a| < \delta \text{ แล้ว } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

ค.ถ้า(x_n) เป็นลำดับที่ประกอบด้วยสมาชิกในโดเมนของ f ที่ลู่เข้าสู่ a แล้วจะได้ว่าลำดับ $(f(x_n))$ จะลู่เข้าสู่ $f(a)$

พิสูจน์ เห็นได้ชัดโดยตรงจากนิยามของความต่อเนื่องของฟังก์ชันว่า ข้อ ก. เทียบเท่ากับข้อ ค. จึงเหลือเพียงแสดงว่าข้อ ข. เทียบเท่ากับข้อ ค.

สมมุติว่าข้อ ข. จริง และให้ (x_n) เป็นเป็นลำดับที่ประกอบด้วยสมาชิกในโดเมนของ f ที่ลู่เข้าสู่ a
จากนิยามของลิมิตจะมีจำนวนนับ N ที่

$$|x_n - a| < \delta \text{ ทุกจำนวนนับ } n \geq N$$

จากสมมุติฐานข้อ ข. ทำให้สรุปได้ว่า สำหรับจำนวนนับ $n \geq N$ ได้ว่า

$$|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$$

ซึ่งเป็นความหมายของการลู่เข้าของลำดับ $(f(x_n))$ ที่ลู่เข้าสู่ $f(a)$ นั่นเอง จึงได้ข้อ ค. ตามต้องการ

สำหรับในการแสดงว่าข้อ ค. สรุปข้อ ข. เราจะพิสูจน์โดยแย้งสลับที่ (Contrapositive) คือ
สมมุติว่ามีบางจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่ทุก $\delta > 0$
เราสามารถหา x ในโดเมนที่มีสมบัติว่า

$$|x - a| < \delta \text{ แต่ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$

สมมุติตรึงค่า ε ไว้ ทำให้ได้ว่า ถ้าให้ $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ เราก็จะมีลำดับ (x_n) ที่มีสมบัติดังนี้คือ

$$|x_1 - a| < 1 \text{ แต่ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$
$$|x_2 - a| < \frac{1}{2} \text{ แต่ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$
$$|x_3 - a| < \frac{1}{3} \text{ แต่ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$
$$\ldots$$
$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ แต่ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$$
$$\ldots$$

จะเห็นได้ว่าลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่จุด a แต่ลำดับค่าของฟังก์ชัน $f(x_n)$ นั้นมีค่าห่างจากค่าของ $f(a)$ อย่างน้อย ε จึงทำให้ได้ว่าลิมิตของ $f(x_n)$ นั้นไม่มีทางเป็น $f(a)$ ได้ ◆

ในบรรดาประพจน์ทั้งสามที่กล่าวถึงในทฤษฎีบทว่าด้วยความต่อเนื่อง ประพจน์ในข้อ ค. ใช้ได้ค่อนข้างง่ายกว่าอีกสองประพจน์ที่เหลือ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ 0

วิธีทำ เนื่องจากลำดับ $\{x_n\} = \{\frac{2}{(4n+1)\pi}\}$ ลู่เข้าสู่ 0 แต่ลำดับ $\{f(x_n)\} = \{\sin(2\pi n + \frac{1}{2}\pi)\}$ ลู่เข้าสู่ $1 \neq 0 = f(0)$ จากทฤษฎีบทข้างต้น สรุปได้ว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ 0

ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็น***ฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต*** $A \subseteq \mathbb{R}$ เมื่อ f ต่อเนื่อง ณ ทุกจุดใน A

นอกจากการใช้ทฤษฎีบทข้างต้นแล้ว การแสดงความต่อเนื่องของฟังก์ชัน อาจทำได้ด้วยการพิจารณากราฟ เพราะฟังก์ชันจะไม่ต่อเนื่อง ณ จุดที่ทำให้กราฟขาดตอน อย่างไรก็ตามการพิจารณาด้วยกราฟ จะใช้ได้ในกรณีโดเมนเป็นช่วงหรือเซตย่อยของจำนวนจริงที่ฟังก์ชันเขียนเป็นภาพได้

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ช่วยในการพิจารณาความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้เป็นจำนวนมาก

ทฤษฎีบท 1.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต A และให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต B แล้วจะได้ว่าฟังก์ชัน $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ และ $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต $A \cap B$ ซึ่งในกรณี $\frac{f}{g}$ ต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า $0 \notin g(A \cap B)$

พิสูจน์ ให้ $a \in A \cap B$ และให้ (a_n) เป็นลำดับใน $A \cap B$ ที่ลู่เข้าสู่ a จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตจะได้ว่า

$$\lim_{a_n \to a} (f+g)(a_n) = \lim_{a_n \to a} f(a_n) + \lim_{a_n \to a} g(a_n) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$$

ทำให้ได้ว่า f+g ต่อเนื่องที่ a และจากทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตจะได้อีกว่า

$$\lim_{a_n \to a} (f-g)(a_n) = \lim_{a_n \to a} f(a_n) - \lim_{a_n \to a} g(a_n) = f(a) - g(a) = (f-g)(a)$$

$$\lim_{a_n \to a} (f \cdot g)(a_n) = \lim_{a_n \to a} f(a_n) \cdot \lim_{a_n \to a} g(a_n) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a)$$

$$\lim_{a_n \to a} (\tfrac{f}{g})(a_n) = \frac{\lim_{a_n \to a} f(a_n)}{\lim_{a_n \to a} g(a_n)} = \frac{f(a)}{g(a)} = (\tfrac{f}{g})(a)$$

ทำให้ได้ผลตามต้องการ ♦

ทฤษฎีบท 1.2.2 ให้ $f : A \to B$ และ $g : C \to D$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า $B \subseteq C$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $g \circ f : A \to D$ ต่อเนื่องบน A

พิสูจน์ ให้ a เป็นสมาชิกใดๆใน A และให้ (a_n) เป็นลำดับใน A ที่ลู่เข้าสู่ a
เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ a ได้ว่า $f(a_n)$ ลู่เข้าสู่ f(a)
และเนื่องจากที่ $f(a) \in B \subseteq C$, $(f(a_n))$ เป็นลำดับใน C ที่ลู่เข้าสู่ f(a) และ g ต่อเนื่องบน B ได้ว่า

$g(f(a_n))$ ลู่เข้าสู่ $g(f(a))$

กล่าวคือ $g \circ f(a_n) = g(f(a_n))$ ลู่เข้าสู่ $g(f(a)) = g \circ f(a)$
สรุปได้ว่า $g \circ f$ ต่อเนื่องที่ a ♦

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้ทฤษฎีข้างต้น เช่น จากการที่ฟังก์ชัน f(x) = x และ f(x) = c เมื่อ c เป็นค่าคงตัว เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยทฤษฎีบท 1.2.1 และทฤษฎีบท 1.2.2 ได้ว่าทุกฟังก์ชันตรรกยะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนโดเมนที่ประกอบด้วยจุดที่ไม่ทำให้ตัวส่วนเป็นศูนย์ อีกตัวอย่างหนึ่งที่จะแสดงต่อไป ใช้ผลของทฤษฎีบทข้างต้น ร่วมกับการจัดรูปฟังก์ชันในการแสดงความต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 1.2.3 ให้ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สำหรับทุกจำนวนจริง $a > 1$ กำหนดให้ว่า ฟังก์ชัน $f(x) + f(ax)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

พิสูจน์ ให้ $P(x) := f(x) + f(ax)$ โจทย์กำหนดให้ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง $a > 1$ เรามีว่า $P(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง
ดังนั้น $P(ax) = f(ax) + f(a^2x)$ ย่อมเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้ $Q(x) := f(x) + f(a^2x)$ เนื่องจาก $a > 1$ ดังนั้น $a^2 > 1$
ทำให้ได้ว่า $Q(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกจำนวนจริง x

จาก $\frac{1}{2}\{P(x) + Q(x) - P(ax)\} = \frac{1}{2}\{f(x) + f(ax) + f(x) + f(a^2x) - f(ax) - f(a^2x)\} = f(x)$
โดยทฤษฎีบทข้างต้น ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเช่นกัน

มีแนวคิดหนึ่งเกี่ยวกับเซตย่อยของเซตของจำนวนจริง ที่เกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับแนวคิดของความต่อเนื่อง แนวคิดนี้ คือ ***ความหนาแน่น* (denseness)** ซึ่งมีความหมายดังนี้ ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และ $B \subseteq \mathbb{R}$ เรากล่าวว่า A หนาแน่นใน B ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริง $b \in B$ จะมีจำนวนในเซต A ซึ่งอยู่ใกล้ b เท่าใดก็ได้ เมื่อเขียนประโยคสัญลักษณ์ ได้ว่า

"ถ้า $b \in B$ และให้ $\varepsilon > 0$ (ซึ่งคือระยะห่างที่กำหนดให้) แล้ว จะมี $a \in A$ ที่มีสมบัติว่า $|b - a| < \varepsilon$"

ตัวอย่าง 1.2.4 1. เซตของจำนวนตรรกยะหนาแน่นใน เซตของจำนวนจริง

2. เซตของจำนวนตรรกยะในช่วง [0, 1] ที่มีตัวส่วนเป็นจำนวนคู่ หนาแน่นในช่วง [0,1]

เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทว่าด้วยความต่อเนื่องกับแนวคิดของความหนาแน่นจะได้ความจริงที่ว่า ถ้า f(x), g(x) ทั้งคู่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่มีสมบัติว่า $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in A$ และ ถ้า A หนาแน่นใน B แล้ว $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in B$

1.3 ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม (greatest integer function)

ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม $[\ ]: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ มีนิยามดังนี้ สำหรับจำนวนจริง x , $[\ x\ ]$ คือ จำนวนเต็มค่ามากสุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x

ตัวอย่าง 1.3.1 $\left[\frac{3}{2}\right] = 1$, $[7.893] = 7$, $[\sqrt{2}\ ] = 1$ และ $\left[-\frac{3}{2}\right] = -2$

ค่าฟังก์ชันภาคจำนวนเต็มของจำนวนตรรกยะคือผลหารที่ได้รับจากการหารตัวเศษด้วยตัวส่วน กล่าวคือ สำหรับจำนวนเต็ม x, y ใดๆ ถ้า $x = qy + r$ โดยที่ $0 \le r \le |y|$ แล้ว

$$\left[\frac{x}{y}\right] = q$$

ตัวอย่าง 1.3.2 ให้ $s, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ และ a เป็นจำนวนนับ ดังนั้น

$$\left[\frac{s}{a}\right] \ge \left[\frac{a_1}{a}\right] + \left[\frac{a_2}{a}\right] + \ldots \left[\frac{a_n}{a}\right]$$

วิธีทำ โดยขั้นตอนวิธีของการหาร $a_j = aq_j + r_j$, $0 \le r_j < a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

ดังนั้น $s = a(q_1 + q_2 + \ldots + q_n) + (r_1 + r_2 + \ldots + r_n)$ และ

$$\left[\frac{s}{a}\right] = \left[q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \frac{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)}{a}\right] \ge q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \left[\frac{a_1}{a}\right] + \left[\frac{a_2}{a}\right] + \ldots \left[\frac{a_n}{a}\right]$$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้สรุปสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม

ทฤษฎีบทว่าด้วยสมบัติของฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง ดังนั้น

1. $[x] \le x < [x] + 1$
2. $[x] = \sum_{1 \le i \le x} 1$ เมื่อ $x \ge 0$
3. $[x + m] = [x] + m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม
4. $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$

พิสูจน์

1. เป็นผลที่ได้จากนิยามโดยตรง
2. ผลบวกดังกล่าว มีค่าเท่ากับจำนวนของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x ซึ่งก็คือความหมายของ [x] นั่นเอง
3. ได้จากนิยามของ [x] โดยตรง
4. เขียน x และ y ในรูป $x = n + a$ และ $y = m + b$ เมื่อ m,n เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \le a < 1$, $0 \le b < 1$

   ดังนั้น $[x] + [y] = n + m \le [n + a + m + b] = n + m + [a + b] \le n + m + 1 = [x] + [y] + 1$ ♦

ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็มทำให้เราสามารถเขียน สูตรกำลังสูงสุดของจำนวนเฉพาะที่หารจำนวนแฟกทอเรียลได้ลงตัว ซึ่งเป็นสูตรที่รู้จักกันดีในนามของ ***เอกลักษณ์ของเลอจองด์*** (Legendre identity)

ทฤษฎีบทว่าด้วยเอกลักษณ์ของเลอจองด์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น จำนวนนับ m ที่มีค่ามากที่สุดที่ p^m หาร n! ลงตัวคือ

$$m = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

พิสูจน์ ถ้า $p^i > n$ แล้ว $\left[\frac{n}{p^i}\right] = 0$ ดังนั้น ผลบวกนี้เป็นผลบวกจำกัด เราพิสูจน์ได้โดยการอุปนัยบนค่าของ n เมื่อ n = 1 เห็นได้ชัดว่าเป็นจริง สมมุติว่าเป็นจริงที่ (n – 1) กล่าวคือกำลังสูงสุดของ p ที่หาร (n – 1)! ได้ลงตัวคือ

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{p^i}\right]$$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกค่ามากสุดที่ $p^k \mid n$ จาก n! = n(n – 1)! ได้ว่า กำลังสูงสุดของ p ที่หาร n! ได้ลงตัวคือ $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{p^i}\right] + k$ ดังนั้น ทฤษฎีบทจะเป็นจริงโดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ถ้าเราสามารถ แสดงได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{p^i}\right] = k$$

เนื่องจาก

$$\left[\frac{n}{p^i}\right] - \left[\frac{n-1}{p^i}\right] = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } p^i \text{ หาร n ลงตัว} \\ 0 & \text{ถ้า } p^i \text{หาร n ไม่ลงตัว} \end{cases}$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right] - \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n-1}{p^i}\right] = k$ ตามต้องการ ♦

ตัวอย่าง 1.3.3 จงแสดงว่า ผลคูณของจำนวนนับ n ตัวถัดกันหารลงตัวด้วย n! เสมอ

วิธีทำ ผลคูณของจำนวนถัดกัน n ตัว อยู่ในรูป (k + 1)(k + 2)...(k + n) เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ เราต้องการแสดงว่า

$$\frac{(k+1)(k+2)...(k+n)}{n!} = \frac{(k+n)!}{k!\,n!} \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จากเอกลักษณ์ของเลอจองด์ ได้ว่ากำลังสูงสุดของ p ที่หาร k! n! ลงตัวคือ

$$\left\{\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \dots\right\} + \left\{\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots\right\}$$

จาก $\left[\frac{k}{p^i}\right] + \left[\frac{n}{p^i}\right] \le \left[\frac{k+n}{p^i}\right]$ $(i \ge 1)$ ได้ว่า

$$\left\{\left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \dots\right\} + \left\{\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots\right\} \le \left[\frac{k+n}{p}\right] + \left[\frac{k+n}{p^2}\right] + \dots$$

ค่าทางขวามือคือกำลังสูงสุดของ p ที่หาร (k + n)! ลงตัว อสมการนี้ให้ว่า กำลังสูงสุดของจำนวนเฉพาะที่หารตัวเศษลงตัว มีค่ามากกว่ากำลังสูงสุดที่มันหารตัวส่วนลงตัว สิ่งนี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเฉพาะ
เพราะฉะนั้น เศษส่วนที่พิจารณาจึงต้องเป็นจำนวนเต็ม ◆

1.4 ฟังก์เอกซโพเนนเชียล และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

จำนวนจริงที่มีชื่อว่า ***จำนวนฐานของลอการิทึมธรรมชาติ*** คือจำนวนจริง e ที่นิยามโดย

$$e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}\right)$$

ในคณิตศาสตร์ระดับสูงขึ้น สามารถแสดงได้ว่า e เป็นจำนวนอตรรกยะ และมีค่าโดยประมาณเป็น 2.7182818

ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล คือ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f(x) = e^x$ ฟังก์ชันนี้มีสมบัติสำคัญเบื้องต้น ได้แก่

(i) $f(0) = 1, f(1) = e$

(ii) e^x เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (ดังนั้น จึงเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย) และ $f(x) > 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(iii) e^x มีฟังก์ชันผกผันเป็น $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f^{-1}(x) = \log_e x$ หรือโดยปรกติ มักเขียนเป็น log x โดยละไม่เขียนจำนวนฐาน ฟังก์ชันนี้เรียกว่า **ลอการิทึมธรรมชาติ** (natural logarithm)

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์ คือ $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันคู่

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ คือ $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ที่นิยามโดย $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันคี่

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ คือ $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก ปรากฏบ่อยครั้งในวิชากลศาสตร์ และสอดคล้องกับเอกลักษณ์จำนวนมาก ที่คล้ายกับเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ ทั้งนี้เพราะ ฟังก์ชันเอกซโพเนนเชียล มีความเกี่ยวข้องอย่างใกล้ชิดกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ ผ่านทางเอกลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อน ที่รู้จักกันดีในนามของ เอกลักษณ์ของออยเลอร์ ซึ่งกล่าวว่า

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

เมื่อ i คือจำนวนจินตภาพแท้ $\sqrt{-1}$

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบว่า ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก สอดคล้องกับเอกลักษณ์ซึ่งคล้ายกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติต่อไปนี้

(i.) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(ii.) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(iii.) $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

บทที่ 2
ความรู้เบื้องต้น
เกี่ยวกับสมการเชิงฟังก์ชัน

2.1 พื้นฐานทั่วไป

สมการเชิงฟังก์ชัน คือสมการที่มีตัวไม่ทราบค่าเป็นฟังก์ชัน โดยปรกติแล้วการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน คือการหาฟังก์ชันคำตอบที่สอดคล้องกับสมการเงื่อนไขที่กำหนดมาให้ ยกตัวอย่างเช่น จงหาฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการ $f(-x) = -f(x)$

สมการเชิงฟังก์ชันอาจมีฟังก์ชันคำตอบเป็นจำนวนมากได้ เช่น $f(x) = x^{2n+1}$ (เมื่อ n เป็นจำนวนนับ) หรือ $f(x) = \sin x$ ทั้งคู่ต่างเป็นคำตอบของสมการข้างต้น หรือฟังก์ชันที่สร้างโดยกำหนดค่าหนึ่ง ๆ ณ จุดที่เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ แล้วนิยามค่าในส่วนของจำนวนจริงลบ โดยเงื่อนไข $f(x) = -f(-x)$ ฟังก์ชันที่สร้างขึ้นเช่นนี้ก็เป็นฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันดังกล่าวเช่นกัน แต่หากเพิ่มเงื่อนไขให้มากขึ้น ไม่ว่าจะเป็นเงื่อนไขบนตัวสมการเอง หรือบนสมบัติของฟังก์ชัน จำนวนผลเฉลยอาจน้อยลงได้เช่นในตัวอย่างนี้ หากกำหนดเพิ่มเติมว่า $f(xy) = x^2 f(y)$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง แล้วจะได้ว่า

$$-f(xy) = f(-xy) = f((-x)y) = (-x)^2 f(y) = x^2 f(y) = f(xy)$$

กล่าวคือ $f(xy) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x, y เมื่อแทนค่า $y = 1$ จะได้ $f(x) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x สรุปได้ว่าฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $f(-x) = -f(x)$ และ $f(xy) = x^2 f(y)$ มีเพียงฟังก์ชันเดียว คือ $f(x) = 0$

สมการเชิงฟังก์ชันบางสมการซึ่งแลดูผิวเผินแล้วน่าจะมีคำตอบ อาจไม่มีคำตอบได้ เช่นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.1 (USSR MO 1989) จงแก้สมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1)) \quad (n > 1)$$

เมื่อ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

วิธีทำ ถ้าสมการนี้มีคำตอบ เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันคำตอบเป็นเซตของจำนวนเต็มบวก ดังนั้นในบรรดาค่าของฟังก์ชัน $f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ จะต้องมีจุดหนึ่ง สมมุติว่าเป็น $n_0 > 1$ ที่ $f(n_0)$ มีค่าน้อยสุด สังเกตว่า

$$f(n_0 + 1) \geq f(n_0) = f(f(n_0 - 1)) + f(f(n_0 + 1)) \geq 1 + 1 > 1$$

ซึ่งให้ว่า $f(f(n_0 + 1)) \geq f(n_0)$ ดังนั้น $f(n_0) = f(f(n_0 - 1)) + f(f(n_0 + 1)) \geq 1 + f(n_0)$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

นอกเหนือจากข้อสังเกตพื้นฐานว่าด้วยจำนวนคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันข้างต้นแล้ว สิ่งที่มีอิทธิพลต่อรูปแบบของคำดอบของสมการเชิงฟังก์ชัน ซึ่งจำเป็นต้องคำนึงถึง ได้แก่ โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันคำตอบ หรือเงื่อนไขอื่น เช่น ความเป็นฟังก์ชันทางเดียว (monotonicity) ความมีขอบเขต (boundedness) ความต่อเนื่อง (continuity) ในกรณีของโดเมน ซึ่งมีความสำคัญมาก อิทธิพลที่มีต่อรูปแบบของฟังก์ชันคำตอบ สามารถแสดงให้เห็นได้โดยตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.2 จงหาฟังก์ชันจริงทั้งหมด ที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

วิธีทำ แทนค่า $x = 0$ แต่ให้ y เป็นจำนวนจริงใดๆจะได้ว่า $f(0) = f(0) + f(y)$ นั่นคือ $f(y) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง y ซึ่งทำให้ได้ว่า $f(x) = 0$ (ฟังก์ชันศูนย์) คือผลเฉลยเดียวของสมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนจริง แต่ถ้าเราพิจารณาฟังก์ชันผลเฉลยที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ นอกจากจะได้ฟังก์ชันศูนย์เป็นผลเฉลยแล้ว สามารถตรวจได้โดยง่ายว่า $h(x) = \log |x|$ ก็เป็นคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันนี้เช่นกัน

นอกจากนี้ยังได้ข้อสังเกตที่สำคัญอีกประการหนึ่งที่ว่า แม้โดเมนของฟังก์ชันผลเฉลยจะเล็กลง ซึ่งในตัวอย่างนี้ลดลงจากเซตของจำนวนจริงเป็นเซตของจำนวนจริงไม่เป็นศูนย์ แต่จำนวนผลเฉลยกลับมีมากกว่าในกรณีที่โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด

ตัวอย่างต่อไปน่าสนใจและให้แนวคิดที่ดีมาก เพราะไม่เพียงแต่แสดงถึงอิทธิพลของเรนจ์ ที่มีต่อรูปแบบของฟังก์ชันคำตอบ แต่แสดงถึงเทคนิคที่สำคัญของการเปลี่ยนตัวแปรเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติที่น่าศึกษาเป็นอย่างยิ่ง ซึ่งจะกล่าวเพิ่มเติมในหัวข้อถัดไป

ตัวอย่าง 2.1.3 (Romanian MO 2003) จงหา $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ ทั้งหมดที่มีสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$1 + f(n)f(n + 1) = 2n^2\{f(n +1) - f(n)\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

เมื่อ (i) $M = \mathbb{N}$ และ (ii) $M = \mathbb{Q}$

วิธีทำ ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ ถ้า $f(n + 1)f(n) = -1$ แล้ว $f(n + 1) = f(n)$ ซึ่งทำให้ $\{f(n)\}^2 + 1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ จึงทำให้เขียนสมการเชิงฟังก์ชันเสียใหม่ได้เป็น

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{1 + f(n)f(n+1)} = \frac{1}{2n^2}$$

ให้ $x_n := \tan^{-1}(f(n))$ กล่าวคือ $f(n) = \tan x_n$ ดังนั้น สมการเชิงฟังก์ชันรูปใหม่สมมูลกับ

$$\tan (x_{n+1} - x_n) = \frac{1}{2n^2}$$

ซึ่งให้ว่า $x_{n+1} - x_n = \tan^{-1}(\frac{1}{2n^2}) + p_n\pi \quad (p_n \in \mathbb{Z})$

จากเอกลักษณ์

$$\sum_{k=1}^{n-1} \tan^{-1}(\frac{1}{2k^2}) = \sum_{k=1}^{n-1} \{\tan^{-1}(2k+1) - \tan^{-1}(2k-1)\} = \tan^{-1}(2n-1) - \frac{\pi}{4}$$

ได้ว่า

$$\tan^{-1}(2n-1) - \frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{n-1} \{(x_{k+1} - x_k) - p_k\pi\} = x_n - x_1 - q_n\pi \qquad (q_n \in \mathbb{Z})$$

ซึ่งให้ $x_n = \tan^{-1}(2n-1) + x_1 - \frac{\pi}{4} + q_n\pi$ เพราะฉะนั้น

$$f(n) = \tan x_n = \frac{2n-1+\tan(x_1 - \frac{\pi}{4})}{1-(2n-1)\tan(x_1 - \frac{\pi}{4})} = \frac{n(a+1)-1}{a-n(a-1)}$$

เมื่อ $a = \tan x_1 = f(1)$ ซึ่งบังคับว่า $a \notin \{ n/(n-1) ; n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$

(i) ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

ถ้า $a \geq 2$ แล้ว $f(3) = (3a+2)/(3-2a) < 0$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ถ้า $a = 0$ แล้ว $f(2) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ เป็นข้อขัดแย้งเช่นกัน

ดังนั้น $a = 1$ และ $f(n) = 2n - 1$ ซึ่งจากการแทนค่าพบว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้อง

(ii) ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ และ $f(1) = a \in \mathbb{Q}, a \notin \{n/(n-1); n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$ ฟังก์ชันคำตอบคือ

$$f(n) = \frac{n(a+1)-1}{a-n(a-1)}$$

ซึ่งแทนค่าแล้ว พบว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้อง

ข้อควรจำสุดท้ายในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน เช่นเดียวกับการแก้สมการทั่วไป คือ จะต้องตรวจคำตอบเสมอว่า เป็นคำตอบที่แท้จริงหรือไม่

2.2 วิธีการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน

วิธีการที่ใช้ในการหาฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันมีหลากหลาย และโดยทั่วไปแล้วการแก้โจทย์สมการเชิงฟังก์ชันมักเป็นการผสมผสานใช้วิธีต่างๆ จนกว่าจะได้คำตอบที่ต้องการ อย่างไรก็ดีในเบื้องต้นนี้จะจำแนกคร่าว ๆ โดยกล่าวถึงวิธีง่าย ๆ ที่พบเสมอ ซึ่งอาจใช้แก้สมการเชิงฟังก์ชันได้เลย หรือไม่ก็ใช้ประกอบกัน

2.2.1 การแทนค่า วิธีนี้คือการแทนค่า ณ จุดต่าง ๆ ในโดเมนของฟังก์ชันคำตอบ เพื่อหารูปแบบ หรือข้อมูลที่มีประโยชน์ในการคาดเดาฟังก์ชันคำตอบ

ตัวอย่าง 2.2.1 จงหา $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ ฟังก์ชันหนึ่งที่สอดคล้องกับ $f(1) = 1$ และ

$$f(m + n) + f(m - n) = \tfrac{1}{2}(f(2m) + f(2n)) \qquad (m \geq n)$$

วิธีทำ แทนค่า $m = n = 0$ แล้วจัดรูปได้ว่า $f(0) = 0$

แทนค่า $m = 1, n = 0$ ให้ว่า

$$2f(1) = \frac{1}{2}(f(2) + f(0)) = \frac{1}{2}f(2)$$

ดังนั้น

$$f(2) = 4f(1) = 4 = 2^2$$

สังเกตว่าเมื่อแทนค่า $n = 0$ จะได้

$$2\, f(m) = \frac{1}{2}f(2m)$$

ดังนั้น

$$f(2m) = 4\, f(m) \text{ ซึ่งให้ค่า } f(4) = 4f(2) = 16 = 4^2$$

แทนค่า $m = 2, n = 1$ ได้ว่า

$$f(3) + f(1) = \frac{1}{2}(f(4) + f(2)) = 10 \text{ ซึ่งให้ } f(3) = 9 = 3^3$$

ณ จุดนี้สามารถคาดเดาฟังก์ชันคำตอบหนึ่งได้เป็น $f(n) = n^2$ ซึ่งตรวจสอบได้ว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบจริง

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหา $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = f(3x) \quad (x, y \in \mathbb{N}_0)$$

วิธีทำ แทนค่าคู่อันดับ (x, y) ด้วยค่า $(t, 0)$, (t, t) และ $(2t, t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ ได้

$$2f(t) = f(3t), \quad f(2t) + f(0) = f(3t), \quad f(3t) + f(t) = f(6t) \quad \text{ตามลำดับ}$$

เมื่อให้ $t = 0$ ความสัมพันธ์แรกให้

$$f(0) = 0$$

เมื่อใช้ความจริงนี้กับความสัมพันธ์ที่หนึ่งและสอง ได้

$$f(2t) = 2f(t)$$

และเมื่อใช้ร่วมกับความสัมพันธ์ที่สาม ได้

$$f(3t) + f(t) = 2f(3t)$$

ดังนั้น

$$f(3t) = f(t)$$

ใช้ความสัมพันธ์สุดท้ายนี้กับความสัมพันธ์แรก ได้ พบว่า $f(t) \equiv 0$

กล่าวคือ ฟังก์ชันศูนย์ เป็นเพียงฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันเดียวเท่านั้น ซึ่งตรวจคำตอบ พบว่าถูกต้อง

ตัวอย่างต่อไปแสดงการแทนค่าที่ซับซ้อนมากขึ้น

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 + y + f(y)) = 2y + (f(x))^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ ให้ $a \in \mathbb{R}$ มีสมบัติว่า $f(a) = 0$

แทนค่า $y = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$(f(x))^2 = f(x^2 + f(0)) = (f(-x))^2$$

ซึ่งแสดงว่า $f(-a) = 0$ เช่นเดียวกัน

แทนค่า $(x, y) = (0, \pm a)$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า $a = 0$, $f(0) = 0$

ดังนั้น

$$f(x) = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = 0$$

แทนค่า $y = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(x^2) = (f(x))^2$$

ซึ่งแสดงว่า f ส่งจำนวนจริงบวก ไปยังจำนวนจริงบวก

สังเกตด้วยว่าเมื่อแทน $x = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(y + f(y)) = 2y$$

ให้ b เป็นจำนวนจริง > 0 แทนค่า $(x, y) = (\sqrt{b}, \frac{-f(b)}{2})$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f\left(b - \frac{f(b)}{2} + f\left(\frac{-f(b)}{2}\right)\right) = -f(b) + (f(\sqrt{b}))^2 = 0$$

ดังนั้น $b = \frac{f(b)}{2} - f(\frac{-f(b)}{2})$ ซึ่งให้ว่า

$$f\left(\frac{-f(b)}{2} + f\left(\frac{-f(b)}{2}\right)\right) = f(-b)$$

แทนค่า $(x, y) = (0, -f(b)/2)$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$-f(b) = f(-b) \text{ ดังนั้น } f \text{ เป็นฟังก์ชันคี่}$$

แทนค่า $(x, y) = (\sqrt{b}, -b)$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(f(-b)) = -2b + (f(\sqrt{b}))^2 = -2b + f(b)$$

ดังนั้น $2b = f(b) + f(f(b))$ ซึ่งให้ว่า

$$f(2b) = f(f(b) + f(f(b))) = f(0^2 + f(b) + f(f(b))) = 2f(b)$$

แทนค่า $(x, y) = (\sqrt{2b}, -b)$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(d) = -2d \text{ เมื่อ } d = b - f(b)$$

เนื่องจาก $f(x) > 0$ เมื่อ $x > 0$ จาก $f(d) = -2d$ จึงต้องได้ว่า $d = 0$ เพราะฉะนั้น $f(b) = b$ กล่าวคือ f ต้องเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์เท่านั้น

2.2.2 การเปลี่ยนตัวแปร วิธีนี้คือการเปลี่ยนพจน์ หรือนิพจน์ที่ซับซ้อน ด้วยพจน์ หรือนิพจน์ที่มีรูปแบบง่ายขึ้น ซึ่งอาจทำให้สามารถคาดเดาฟังก์ชันคำตอบได้ ข้อควรระวังในการเปลี่ยนตัวแปร คือ จะต้องตรวจสอบให้ได้ว่าการเปลี่ยนตัวแปรที่ใช้เปลี่ยนกลับได้ด้วยหรือไม่ (กล่าวคือเป็น**การเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง** หรือไม่) เพราะบางครั้งอาจมีความจำเป็นต้องตรวจสอบว่า การเปลี่ยนตัวแปร ให้ฟังก์ชันคำตอบครบถ้วน หรือถูกต้องรัดกุมหรือไม่ เช่น เปลี่ยนตัวแปร จากจำนวนจริงบวก x เป็น $\log x$ เป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะสามารถเปลี่ยนกลับจาก $\log x$ เป็น x ได้เนื่องจากฟังก์ชัน $\log x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเหนือเซตของจำนวนจริงบวก จึงมีฟังก์ชันผกผัน ในขณะที่การเปลี่ยนตัวแปรจากจำนวนจริง x เป็น x^2 ไม่เป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะฟังก์ชัน $y = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อเปลี่ยนกลับจะได้สองฟังก์ชันคือ $\pm\sqrt{x}$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$2f(1-x)+1 = x f(x) \qquad (2.2.4.1)$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร x ด้วย $1-x$ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรหนึ่งต่อหนึ่ง) ได้ว่า

$$2f(x)+1 = (1-x) f(1-x) \qquad (2.2.4.2)$$

แทนค่าทางขวามือของ (2.2.4.2) ด้วยค่าที่หาได้จาก (2.2.4.1) ได้

$$2f(x)+1 = (1-x)\frac{1}{2}(x f(x) - 1)$$

เมื่อจัดรูปจะได้ฟังก์ชันคำตอบเป็น $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-x+4}$ ซึ่งตรวจคำตอบได้ว่าเป็นคำตอบจริง

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นผลเฉลยของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$x f(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1 \qquad (x \neq -1) \qquad (2.2.5.1)$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร x ด้วย $\dfrac{x-1}{x+1}$ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่งเมื่อ $\dfrac{x-1}{x+1} \neq 1$) จะได้ว่า

$$\frac{x-1}{x+1} f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad (x \neq -1,0) \qquad (2.2.5.2)$$

ซึ่งทำให้เราเกิดฟังก์ชันไม่ทราบค่าฟังก์ชันใหม่ขึ้นคือ

$$-f\left(-\frac{1}{x}\right)$$

และถ้าเปลี่ยนตัวแปร x ด้วย $-\dfrac{1}{x}$ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่งเมื่อ $x \neq 0$) ใน (2.2.5.1) ได้ว่า

$$-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right) + 2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1 \qquad (x \neq 1,0) \qquad (2.2.5.3)$$

ซึ่งทำให้เกิดฟังก์ชันไม่ทราบค่าฟังก์ชันใหม่คือ คือ $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปร x ด้วย $\frac{x+1}{1-x}$ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เมื่อ $\frac{x+1}{1-x} \neq -1$) ใน (2.2.5.1) ได้

$$\frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right) + 2f(x) = 1 \qquad (x \neq -1) \qquad (2.2.5.4)$$

จากระบบสมการเชิงเส้น (2.2.5.1) - (2.2.5.4) เมื่อพิจารณาเทียบกับตัวแปรคือ

$$f(x),\ f\left(\frac{x-1}{x+1}\right),\ f\left(-\frac{1}{x}\right) \text{ และ } f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$$

เมื่อแก้ระบบสมการนี้โดยการกำจัดฟังก์ชันสามฟังก์ชัน ได้ผลเฉลยคือ

$$f(x) = \frac{4x^2 - x + 1}{5x(x-1)} \text{ เมื่อ } x \neq 0, -1 \text{ หรือ } 1$$

ซึ่งเมื่อตรวจคำตอบแล้วพบว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบจริง

ตัวอย่าง 2.2.6 จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$x^2 f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร x ด้วย $1 - x$ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง สมการเชิงฟังก์ชันเปลี่ยนรูปเป็น

$$(1 - x)^2 f(1 - x) + f(x) = 2(1 - x) - (1 - x)^4$$

เมื่อแก้สมการเชิงฟังก์ชันนี้ควบคู่กับสมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ ได้ว่า

$$f(x) = 1 - x^2$$

เมื่อตรวจคำตอบได้ว่าฟังก์ชันนี้เป็นคำตอบจริง

ตัวอย่าง 2.2.7 (Singapore MO 2000) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \qquad (x \neq 0,\ x \neq 1)$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร $y = \frac{x-1}{x}$ $(x \neq 0)$ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และให้ว่า

$$\frac{y-1}{y} = \frac{1}{1-x}$$

ดังนั้นสมการเชิงฟังก์ชันเปลี่ยนรูปเป็น

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + \frac{x-1}{x} \qquad (x \neq 0,\ 1) \qquad (2.2.7.1)$$

เปลี่ยนตัวแปร $y = \frac{1}{1-x}$ $(x \neq 1)$ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่งและให้ว่า

$$\frac{y-1}{y} = x$$

ดังนั้นสมการเชิงฟังก์ชันเปลี่ยนรูปเป็น

$$f(\frac{1}{1-x}) + f(x) = 1 + \frac{1}{1-x} \qquad (x \neq 1) \qquad (2.2.7.2)$$

เมื่อแก้สมการ (2.2.7.1), (2.2.7.2) และสมการเชิงฟังก์ชันที่โจทย์กำหนดมาให้พร้อมกัน พบว่า

$$f(x) = \frac{1}{2}\{(1 + \frac{1}{1-x}) + (1 + x) - (1 + \frac{x-1}{x})\} = \frac{x^2 - x^3 + 1}{2x(1-x)} \qquad (x \neq 0, 1)$$

เมื่อตรวจคำตอบพบว่าฟังก์ชันนี้เป็นคำตอบจริง เนื่องจากสมการเชิงฟังก์ชันไม่มีความหมายเมื่อ $x = 0$ ดังนั้น ฟังก์ชันจึงไม่มีนิยาม ณ $x = 0$ นอกจากนี้เมื่อแทนค่า $x = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า $f(1) + f(0) = 2$ แสดงว่าเมื่อค่าฟังก์ชันไม่มีนิยาม ณ $x = 0$ แล้ว จะไม่มีนิยาม ณ $x = 1$ เช่นกัน กล่าวคือฟังก์ชันที่เป็นคำตอบที่แท้จริง

ตัวอย่าง 2.2.8 (Singapore MO 2000) จงหาฟังก์ชันจริง f, g ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + g(y)) = 3x + y + 4 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ แทนค่า $y = 0$ ได้ว่า

$$f(x + g(0)) = 3x - 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

เปลี่ยนตัวแปร x ด้วย $x - g(0)$ ได้ว่า

$$f(x) = 3(x - g(0)) + 4 = 3x - 3g(0) + 4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

เมื่อแทนค่ากลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$3(x + g(y)) - 3g(0) + 4 = 3x + y + 4$$

เมื่อจัดรูปสมการนี้จะได้

$$g(y) = y/3 + g(0) \qquad (y \in \mathbb{R})$$

เมื่อตรวจคำตอบพบว่า ฟังก์ชัน f, g ที่ได้เป็นฟังก์ชันคำตอบจริง

ตัวอย่าง 2.2.9 (AMOC 1996) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(u + v)\, f(u - v) = 2u + f(u^2 - v^2)$$

วิธีทำ แทนค่า $u = v = 0$ ได้ $f(0)^2 = f(0)$ ดังนั้น

$$f(0) = 0 \text{ หรือ } 1$$

ถ้า $f(0) = 0$ แล้ว แทนค่า $u = v = 1$ ได้

$$f(2)f(0) = 2 + f(0)$$

ซึ่งให้ $0 = 2$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น

$$f(0) = 1$$

เปลี่ยนตัวแปร $u = v$ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง) ได้

$$f(2u)f(0) = 2u + f(0)$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับทุก $u \in \mathbb{R}$ ดังนั้น

$$f(x) = x + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

เนื่องจากมีการเปลี่ยนตัวแปร $2u = x$ ในตอนท้ายเพื่อสรุปรูปฟังก์ชันคำตอบ แม้ว่าการเปลี่ยนตัวแปรนี้เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งทำให้ได้คำตอบทั้งหมดจริง แต่เพื่อเป็นการยืนยัน จะขอแทนคำตอบเพื่อตรวจสอบอีกครั้งหนึ่ง

ถ้า $f(x) = x + 1$ แล้ว

$$f(u + v)f(u - v) = (u + v + 1)(u - v + 1) = (u + 1)^2 - v^2 = 2u + u^2 - v^2 + 1 = 2u + f(u^2 - v^2)$$

ถูกต้องตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.2.10 (Korean MO 1999-2000) กำหนดให้ว่าสำหรับจำนวนจริง x ที่มีค่า $|x| \neq 1$ ฟังก์ชัน $f(x)$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x$$

จงหา $f(x)$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร $t = \dfrac{x-3}{x+1}$ ซึ่งให้ว่า $x = \dfrac{3+t}{1-t}$ ดังนั้น สมการเชิงฟังก์ชัน เขียนได้เป็น

$$f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) = \frac{3+t}{1-t}$$

ในทำนองเดียวกัน เปลี่ยนตัวแปร $t = \dfrac{3+x}{1-x}$ ซึ่งให้ $x = \dfrac{t-3}{t+1}$

ดังนั้น สมการเชิงฟังก์ชันเขียนได้ในรูป

$$f\left(\frac{3+t}{1-t}\right) + f(t) = \frac{t-3}{t+1}$$

เมื่อบวกสมการที่ได้รับทั้งสองสมการเข้าด้วยกัน ได้

$$\frac{8t}{1-t^2} = 2f(t) + f\left(\frac{t-3}{t+1}\right) + f\left(\frac{3+t}{1-t}\right) = 2f(t) + t$$

ดังนั้น $f(t) = \frac{4t}{1-t^2} - \frac{t}{2}$ ซึ่งตรวจได้ว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้อง

2.2.3 การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ วิธีนี้ใช้หลักการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ (หรือเรียกย่อ ๆ ว่า การอุปนัย) ซึ่งกล่าวโดยย่อคือหลักการที่ใช้พิสูจน์ประพจน์ P(n) ที่มีตัวแปรเป็นจำนวนเต็มบวก ขั้นตอนโดยทั่วไปประกอบด้วยการตรวจสอบว่า P(1) เป็นจริง จากนั้นสมมุติว่า P(n) (หรือในบางครั้ง P(1), P(2), ..., P(n)) เป็นจริง แล้วพยายามแสดงให้เห็นว่า P(n+1) เป็นจริง เมื่อแสดงได้แล้ว จะได้ว่าประพจน์ P(n) เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ตัวอย่าง 2.2.11 จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ $f(1) = 1$ และ

$$f(m + n) + f(m - n) = \frac{1}{2}(f(2m) + f(2n)) \qquad (m \geq n)$$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้มีรูปสมการเชิงฟังก์ชันเช่นเดียวกันกับในตัวอย่างของวิธีการแทนค่า ซึ่งเราพบมาแล้วว่า คำตอบหนึ่งของสมการนี้คือ $f(n) = n^2$ เราจะแสดงโดยการอุปนัยว่าฟังก์ชันนี้เป็นเพียงคำตอบเดียวโดยการอุปนัย จากโจทย์และที่ทราบมาก่อนพบว่า $f(1) = 1 = 1^2$, $f(2) = 2^2$, $f(3) = 3^2$, $f(4) = 4^2$

สมมุติว่าสิ่งนี้เป็นจริงจนถึง $f(k) = k^2$ $(k \geq 4)$ เราจะพิสูจน์ว่า $f(k+1) = (k+1)^2$
เมื่อ k เป็นคี่ แทนค่า $m = \frac{1}{2}(k+1)$, $n = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$\frac{1}{2}(f(k+1) + f(2)) = f(\tfrac{k+1}{2} + 1) + f(\tfrac{k+1}{2} - 1) = f(\tfrac{k+3}{2}) + f(\tfrac{k-1}{2})$$

เมื่อ $k \geq 4$ แล้ว $\frac{k+3}{2}$ และ $\frac{k-1}{2}$ มีค่า $< k$ ดังนั้น โดยสมมุติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$\frac{1}{2}f(k+1) + 2 = \{\tfrac{k+3}{2}\}^2 + \{\tfrac{k-1}{2}\}^2 = \frac{k^2+2k+5}{2}$$

ซึ่งให้ว่า $f(k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ ตามต้องการ

ตัวอย่างต่อไปแสดงการอุปนัยบนระดับขั้นของพหุนาม แทนที่จะเป็นบนตัวแปรที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 2.2.12 ให้ f(x), g(x) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงในหนึ่งตัวแปร และ a(x, y) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงในสองตัวแปร สมมุติว่า

$$f(x) - f(y) = a(x, y)\{g(x) - g(y)\} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

จงพิสูจน์ว่า มีพหุนาม h(x) ในหนึ่งตัวแปรที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ f(x) = h(g(x)) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x

วิธีทำ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สามารถสมมุติได้ว่า f(0) = g(0) = 0 เพราะไม่เช่นนั้นให้พิจารณา f(x) – f(0) แทน f(x) และ g(x) – g(0) แทน g(x) ซึ่งสมการเชิงฟังก์ชันยังคงเป็นจริง

เราจะใช้การอุปนัยบน $\deg_x f$ (ระดับขั้นของพหุนาม f เทียบกับตัวแปร x)
ถ้า $\deg_x f < \deg_x g$ แล้ว

$$\deg_x (f(x) - f(y)) < \deg_x(g(x) - g(y)) \text{ และ } \{g(x) - g(y)\} \mid \{f(x) - f(y)\}$$

ซึ่งชี้ว่า f(x) = f(y)

กล่าวคือ f เป็นพหุนามค่าคงตัว ซึ่งให้ทันทีว่าพหุนาม h(x) มีอยู่จริง (เช่น h(x) = f(0) สำหรับทุกจำนวนจริง x) เพราะฉะนั้น ประพจน์ในโจทย์เป็นจริงสำหรับทุกพหุนาม f ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันและมีระดับขั้น $\deg_x f$ (น้อยกว่า $\deg_x g$)

แทนค่า y = 0 ในสมการเชิงฟังก์ชันของโจทย์ ได้

$$f(x) = a(x, 0)g(x)$$

แสดงว่า

$$g(x) \mid f(x)$$

ให้ f(x) = g(x)h(x)
ดังนั้น

$$f(x) - f(y) = h(x)g(x) - h(y)g(y) = \{h(x) - h(y)\}g(x) + h(y)\{g(x) - g(y)\}$$

จาก $\{g(x) - g(y)\} \mid \{f(x) - f(y)\}$ สมการสุดท้ายนี้ให้ว่า

$$\{g(x) - g(y)\} \mid \{h(x) - h(y)\}g(x)$$

แต่ ห.ร.ม. (g(x), g(x) – g(y)) = ห.ร.ม. (g(x), g(y)) = 1
ดังนั้น

$$\{g(x) - g(y)\} \mid \{h(x) - h(y)\}$$

แสดงว่ามีพหุนาม b(x, y) ในสองตัวแปร ที่ทำให้

$$h(x) - h(y) = b(x,y)\{g(x) - g(y)\}$$

แสดงว่าพหุนาม h(x) สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันเดียวกันกับพหุนาม f(x) แต่ $\deg_x h < \deg_x f$ โดยสมมุติฐานของการอุปนัย สามารถเขียนได้ว่า

$$h(x) = H(g(x)) \text{ สำหรับบางพหุนาม } H(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = h(x)g(x) = g(x)H(g(x)) = F(g(x)) \quad \text{เมื่อ} \quad F(x) := xH(x)$$

ซึ่งเป็นรูปแบบที่ต้องการ

2.2.4 การใช้สมบัติพิเศษบางประการของฟังก์ชัน เป็นต้นว่าสมบัติความเป็นฟังก์ชันทางเดียว (ฟังก์ชันเพิ่ม ลด ไม่เพิ่ม หรือไม่ลด) หรือสมบัติความเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง หรือเป็นหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง (ซึ่งทำให้มีฟังก์ชันผกผัน) หรือสมบัติความเป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ฯลฯ เพื่อให้ได้ข้อสรุปถึงรูปแบบของฟังก์ชัน หรือข้อมูลอื่นที่นำไปสู่คำตอบ

ตัวอย่าง 2.2.13 (Ukranian MO 1996) มี $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่ไม่ใช่พหุนามหรือไม่ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$(x - 1)f(x + 1) - (x + 1)f(x - 1) = 4x(x^2 - 1) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ ถ้า $x \neq \pm 1$ แล้วสมการเชิงฟังก์ชันเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{f(x+1)}{x+1} - (x + 1)^2 = \frac{f(x-1)}{x-1} - (x - 1)^2$$

ถ้าให้ $g(x) := f(x)/x - x^2$ แล้ว $g(x)$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีคาบเป็น 2
ในทำนองกลับกัน ถ้ามีฟังก์ชันที่มีคาบเป็น 2 แล้ว เราสามารถสร้าง

$$f(x) := x^3 + xg(x)$$

แล้วตรวจสอบได้ว่า ฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันของโจทย์จริง ยกตัวอย่างเช่น $f(x) = x^3 + x \sin \pi x$ เพราะฉะนั้นคำตอบของโจทย์นี้คือ มีฟังก์ชันดังกล่าวอยู่จริง และมีเป็นจำนวนอนันต์อีกด้วย

ตัวอย่าง 2.2.14 (AMOC 2001) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f[\{f(x)\}^2 + f(y)] = xf(x) + y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ จากสมการเชิงฟังก์ชัน ถ้า $a = \{f(x)\}^2 + f(-xf(x))$ แล้ว $f(a) = 0$

แทนค่า $x = y = a$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ $f(0) = a$
แทนค่า $x = a$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ $f(f(y)) = y$

ต่อไปเราจะแสดงว่า f ต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะจาก f(c) = f(d) ได้

$$c = f(f(c)) = f(f(d)) = d$$

f เป็นทั่วถึง เพราะ จาก z = f(c) ได้

$$f(z) = f(f(c)) = c \quad \text{ตามต้องการ}$$

แทน x ด้วย f(x) พร้อมด้วย y = a ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(x^2) = f(x)x + a$$

แทน y = a ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(\{f(x)\}^2) = xf(x) + a$$

โดยความเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ได้

$$\{f(x)\}^2 = x^2 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ซึ่งบังคับว่า a = 0

ถ้ามีจำนวนจริง u, v ไม่ทั้งคู่เป็น 0 ที่มีสมบัติว่า

$$f(u) = u, f(v) = -v$$

แล้ว

$$(u^2 - v)^2 = \{f(u^2 - v)\}^2 = \{f(\{f(u)\}^2 + f(v))\}^2 = (uf(u) + v)^2 = (u^2 + v)^2$$

ซึ่งให้

$$-2u^2v = 2u^2v$$

เป็นข้อขัดแย้ง

สรุปได้ว่า มีฟังก์ชันคำตอบสองฟังก์ชัน คือ

$$f(x) = \pm x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ตัวอย่างต่อไป แสดงให้เห็นว่า ถ้าบังคับให้ฟังก์ชันคำตอบมีสมบัติพิเศษมากเกินไป สมการเชิงฟังก์ชันอาจไม่มีคำตอบได้

ตัวอย่าง 2.2.15 จงพิสูจน์ว่า สมการเชิงฟังก์ชัน $f(f(x)) = x^2 - 1996$ $(x \in \mathbb{R})$ ไม่มีคำตอบเป็นฟังก์ชันจริง f(x) ไม่ว่าจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือไม่ก็ตาม

วิธีทำ สมมุติว่าสมการเชิงฟังก์ชันในโจทย์มีคำตอบเป็นฟังก์ชันจริง f(x)
ให้ $g(x) := f(f(x)) = x^2 - 1996$
จากนิยามของจุดตรึงของฟังก์ชัน F(x) ที่ว่าเป็นจุด α ที่มีสมบัติว่า $F(\alpha) = \alpha$
พบว่าจุดตรึงของ g(x) คือราก a,b ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่ต่างกันของสมการ 0 = x2 – x – 1996
ให้

$$f(a) = p$$

ดังนั้น

$$f(p) = f(f(a)) = g(a) = a \text{ และ } g(p) = f(f(p)) = f(a) = p$$

แสดงว่า p เป็นจุดตรึงของ p ด้วยเช่นกัน

กล่าวคือ

$$\text{“ } f(a) = a,\ f(b) = b\text{” หรือ “}f(a) = b\ ,\ f(b) = a\text{”}$$

พิจารณาฟังก์ชัน

$$h(x) := g(g(x)) = (x^2 - 1996)^2 - 1996 = x^4 - 3992x^2 + 3982020$$

จุดตรึงของ h(x) หาได้จากการแก้สมการ

$$0 = = x^4 - 3992x^2 + 3982020 = (x^2 - x - 1996)(x^2 + x - 1995)$$

ให้ c,d เป็นรากของสมการ $x^2 + x - 1995 = 0$ ซึ่งเป็นจำนวนจริงทั้งคู่

ดังนั้นจุดตรึงของ h(x) คือ a,b,c,d

ให้ g(c) = q ดังนั้น

$$g(q) = g(g(c)) = h(c) = c \text{ และ } h(q) = g(g(q)) = g(c) = q$$

แปลว่า q = g(c) เป็นจุดตรึงของ h(x)

เนื่องจาก c ไม่ช่จุดตรึงของ g(x) ดังนั้น $g(c) \neq c$

นอกจากนี้ $g(c) \neq a$ (ไม่เช่นนั้น c = g(g(c)) = g(a) = a) และในทำนองเดียวกัน $g(c) \neq b$

จึงต้องได้ว่า q = g(c) = d และในทำนองเดียวกัน g(d) = c

ให้ f(c) = r, f(d) = s ดังนั้น

$$f(r) = f(f(c)) = g(c) = d$$

$$f(s) = f(f(d)) = g(d) = c$$

เพราะฉะนั้น

$$h(r) = g(g(r)) = f(f(f(f(r)))) = f(f(f(d))) = f(f(s)) = f(c) = r \qquad (2.2.15.1)$$

แสดงว่า r เป็นจุดตรึงของ h

สังเกตว่า $r \neq a$ และ $r \neq b$ เพราะ {f(a),f(b)} = {a,b} แต่ f(r) = d

ดังนั้น r = c หรือ d

ถ้า r = c จาก (2.2.15.1) ให้ว่า c(=r) เป็นจุดตรึงของ g ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง แสดงว่า $r \neq c$

ในทำนองเดียวกันได้ $r \neq d$

สรุปได้ว่าสมการเชิงฟังก์ชันของโจทย์ไม่มีคำตอบเป็นฟังก์ชันจริง

ตัวอย่าง 2.2.16 มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ หรือไม่ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสามข้อต่อไปนี้

(1) มีจำนวนจริงบวก M ที่ทำให้ $-M \le f(x) \le M \qquad (x \in \mathbb{R})$

(2) $f(1) = 1$

(3) ถ้า $x \neq 0$ แล้ว

$$f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + (f(1/x))^2$$

วิธีทำ เราจะแสดงว่า ฟังก์ชันที่โจทย์ต้องการไม่มีจริง สมมุติเพื่อหาข้อขัดแย้งว่า ฟังก์ชัน f ดังกล่าวมีจริง

ให้ c เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซต $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$

จาก

$$f(2) = f(1 + \frac{1}{1^2}) = f(1) + (f(1))^2 = 2$$

ได้ว่า $c \ge 2$

เนื่องจาก c เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด จึงมีลำดับ $\{x_k ; k = 1, 2, \ldots\}$ ของจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า

$$f(x_k) \ge c - \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

ดังนั้น

$$c \ge f(x_k + \frac{1}{x_k^2}) = f(x_k) + (f(\frac{1}{x_k}))^2 \ge c - \frac{1}{k} + (f(\frac{1}{x_k}))^2$$

ซึ่งให้ว่า $(f(\frac{1}{x_k}))^2 \le \frac{1}{k}$ กล่าวคือ

$$f(\frac{1}{x_k}) \ge -\frac{1}{\sqrt{k}}$$

นอกจากนี้ เรามีว่า

$$c \ge f(\frac{1}{x_k} + x_k^2) = f(\frac{1}{x_k}) + (f(x_k))^2 \ge -\frac{1}{\sqrt{k}} + (c - \frac{1}{k})^2$$

ซึ่งให้ว่า

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k^2} \ge c(c - 1 - \frac{2}{k}) \ge c(1 - \frac{2}{k})$$

กล่าวคือ

$$\frac{k\sqrt{k} - 1}{k(k-2)} \ge c \ge 2$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เมื่อ k มีค่าสูงมากพอ

ตัวอย่างสองตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงให้เห็นว่า สมบัติการเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ มีผลทำให้ฟังก์ชันเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งนำไปสู่ฟังก์ชันคำตอบได้

ตัวอย่าง 2.2.17 จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + f(0) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร $y = -x$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(f(x) - x) = 2f(0)$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ดังนั้น f ต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย ซึ่งให้ว่า $f(x) - x$ เป็นค่าคงตัวเสมอ สมมุติให้เป็น c เพราะฉะนั้น $f(x) = x + c$ ซึ่งตรวจได้ว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบที่แท้จริง

ตัวอย่าง 2.2.18

(a) จงหาฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(b) จงพิสูจน์ว่าสำหรับทุกจำนวนเต็ม $n > 1$ ไม่มีฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + f(y)) = f(x) + y^n \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ (a) เราจะแสดงว่า ฟังก์ชันคำตอบคือ

$$f(x) = x \text{ หรือ } f(x) = -x \text{ เท่านั้น}$$

แทนค่า $x = y = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(f(0)) = f(0)$$

ในขณะที่แทนค่า $x = -f(0), y = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(-f(0)) = f(0)$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ จึงต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้น $f(0) = -f(0)$ ซึ่งให้ $f(0) = 0$ ใช้ความจริงนี้ และแทนค่า $x = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(f(y)) = y \qquad (y \in \mathbb{R})$$

- กรณีที่ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้
  ถ้า $f(x) > x$ แล้ว $x = f(f(x)) > f(x)$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง แต่ถ้า $f(x) < x$ แล้ว $x = f(f(x)) < f(x)$ เป็นข้อขัดแย้งอีกเช่นกัน เพราะฉะนั้น ต้องได้ $f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$

- กรณีที่ f เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ แทนค่า $x = -f(t), y = t$ แล้วแทนค่า $x = 0, y = -t$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

  $$0 = f(0) = f(-f(t) + f(t)) = f(-f(t)) + t, \quad f(f(-t)) = f(0 + f(-t)) = f(0) - t = -t$$

  ซึ่งให้ว่า $f(-f(t)) = f(f(-t)) = -t$
  ดังนั้น $f(t) = -f(-t)$ สำหรับทุกจำนวนจริง t

ถ้า $f(x) < -x$ แล้ว $x = f(f(x)) > f(-x) = -f(x)$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
ถ้า $f(x) > -x$ แล้ว $x = f(f(x)) < f(-x) = -f(x)$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งเช่นกัน
ดังนั้น ต้องได้

$$f(x) = -x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม สรุปได้ว่า $f(x) = x$ หรือ $f(x) = -x$ $(x \in \mathbb{R})$ ซึ่งตรวจได้ว่าเป็นคำตอบจริง

(b) เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ จึงได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
ดังนั้น เมื่อ $y \neq 0$ แล้ว $f(y) \neq f(-y)$ ทำให้ได้ว่า

$$f(x + f(y)) \neq f(x + f(-y))$$

ดังนั้น

$$f(x) + y^n \neq f(x) + (-y)^n$$

แสดงว่า n เป็นจำนวนเต็มคู่ไม่ได้ เราเหลือต้องสมมุติว่า มีฟังก์ชัน f ดังกล่าวกับจำนวนเต็มคี่ $n > 1$ โดย ข้อโต้แย้งแบบเดียวกันกับใน (a) พบว่า

$$f(0) = 0,\ f(f(y)) = y^n \quad \text{โดยเฉพาะอย่างยิ่ง } f(f(1)) = 1$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ แล้ว เช่นกันกับใน (a) ได้ $f(1) = 1$ ซึ่งให้

$$f(2) = f(1 + f(1)) = f(1) + 1^n = 2 \quad \text{และ} \quad 2^n = f(f(2)) = f(2) = 2$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ แล้ว เช่นกันกับใน (a) ได้ $f(1) = -1$ ซึ่งให้

$$f(2) = f(1 + f(-1)) = f(1) + (-1)^n = -2 \quad \text{และ} \quad 2^n = f(f(2)) = f(-2) = -f(2) = 2$$

เป็นข้อขัดแย้งอีกเช่นกัน

ตัวอย่าง 2.2.19 (IMO 1977) จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ที่สอดคล้องกับอสมการ $f(n + 1) > f(f(n))$

วิธีทำ เราเริ่มด้วยการพิสูจน์ประพจน์ที่ว่า $f(r) \geq n$ เมื่อ $r \geq n$ โดยการอุปนัย
เนื่องจาก $f(r) \in \mathbb{N}$ $(r \in \mathbb{N})$ ดังนั้น $f(r) \geq 1$ เมื่อ $r \geq 1$ กล่าวคือ ประพจน์เป็นจริง เมื่อ $n = 1$
สมมุติว่าประพจน์เป็นจริง เมื่อ $n = k$

พิจารณา กรณี $n = k + 1$
ให้ r เป็นจำนวนเต็มบวกที่ว่า $r \geq k + 1$ ซึ่งให้ว่า

$$r - 1 \geq k$$

โดยสมมุติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$f(r - 1) \geq k$$

และเมื่อใช้สมมุติฐานของการอุปนัยอีกครั้งหนึ่งได้ว่า

$$f(f(r-1)) \geq k$$

ดังนั้น

$$f(r) > f(f(r-1)) \geq k \Rightarrow f(r) \geq k+1$$

ซึ่งโดยการอุปนัยสรุปได้ว่า

$$f(r) \geq n \text{ เมื่อ } r \geq n$$

เมื่อใช้อสมการนี้พร้อมกับอสมการที่กำหนดให้ได้ว่า

$$f(n+1) > f(f(n)) \geq f(n)$$

กล่าวคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ เนื่องจาก $f(n+1) > f(f(n))$ จึงได้ว่า

$$n+1 > f(n) \quad \text{ซึ่งให้ว่า} \quad n \geq f(n)$$

จึงสรุปได้ว่า $f(n) = n$ เมื่อตรวจคำตอบ พบว่าเป็นคำตอบจริง

2.2.5 การแยกตัวแปรออกจากกัน สมการเชิงฟังก์ชันบางแบบที่มีตัวแปรอิสระหลายตัว และสามารถแยกสมการออกเป็นสองข้างได้ โดยที่แต่ละข้างมีตัวแปรที่เป็นอิสระที่แตกต่างกันปรากฏอยู่ ทำให้สรุปได้ว่า แต่ละข้างต้องเป็นค่าคงตัว ซึ่งสามารถนำไปสู่ฟังก์ชันคำตอบได้ วิธีการแยกตัวแปรออกจากกันนี้เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในวิชาสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

ตัวอย่าง 2.2.20 (Singapore MO 1999) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2)$$

วิธีทำ แทนค่า $x = y = 1$ พบว่า

$$f(0) = 0$$

เปลี่ยนตัวแปร $a = x + y$, $b = x - y$ ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง และ a, b เป็นตัวแปรอิสระ ทำให้สมการเชิงฟังก์ชันเปลี่ยนรูปเป็น

$$bf(a) - af(b) = (a^2 - b^2)ab \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

เมื่อ a และ b ทั้งคู่ไม่เป็นศูนย์ สมการหลังนี้เขียนได้ในรูป

$$\frac{f(a)}{a} - a^2 = \frac{f(b)}{b} - b^2$$

แต่ละข้างเป็นนิพจน์ในรูปแบบเดียวกัน แต่เกี่ยวข้องเพียงกับตัวแปรที่เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น

$$\frac{f(x)}{x} - x^2 = f(1) - 1 \qquad (x \neq 0)$$

เมื่อให้ $c = f(1) - 1$ ซึ่งเป็นค่าคงตัว ได้ว่า

$$f(x) = x^3 + cx \qquad (x \neq 0)$$

เนื่องจาก f(0) = 0 พบว่าฟังก์ชันนี้ยังคงเป็นจริง และเมื่อตรวจคำตอบพบว่าฟังก์ชันนี้สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดให้ จึงได้ว่าฟังก์ชันคำตอบทั้งหมดอยู่ในรูป

$$f(x) = x^3 + cx \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวใด ๆ}$$

ตัวอย่าง 2.2.21 (AMOC 1994) ให้ a, b, c $\in \mathbb{R}$ โดยที่ทั้งสามจำนวนไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$a\, f(xy + z^2) + b\, f(yz + x^2) + c\, f(zx + y^2) = 0$$

วิธีทำ โดยความสมมาตรของตัวแปร สามารถสมมุติโดยไม่เสียนัยทั่วไป ได้ว่า $a \neq 0$

แทนค่า x = y = 0 ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$af(z^2) = -(b + c)f(0)$$

เนื่องจาก $z^2 \geq 0$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนเซตของจำนวนจริงไม่ติดลบ

แทนค่า y = 1, z = 0 ในสมการเชิงฟังก์ชันได้ว่า

$$af(x) + bf(x^2) = -cf(1)$$

เนื่องจาก $f(x^2)$ มีค่าคงตัว และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จึงสรุปได้ว่า f ต้องเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวทั่ว $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 2.2.22 จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + g(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ ก่อนอื่นสังเกตว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว แล้ว

$$f(x) = g(x) \equiv 0$$

จากนี้ไปสมมุติว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว

แทน x ด้วย g(x) ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(g(x) + g(y)) = g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x))$$

เนื่องจากนิพจน์ทางซ้ายมือมีความสมมาตรใน x, y ดังนั้นนิพจน์ทางขวามือต้องมีความสมมาตรดังกล่าวเช่นกัน ได้ว่า

$$g(x)f(y) - yf(g(x)) + g(g(x)) = g(y)f(x) - xf(g(y)) + g(g(y)) \qquad (2.2.22.1)$$

แทนค่า x = 0 ในสมการฟังก์ชันของโจทย์ได้

$$f(g(y)) = ay + b \qquad (2.2.22.2)$$

เมื่อ a = -f(0), b = g(0) แทนค่า y = 0 ใน (2.2.22.1) ได้

$$g(g(x)) = ag(x) + bf(x) - f(b)x + g(b) \qquad (2.2.22.3)$$

แทน (2.2.22.2), (2.2.22.3) ลงใน (2.2.22.1) ได้

$$g(x)f(y) - by + ag(x) + bf(x) - f(b)x = g(y)f(x) - bx + ag(y) + bf(y) - f(b)y$$

จาก (2.2.22.2) ได้ f(b) = b ทำให้สมการท้ายสุดนี้ลดรูปเป็น

$$g(x)f(y) + ag(x) + bf(x) = g(y)f(x) + ag(y) + bf(y)$$

กล่าวคือ

$$\{g(x) - b\}\{f(y) + a\} = \{g(y) - b\}\{f(x) + a\} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (2.2.22.4)$$

ถ้า $f(x)+a \neq 0$ แล้ว (2.2.22.4) เขียนเป็นสมการซึ่งแยกตัวแปรออกจากกันได้

$$\frac{g(x)-b}{f(x)+a} = \frac{g(y)-b}{f(y)+a}$$

แสดงว่ามีค่าคงตัว A ที่ทำให้

$$g(x) = A\{f(x) + a\} + b \qquad (2.2.22.5)$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x ที่มีสมบัติว่า $f(x) + a \neq 0$

เนื่องจาก f ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว จึงมีจำนวนจริง y_0 ที่มีสมบัติว่า $f(y_0) + a \neq 0$
แทนค่า $y = y_0$ ใน (2.2.22.4) และ พิจารณาเมื่อ $f(x) + a = 0$ ได้ว่า $g(x) = b$

ดังนั้น สูตร (2.2.22.5) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งเขียนให้ง่ายขึ้นได้เป็น

$$g(x) = Af(x) + B \, (x \in \mathbb{R} \text{ โดยที่ A, B เป็นค่าคงตัว}) \qquad (2.2.22.6)$$

เมื่อแทนกลับในสมการเชิงฟังก์ชันแรกเริ่ม ได้

$$f(x + g(y)) = xf(y) - yf(x) + Af(x) + B$$

แทนค่า $y = A$ ให้ว่า

$$f(x + g(A)) = xf(A) + B$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น
จาก(2.2.22.6) ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นด้วยเช่นกัน

ดังนั้นแทน $f(x) := tx + r$, $g(x) := px + q$ ลงในสมการเชิงฟังก์ชันแรกเริ่ม แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ พบว่า

$$t = p + r, \; tq + r = q, \; tp = -r$$

ซึ่งแสดงว่า

$$p \neq -1 \text{ และ} t = \frac{p}{p+1}, \; r = -\frac{p^2}{p+1}, \; q = -p^2$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = \frac{px}{p+1} - \frac{p^2}{p+1}, \quad g(x) = px - p^2 \qquad (p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, x \in \mathbb{R})$$

2.2.6 การใช้เอกลักษณ์ สมการเชิงฟังก์ชันบางสมการสร้างมาจากเอกลักษณ์ต่าง ๆ การแก้สมการเชิงฟังก์ชันประเภทนี้ จำต้องสังเกตให้ได้ว่าเอกลักษณ์ดังกล่าว มีส่วนคล้ายกับเอกลักษณ์ที่เคยพบมาก่อนหรือไม่ ซึ่งจะทำให้ได้ว่าฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเอกลักษณ์ดังกล่าว เป็นฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันหนึ่ง

ตัวอย่าง 2.2.23 จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(n+1) = \frac{\sqrt{3}f(n)-1}{f(n)+\sqrt{3}}$$

วิธีทำ เมื่อพิจารณานิพจน์ทางขวาของสมการ ทำให้นึกถึงเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติที่ว่า

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

และ $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

จัดรูปสมการเชิงฟังก์ชันให้ใกล้เคียงกัน ได้ว่า

$$f(n+1) = \frac{f(n)-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+f(n)\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

ถ้าให้ $f(1) = \tan t$ สำหรับบาง $t \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$f(2) = \tan\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

และโดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ได้ว่า

$$f(n) = \tan\left(t - (n-1)\frac{\pi}{6}\right)$$

ซึ่งสามารถตรวจคำตอบได้ว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

มีสมการเชิงฟังก์ชันสมการหนึ่ง ที่รู้จักกันในนามว่า ***สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต*** (D'Alembert's functional equation) ซึ่งมีรูปแบบเหมือนเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และเอกลักษณ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก เนื่องจากการแก้สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต ต้องอาศัยความรู้ทางการวิเคราะห์ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก เราจะแสดงการแก้สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ตไปไว้ในหัวข้อสุดท้ายของบทนี้ อย่างไรก็ตามเพื่อเป็นการยกตัวอย่างประกอบวิธีการใช้เอกลักษณ์ เราจะขอใช้ผลของทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ตในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.24 ให้ f และ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) \qquad (2.2.24.1)$$

จงพิสูจน์ว่า

$$f(x) = \cos(dx), \quad g(x) = \sin(dx)$$

เมื่อ d เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์

วิธีทำ สลับตำแหน่งของตัวแปร x, y ใน (2.2.24.1) ได้

$$f(y-x) = f(y)f(x) + g(y)g(x) = f(x-y)$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคู่

ถ้า g เป็นฟังก์ชันคู่เช่นกัน แล้วเปลี่ยนตัวแปร y เป็น –y ใน (2.2.24.1) ได้

$$f(x + y) = f(x)f(-y) + g(x)g(-y) = f(x)f(y) + g(x)g(y) = f(x - y)$$

เปลี่ยนตัวแปร x = y ได้ f(2x) เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว

ดังนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันค่าคงตัวด้วย ซึ่งขัดแย้งกับสมมุติฐานเริ่มต้น เพราะฉะนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันคู่

เปลี่ยนตัวแปร x เป็น –x และ y เป็น –y ใน (2.2.24.1) ได้

$$f(y - x) = f(-x)f(-y) + g(-x)g(-y) = f(x)f(y) + g(-x)g(-y) \qquad (2.2.24.2)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการ (2.2.24.1) กับ (2.2.24.2) ได้ว่า

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y) \qquad (2.2.24.3)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ได้ $g(x)^2 = g(-x)^2$ ซึ่งให้ว่า $g(x) = \pm g(-x)$

เนื่องจาก g ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว ดังนั้น มีจำนวนจริง a ที่ว่า $g(a) \neq 0$

ถ้า g(a) = g(-a) แล้ว แทนค่า y = a ใน (2.2.24.3) ได้

$$g(x) = g(-x) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า g ไม่เป็นฟังก์ชันคู่

เพราะฉะนั้น

$$g(a) = -g(-a)$$

ใช้ความสัมพันธ์นี้ โดยเลือก y = a ใน (2.2.24.3) ได้

$$g(x) = -g(-x)$$

กล่าวคือ g เป็นฟังก์ชันคี่ ซึ่งทำให้ g(0) = 0

แทนค่า y = 0 ใน (2.2.24.1) ได้

$$f(x) = f(x)f(0)$$

เนื่องจาก f ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ ดังนั้น f(0) = 1

เปลี่ยนตัวแปร y = x ใน (2.2.24.1) ได้ $1 = f(x)^2 + g(x)^2$ ซึ่งให้ว่า

$$|f(x)| \leq 1 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

เปลี่ยนตัวแปร y ด้วย –y ใน (2.2.24.1) และใช้ความเป็นฟังก์ชันคู่ของ f กับความเป็นฟังก์ชันคี่ของ g จะได้

$$f(x + y) = f(x)f(y) - g(x)g(y) \qquad (2.2.24.4)$$

เมื่อรวม (2.2.24.1) และ (2.2.24.4) เข้าด้วยกันได้

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$$

ซึ่งคือสมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต (ดูหัวข้อที่ 2.4) จากทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต ได้ว่า

$$f(x) = \cos(cx) \text{ หรือ } f(x) = \cosh(cx) \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์}$$

แต่จากเงื่อนไข $|f(x)| \leq 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง ได้ว่า $f(x) = \cos(cx)$ เท่านั้น

แทนค่า $y = a$, $f(x) = \cos(cx)$ ใน (2.2.24.1) แล้วใช้ $g(a) \neq 0$ ได้

$$g(x) = \{\cos(c(x-a)) - \cos(cx)\cos(ca)\}/g(a) = b\sin(cx)$$

เมื่อใช้ $1 = f(x)^2 + g(x)^2$ ได้ $1 = 1 + (b^2 - 1)(\sin(cx))^2$ ซึ่งบังคับให้ $b^2 = 1$ ดังนั้น

$$g(x) = \pm\sin(cx)$$

ถ้า $g(x) = -\sin(cx)$ แล้ว ให้ $d = -c$ จะได้ฟังก์ชันคำตอบเป็น

$$f(x) = \cos(dx),\ g(x) = \sin(dx)$$

ในบางครั้งสมการเชิงฟังก์ชันที่แลดูคล้ายกับสร้างมาจากเอกลักษณ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก สามารถพิสูจน์ได้โดยตรง โดยไม่ต้องอ้างทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเดอเลมเบอร์ต ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.25 (AM Monthly) ให้ $\{a_k ; k \geq 0\}$ เป็นลำดับค่าจริงที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$\cos a_{n+m} = \frac{\cos a_n + \cos a_m}{1 + \cos a_n \cos a_m} \qquad (n, m \in \mathbb{N}_0)$$

เรากล่าวว่า ลำดับเช่นว่านี้ เป็นลำดับเล็กสุด ถ้ามันสอดคล้องกับเงื่อนไขเพิ่มเติมที่ว่า

$$0 \leq a_k < \pi \text{ สำหรับทุก } k \in \mathbb{N}_0$$

จงหาลำดับเล็กสุดที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่โจทย์กำหนด แลดูคล้ายเอกลักษณ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ที่กล่าวถึงในบทที่ 1 คือ

$$\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

เราจะแสดงว่ามีเพียงฟังก์ชันนี้เท่านั้นที่เป็นคำตอบที่ต้องการ

เพื่อความสะดวก ให้ $c_k = \dfrac{1 - \cos a_k}{1 + \cos a_k}$

จากความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ว่า

$$c_{m+n} = \frac{1 - \cos a_{m+n}}{1 + \cos a_{m+n}} = \frac{1 - \frac{\cos a_n + \cos a_m}{1 + \cos a_n \cos a_m}}{1 + \frac{\cos a_n + \cos a_m}{1 + \cos a_n \cos a_m}} = \frac{1 - \cos a_n}{1 + \cos a_n} \cdot \frac{1 - \cos a_m}{1 + \cos a_m} = c_n c_m$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์นี้ซ้ำ ๆ พบว่า

$$c_n = c_0 c_1^{\,n}$$

เนื่องจาก $c_0 = c_0^{\,2}$ ได้ว่า

$$c_0 = 0 \text{ หรือ } 1$$

ถ้า $c_0 = 0$ แล้ว $c_n = 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}_0$ เพราะฉะนั้น $a_n = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$

ถ้า $c_0 = 1$ และ $c_1 = 0$ แล้ว $a_0 = \frac{1}{2}\pi$ และ $a_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$

ถ้า $c_0 = 1$ และ $c_1 \neq 0$ แล้ว เนื่องจาก $\cos a_i \in (-1,1]$

ดังนั้น $c_1 > 0$ จึงมี $c \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $c_1 = e^{-2c}$

ดังนั้น

$$c_n = e^{-2cn}$$

ซึ่งให้ว่า

$$\cos a_n = \frac{1-c_n}{1+c_n} = \frac{1-e^{-2cn}}{1+e^{-2cn}} = \frac{e^{cn}-e^{-cn}}{e^{cn}+e^{-cn}} = \tanh(cn)$$

เพราะฉะนั้น

$$a_0 = \frac{1}{2}\pi \text{ และ } a_n = \arccos(\tanh(cn)) \quad (n \in \mathbb{N})$$

2.2.7 การตรวจพินิจ วิธีนี้ไม่มีหลักตายตัวแน่นอน ซึ่งอาจจัดเป็นวิธีระคนได้ หลักการพื้นฐานคือ การพิจารณาสมการเชิงฟังก์ชันอย่างระมัดระวัง เช่น การจัดรูปเสียใหม่ หรือการเดาคำตอบ หรือการบวกเข้า ลบออก บางนิพจน์ หรือการใช้อสมการ เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.2.26 (AM Monthly) ให้ $D = \mathbb{R}$ - เซตจำกัด บน D

กำหนดให้ว่า f, F และ G เป็นฟังก์ชันจริงต่อเนื่องที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(r) - f(s) = (r - s)F(r)G(s)$$

จงหา f(x)

วิธีทำ บน D เราจะแสดงว่า f ต้องเป็นฟังก์ชันค่าคงตัว หรือไม่ก็อยู่ในรูป

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัวที่มีสมบัติว่า

$$ad - bc \neq 0$$

สมมุติว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว เลือก $r, s \in D$ ที่มีค่า $f(r) \neq f(s)$

จากความสัมพันธ์

$$f(r) - f(s) = \{f(x) - f(s)\} - \{f(x) - f(r)\} = \{(x - s)G(s) - (x - r)G(r)\}F(x)$$

ได้ว่า

$$F(x) = \frac{1}{cx+d} \quad (x \in D) \text{ เมื่อ } c, d \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

และจากสมการ $f(x) - f(r) = (x - r)F(x)G(r)$ ได้ว่า $f(x)$ มีรูปเป็นไปตามอ้างข้างต้น

ตัวอย่าง 2.2.27 (Lithunia 2000) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$(x + y)\{f(x) - f(y)\} = f(x^2) - f(y^2) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ สังเกตว่าฟังก์ชันเชิงเส้น $f(x) = ax + b$เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัวเป็นฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันหนึ่ง

เมื่อแทนค่า $y = 0$ พบว่า

$$x\{f(x) - f(0)\} = f(x^2) - f(0)$$

เมื่อแทนค่า $y = 1$ พบว่า

$$(x + 1)\{f(x) - f(1)\} = f(x^2) - f(1)$$

เมื่อลบสมการทั้งสอง ได้ว่า

$$f(x) = \{f(1) - f(0)\}x + f(0)$$

ซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้น สรุปได้ว่าฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันนี้คือ ฟังก์ชันเชิงเส้นทั้งหมด

ตัวอย่าง 2.2.28 (Macedonian MC) จงพิสูจน์ว่าไม่มี $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(i-1)) = f(i + 1) - f(i) \qquad (i \geq 2)$$

วิธีทำ เมื่อบวกสมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดให้ นิพจน์ทางขวามือ ลดรูปลงเหลือเพียงสองพจน์คือ

$$\sum_{i=2}^{n} f(f(i-1)) = \sum_{i=2}^{n} \{f(i+1) - f(i)\} = f(n + 1) - f(2)$$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq 2$ ได้ว่า

$$f(n + 1) = f(2) + \sum_{i=2}^{n} f(f(i-1)) \geq n \text{ (เพราะเรนจ์เป็นเซตของจำนวนนับ)} \qquad (2.2.28.1)$$

เมื่อใช้อสมการนี้ซ้ำ ๆ กับ $i \geq 4$ จะได้

$$f(i - 1) \geq i - 2 \text{ และ } f(f(i - 1)) \geq f(i - 1) - 1 \geq i - 3$$

ซึ่งเมื่อใช้ร่วมกับความสัมพันธ์ที่พบ จะได้ เมื่อ $n \geq 2$ ว่า

$$f(n + 1) = f(2) + f(f(1)) + f(f(2)) + \sum_{i=4}^{n} f(f(i-1)) \geq 3 + \sum_{i=4}^{n} (i-3)$$

$$= 3 + \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3) = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 12)$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(n+1) > 2n+1 \quad \text{เมื่อ} \quad n \geq 10$$

ให้ $f(2n) = M > 4n+3 \quad (n \geq 6)$

ดังนั้น จาก (2.2.28.1)

$$f(M) = f(2) + \sum_{i=2}^{M-1} f(f(i-1)) \quad (M \geq 4)$$

จาก (2.2.28.1)

$$f(2n) = f(2) + \sum_{i=2}^{2n-1} f(f(i-1)) \quad (n \geq 2)$$

เมื่อใช้ร่วมกันจะได้

$$f(M) - f(2n) = f(f(2n)) + f(f(2n+1)) + \ldots + f(f(M-2)) \qquad (M \geq 4,\ n \geq 2)$$

แต่ $f(f(2n)) = f(M)$ ทำให้ได้ว่า

$$-f(2n) = f(f(2n)) + f(f(2n+1)) + \ldots + f(f(M-2))$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะทางซ้ายมือเป็นจำนวนเต็มลบ แต่ทางขวามือเป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง 2.2.29 (Irish MO 1994) ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ นิยามโดย $f(1) = 2$ และสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(n+1) = (f(n))^2 - f(n) + 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

จงพิสูจน์ว่า

$$1 - \frac{1}{2^{2^{n-1}}} < \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \ldots + \frac{1}{f(n)} < 1 - \frac{1}{2^{2^n}}$$

วิธีทำ แทนค่า $n = 1$ ได้ $f(2) = 3$ แทนค่า $n = 2$ ได้ $f(3) = 7$

สังเกตว่า

$$2^{2^{2-1}} < f(3) - 1 = 6 < 2^{2^2}$$

สมมุติว่า $2^{2^{n-1}} < f(n+1) - 1 < 2^{2^n} - 1$ เป็นจริงเมื่อ $n = 2, 3, \ldots, k-1 \quad (k \geq 3)$

เราจะแสดงว่าอสมการเหล่านี้เป็นจริงเมื่อ $n = k$

ใช้สมมุติฐานของการอุปนัยร่วมกับสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$2^{2^{k-1}} < \{2^{2^{k-2}} + 1\}2^{2^{k-2}} < f(k+1) - 1 = (f(k))^2 - f(k) = f(k)\{f(k) - 1\} < \{2^{2^{k-1}} + 1\}2^{2^{k-2}} < 2^{2^k}$$

แสดงว่าอสมการทั้งสองเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

ขั้นตอนต่อไป จัดรูปสมการเชิงฟังก์ชันเสียใหม่ได้เป็น

$$f(n+1)-1 = f(n)\{f(n)-1\}$$

เมื่อกลับเศษเป็นส่วนได้ว่า

$$\frac{1}{f(n)} = \frac{1}{f(n)-1} - \frac{1}{f(n+1)-1}$$

ดังนั้น

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{f(j)} = 1 - \frac{1}{f(n+1)-1}$$

จากนี้ประยุกต์ อสมการที่พิสูจน์ก่อนหน้ากับนิพจน์ทางขวามือ จะได้อสมการที่ต้องการ

แบบฝึกหัด

1. (Albanian MO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) - 3f(\tfrac{1}{x}) = 3^x \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

2. (Belarus MO 1992-1993) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$xf(y) - yf(x) = (x-y)f(xy) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

3. (Belarus MO 1992-1993) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

4. (AMOC 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(2002x - f(0)) = 2002x^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

5. (Korean MO 2000) ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 - y^2) = (x-y)\{f(x) + f(y)\} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

6. (AMOC 2000) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + xf(1-x) = x^2 - 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

7. (South African MO) จงหา $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับคู่ของสมการเชิงฟังก์ชัน ต่อไปนี้

$$f(2x+1) + 2g(2x+1) = 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$f(x/(x-1)) + g(\tfrac{x}{x-1}) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

8. (South African MO 2002) จงหา $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n)) = f(n) + 1 \quad (n \in \mathbb{R}_0)$$

และเซต $\{f(0), f(1), f(2), \ldots\}$ มีค่าต่ำสุดเป็น 1...สมบัติพิเศษฟังก์ชัน

9. (HK MO 1987-1988) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

10. ให้ $a \neq \pm 1$ จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(\frac{x}{x-1}) = af(x) + b(x) \qquad (x \neq 1)$$

เมื่อ $b(x)$ เป็นฟังก์ชันจริงที่กำหนดมาให้

11. ฟังก์ชันจริงใดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$xf(x) + 2xf(-x) = -1$$

12. จงหาฟังก์ชันจริงที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + f(\frac{1}{1-x}) = x \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

13. จงหาฟังก์ชันจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\frac{f(-x)}{x} + f(\frac{1}{x}) = x \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

14. (Iranian MO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$xf(x + \frac{1}{y}) + yf(y) + \frac{y}{x} = yf(y + \frac{1}{x}) + xf(x) + \frac{x}{y} \qquad (x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

15. (Korean MO 1979) จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) + f\left(\frac{3+x}{1-x}\right) = x \qquad (x \neq \pm 1)$$

16. (Lithunia MO 2000) จงหา $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^{2000}) = 5f(x^{-2000}) + \sin x \qquad (x \in \mathbb{R}^+)$$

17. ให้ c เป็นค่าคงตัว จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + cf(2 - x) = (x - 1)^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

18. (Croatian MC 2003) กำหนดให้ฟังก์ชันจริง $f(x)$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

และ $f(2) = 2$ จงหาค่า $f(m)$ เมื่อ $m \in \mathbb{Z}$

19. กำหนดให้ฟังก์ชันจริง f สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน $f(\tan 2x) = \tan^4 x + \cot^4 x \quad (x \in \mathbb{R})$ จงพิสูจน์ว่า

$$f(\sin x) + f(\cos x) \geq 196 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

20. (Czech-Slovak MO 1999) จงหา $f : (1, \infty) \to (-\infty, \infty)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy) \quad (x > 1, y > 1)$$

21. (Ukranian MO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x)f(x + y) + 2f(x + 2y) + f(2x + y)f(y) = x^4 + y^4 + x^2 + y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

22. (AMOC 1995) ให้ $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้
จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + xf(-x) + xf(\tfrac{1}{x}) - f(-\tfrac{1}{x}) = g(x) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

ถามว่ามีเงื่อนไขใดบนฟังก์ชัน g จึงจะทำให้มีคำตอบ

23. จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

24. จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + f(\tfrac{1}{1-x}) = \frac{2(1-2x)}{x(1-x)} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\})$$

25. (AMOC 2001) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f((x - y)^2) = \{f(x)\}^2 - 2xf(y) + y^2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

26. จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(-x) = -f(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$

(ii) $f(x + 1) = f(x) + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$

(iii) $f(1/x) = f(x)/x^2 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

27. (Romanian MC 2000) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xf(x) + f(y)) = \{f(x)\}^2 + y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

28. จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y^2) + 4f(x)y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

29. จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y) + f(x)f(y) - xy \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

30. (Belarus MO 1993) จงแสดงว่าไม่มีลำดับ $\{f(n):n \in \mathbb{R}\}$ของจำนวนนับ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n)) = f(n+1) - f(n)$$

31. ให้แต่ละพจน์ของลำดับ $\{f(n) : n \in N\}$ มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวก และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n)) = f(n+1) + f(n)$$

จงแสดงว่าแต่ละพจน์ของลำดับมีค่าแตกต่างกัน

32. (Jensen 's functional equation) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

33. (South African MO 2000) จงหาฟังก์ชันจริง f(x) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + 3f(1-x) = x^2$$

2.3 สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี (Cauchy's functional equations)

สมการเชิงฟังก์ชันที่สำคัญและเป็นที่รู้จักกันมากที่สุด คือ ***สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี*** (หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ***สมการโคชี***) ซึ่งมีรูปแบบหนึ่งเป็น

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (aa1)$$

สมบัตินี้เราจะเรียกว่า สมบัติ***เชิงการบวก*** (additive)

การแก้สมการเชิงฟังก์ชันนี้ เริ่มด้วยการแทนค่า $y = 0$ ได้ว่า $f(x) = f(x) + f(0)$
นั่นคือ

$$f(0) = 0 \qquad (aa2)$$

เปลี่ยนตัวแปร $y = -x$ จะได้ $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ กล่าวคือ

$$f(-x) = -f(x) \qquad (aa3)$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคี่

พิจารณาเมื่อ $x > 0$ เปลี่ยนตัวแปร $y = x$ ได้ $f(2x) = 2f(x)$
โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์สามารถแสดงได้ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ

$$f(nx) = nf(x) \qquad (aa4)$$

พิจารณาจำนวนตรรกยะ $x = \frac{m}{n}$

เนื่องจาก $n \cdot x = m \cdot 1$ จาก (aa4) ได้ว่า $nf(x) = f(nx) = f(m1) = mf(1)$

กล่าวคือ

$$f(x) = (\frac{m}{n})f(1) \qquad (aa5)$$

ถ้าให้ $f(1) = c$ จาก (aa2),(aa3) และ (aa5) แล้ว

$$f(x) = cx \quad \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}$$

รูปแบบของฟังก์ชันคำตอบเหนือเซตของจำนวนตรรกยะนี้ได้มาจากสมการเชิงฟังก์ชัน โดยไม่ได้มีเงื่อนไขเพิ่มเติมใด ๆ

การที่จะถ่ายทอดรูปแบบของฟังก์ชันคำตอบนี้ไปยังเซตของจำนวนจริงทั้งหมดจำเป็น ต้องอาศัยสมบัติเพิ่มเติมของฟังก์ชัน ซึ่งมีทางทำได้หลายทางดังแสดงต่อไปนี้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันคำตอบ

สมมุติว่าฟังก์ชันคำตอบที่ต้องการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ให้ x เป็นจำนวนอตรรกยะ ดังนั้น มีลำดับของจำนวนตรรกยะ x_n ที่ลู่เข้าสู่ x โดยทฤษฎีบทว่าด้วยความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ว่า

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} cx_n = cx$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = cx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ความเป็นฟังก์ชันทางเดียว

สมมุติว่า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวประเภทฟังก์ชันเพิ่ม (ในกรณีที่เป็นฟังก์ชันลด การพิสูจน์เป็นไปในทำนองเดียวกัน

ให้ x เป็นจำนวนอตรรกยะใดๆ ดังนั้น โดยสมบัติความหนาแน่น ของเซตของจำนวนตรรกยะในเซตของจำนวนจริง ได้ว่ามีลำดับเพิ่มของจำนวนตรรกยะ (r_n) และลำดับลดของจำนวนตรรกยะ (R_n) โดยที่ลำดับแรกลู่ขึ้น และลำดับหลังลู่ลง สู่ x กล่าวคือ

$$cx \uparrow cr_n = f(r_n) \leq f(x) \leq f(R_n) = cR_n \downarrow cx \qquad (n \to \infty)$$

ดังนั้น

$$f(x) = cx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

การเป็นฟังก์ชันมีขอบเขต

สมมุติว่า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วงปิด $[a,b]$ $(b > a)$ กล่าวคือ มีค่าคงตัว $M > 0$ ที่

$$|f(x)| < M \text{ ทุก } x \in [a,b]$$

ถ้า $x \in [0,b-a]$ แล้ว $x+a \in [a,b]$ และจาก $f(x+a) = f(x) + f(a)$ ได้ว่า

$$|f(x)| < |f(x)| + |f(a)| < M+M = 2M$$

ทำให้ว่า f เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วงปิด [0, b - a]

ให้ d = b – a แล้วจะได้ว่า f มีขอบเขตบนช่วงปิด [0,d]
นิยามให้

$$g(x) := f(x) - xf(d)/d$$

ดังนั้น

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

และได้ว่า

$$g(d) = f(d) - df(d)/d = 0$$

ทำให้สรุปได้ว่า

$$g(x+d) = g(x) + g(d) = g(x)$$

นั่นคือ g เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบเท่ากับ d

เนื่องจาก g คือฟังก์ชันผลต่างของฟังก์ชันมีขอบเขตบนช่วงปิด [0,d] ย่อม ทำให้ g มีขอบเขตบนช่วง [0,d] และจากที่ g เป็นฟังก์ชันเป็นคาบที่มีคาบเป็น d ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนเซตจำนวนจริงทั้งหมด

ต่อไปเราจะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันศูนย์บน $\mathbb{R}$

สมมุติเพื่อหาข้อขัดแย้งว่า มีจำนวนจริง z จำนวนหนึ่งที่ทำให้ $g(z) \neq 0$
จากสิ่งที่พบข้างต้นเนื่องจาก g(nz) = ng(z) ทุกจำนวนนับ n
ดังนั้นถ้าเราเลือก n ที่มีค่ามาก จะทำให้ |ng(z)| มีค่ามากได้อย่างไม่มีขอบเขต ซึ่งขัดแย้งกับความเป็นฟังก์ชันมีขอบเขตของ g จึงได้ว่า g(x) = 0 ทุกจำนวนจริง x นั่นคือ f(x) = cx ทุกจำนวนจริง x

สรุปสิ่งที่กล่าวมาแล้วได้เป็น

ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการโคชี ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หรือ เป็นฟังก์ชันทางเดียว หรือเป็นฟังก์ชันมีขอบเขตแล้ว

$$f(x) = cx \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ในตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้จะแสดงวิธีทำสองวิธี วิธีแรกเป็นการเปลี่ยนรูปสมการเชิงฟังก์ชัน มาเป็นสมการโคชี (ในกรณีของเซตของจำนวนเต็ม) แล้วใช้วิธีการแบบเดียวกันกับวิธีการส่วนแรกที่ใช้ในการแก้สมการโคชี วิธีที่สองใช้สมบัติความเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งของฟังก์ชันคำตอบ ควบคู่ไปกับการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

นอกจากเพื่อแสดงการประยุกต์วิธีการที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการโคชีแล้ว การนำเสนอวิธีแก้สมการฟังก์ชันหลาย ๆ แบบ ดังในตัวอย่างนี้ แสดงให้เห็นว่าบ่อยครั้ง การแก้สมการเชิงฟังก์ชัน อาจทำได้หลายวิธี จำเป็นที่ผู้เรียนจะต้องเรียนรู้ และพบเห็นนอกจากโจทย์หลากหลายรูปแบบแล้ว โจทย์เดียวกันแต่ต่างวิธีทำก็เป็นสิ่งสำคัญที่ต้องเรียนรู้เช่นกัน

ตัวอย่าง 2.3.1 (Irish MO 2001) จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

วิธีทำ (วิธีที่หนึ่ง) เมื่อใช้สมการเชิงฟังก์ชันสองครั้ง ได้ว่า

$$f(x + y) + 1 = f(x + y + f(1)) = f(x + f(1 + f(y))) = f(x) + 1 + f(y)$$

ดังนั้น f สอดคล้องกับสมการโคชี $f(x + y) = f(x) + f(y)$
โดยวิธีเดียวกันกับในการแก้สมการโคชี (หรือใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์) ได้ว่า

$$f(x) = xf(1) \qquad (x \in \mathbb{N})$$

แทนค่า $x = y = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(1) + 1 = f(1 + f(1)) = \{f(1) + 1\}f(1)$$

โดยสมการสุดท้ายมาจากความสัมพันธ์ที่เพิ่งค้นพบ เนื่องจากเรนจ์เป็นเซตของจำนวนนับ
ดังนั้น $f(1) = 1$ จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{N})$$

วิธีทำ (วิธีที่สอง) เราจะแสดงก่อนว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
สมมุติว่า $f(r) = f(s)$ จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$r + f(x) = f(x + f(r)) = f(x + f(s)) = s + f(x)$$

ดังนั้น $r = s$ แสดงว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

ให้ $f(1) = a$ ดังนั้น

$$f(1 + a) = f(1 + f(1)) = f(1) + 1 = 1 + a$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(x + 1 + a) = f(x + f(1 + a)) = f(x) + 1 + a$$

แต่

$$f(x + 1 + a) = f(x + 1 + f(1)) = f(x + 1) + 1$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x + 1) = f(x) + a \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{N}$$

จาก $f(x + f(a)) = f(x) + a = f(x + 1)$ โดยความเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ได้

$$x + f(a) = x + 1 \text{ กล่าวคือ } f(a) = 1$$

จาก

$$f(f(x)) + a = f(f(x) + f(a)) = f(f(x) + 1) = f(1 + f(x)) = f(1) + x = a + x$$

ดังนั้น

$$f(f(x)) = x \quad (x \in \mathbb{N})$$

ขั้นต่อไปคือการแสดงว่า $f(k) = ka$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$
ความสัมพันธ์นี้พบมาแล้วว่าเป็นจริง เมื่อ $k = 1$
สมมุติว่าเป็นจริงสำหรับ $k \geq 1$ ดังนั้น

$$f(k + 1) = f(k) + a = ka + a = (k + 1)a$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ว่า

$$f(k) = ka \quad (k \in \mathbb{N})$$

ลำดับสุดท้ายสังเกตว่า

$$k = f(f(k)) = f(ka) = (ka)a = ka^2 \text{ สำหรับทุก } k \in \mathbb{N}$$

ซึ่งให้ว่า $a = 1$ จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{N})$$

เมื่อตรวจคำตอบพบว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้อง

เช่นที่เคยเอ่ยถึงในตอนต้นบท หากมีเงื่อนไขเพิ่มเติม สมการโคชี อาจมีคำตอบที่ชัดเจนยิ่งขึ้นได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการโคชี

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

พร้อมทั้งเงื่อนไขเพิ่มเติมที่ว่า

$$f(1) = 1 \text{ และ } f(1/x) = f(x) / x^2 \text{ เมื่อ } x \neq 0$$

วิธีทำ เราเริ่มด้วยวิธีการแบบเดียวกับในการแก้สมการโคชี ซึ่งให้ข้อมูลว่า $f(0) = 0$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ จากสมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดให้อีกสมการหนึ่ง ได้ว่า

$$f(x) = x^2 f(1/x) \qquad (x \neq 0)$$

ใช้ความสัมพันธ์นี้ซ้ำ ๆ ร่วมกับสมการโคชี เมื่อ $x \neq 0, 1$ พบว่า

$$f(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f\left(\frac{x+1-x}{x}\right) = x^2 f\left(1+\frac{1-x}{x}\right) = x^2\{f(1) + f\left(\frac{1-x}{x}\right)\}$$

$$= x^2\{1 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 f\left(\frac{x}{1-x}\right)\} = x^2 + (1-x)^2 f\left(\frac{1-(1-x)}{1-x}\right)$$

$$= x^2 + (1-x)^2 f\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = x^2 + (1-x)^2\{f\left(\frac{1}{1-x}\right) - f(1)\}$$

$$= x^2 + (1-x)^2 f\left(\frac{1}{1-x}\right) - (1-x)^2 = x^2 + (1-x)^2\left(\frac{1}{1-x}\right)^2 f(1-x) - (1-x)^2$$

$$= x^2 + f(1-x) - (1-x)^2 \qquad = x^2 + f(1) - f(x) - (1-x)^2$$

ดังนั้น $f(x) = x$ เป็นคำตอบเดียวที่เป็นไปได้

ตัวอย่าง 2.3.3 ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$f(1) = 1,\ f(a + b) = f(a) + f(b)\ \ (a,b \in \mathbb{R})\ \ \text{และ}\ \ f(x)f(\tfrac{1}{x}) = 1\ \ (x \neq 0)$$

จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

วิธีทำ โดยวิธีการแบบเดียวกันกับในส่วนแรกของการพิสูจน์ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการโคชี ได้ว่า

$$f(0) = 0,\quad f(-x) = -f(x)\quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$f(\tfrac{m}{n}) = \tfrac{m}{n}\ \ \text{สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ}\ \tfrac{m}{n}$$

จากสมการเชิงฟังก์ชันสมการสุดท้ายได้ว่า ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $f(x) \neq 0$ ซึ่งแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ทั้งนี้เพราะ จาก $f(a) = f(b)$ ได้ $f(a - b) = 0$ ซึ่งชี้ว่า $a = b$)

ถ้า $a^2 \neq a$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f(a)-f(a^2)} &= \frac{1}{f(a(1-a))} &&= f\left(\frac{1}{a(1-a)}\right)\\
&= f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{1-a}\right) &&= f\left(\frac{1}{a}\right)+f\left(\frac{1}{1-a}\right)\\
&= \frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(1-a)} &&= \frac{1}{f(a)}+\frac{1}{f(1)-f(a)}\\
&= \frac{1}{f(a)}+\frac{1}{1-f(a)} &&= \frac{1}{f(a)-(f(a))^2}
\end{aligned}$$

ซึ่งให้ว่า $f(a^2) = (f(a))^2\ \ (a \in \mathbb{R})$

ถ้า $a < b$ แล้วให้ $b - a = x^2$ สำหรับบางจำนวนจริง x
ดังนั้น

$$f(b) - f(a) = f(x^2) = (f(x))^2 > 0$$

ซึ่งให้ว่า $f(a) < f(b)$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

ถ้า x เป็นจำนวนจริง แล้ว จะมีลำดับ a_n , b_n ของจำนวนตรรกยะ ที่มีสมบัติว่า x เป็นจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวที่สอดคล้องกับอสมการ

$$a_n < x < b_n\ \ \text{สำหรับทุกจำนวนนับ}\ n$$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนนับ n ได้ว่า

$$a_n = f(a_n) < f(x) < f(b_n) = b_n$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = x\quad (x \in \mathbb{R})$$

สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี มีรูปแบบที่คู่ขนานกันอีกสามรูปแบบ รูปแบบที่หนึ่งได้แก่

$$f(x+y) = f(x)\,f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad \textbf{(am1)}$$

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (x, y > 0) \qquad \textbf{(ma1)}$$

$$f(xy) = f(x)\,f(y) \qquad (x, y > 0) \qquad \textbf{(mm1)}$$

สมบัติของฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน **(mm1)** จะเรียกว่า สมบัติ**เชิงการคูณ** (multiplicative)

ในกรณีฟังก์ชันคำตอบเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ เราสามารถเปลี่ยนรูปสมการทั้งสามให้เป็นสมการโคชีได้

กรณี (am1)

ถ้ามีค่า $a \in \mathbb{R}$ ค่าหนึ่งที่ $f(a) = 0$ แล้วจะได้ว่า

$$f(x+a) = f(x)f(a) = 0 \text{ ทุก } x$$

ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันศูนย์

กรณีที่ไม่มี x ที่ $f(x) = 0$ แทน x,y ด้วย $\frac{t}{2}$ จะได้

$$f(t) = \left(f(\tfrac{t}{2}) \right)^2 > 0$$

ทำให้ได้ว่าฟังก์ชันคำตอบมีเรนจ์เป็นจำนวนจริงบวก ทำให้ใส่ลอการิทึมใน (am 1)ได้

$$\log (f(x+y)) = \log (f(x)) + \log (f(y))$$

เมื่อเปลี่ยนฟังก์ชันโดยให้ $\log f = g$ จะได้ว่า

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

ซึ่งเป็นสมการโคชี โดยทฤษฎีบทว่าด้วยสมการโคชี ได้ว่า

$$g(x) = cx$$

นั่นคือ

$$f(x) = e^{cx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

กรณี (ma1)

เปลี่ยนตัวแปร $x = e^u$, $y = e^v$ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง) และ $f(e^u) = g(u)$ สมการเชิงฟังก์ชันกลายเป็นสมการโคชี

$$g(u + v) = g(u) + g(v) \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

โดยทฤษฎีบทว่าด้วยสมการโคชีได้

$$g(u) = cu$$

ดังนั้น

$$f(x) = c \log x \qquad (x > 0)$$

กรณี (mm1)

เปลี่ยนตัวแปร $x = e^u$, $y = e^v$ (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง) และ $f(e^u) = g(u)$ ได้

$$g(u + v) = g(u)g(v) \quad (u, v > 0)$$

ซึ่งเป็นสมการ (ma1) ที่มีฟังก์ชันคำตอบเป็น

$$g(u) = e^{cu} = (e^u)^c = x^c$$

กล่าวคือ

$$f(x) = x^c \quad (x > 0)$$

สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการคู่ขนานของสมการโคชี

1) ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริงที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) = f(x) f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

แล้ว

$$f(x) = e^{cx} \quad (x \in \mathbb{R})$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

2) ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริงที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (x, y > 0)$$

แล้ว

$$f(x) = c \cdot \log x \quad (x > 0)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ($\neq 0$)

3) ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริงที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xy) = f(x) f(y) \qquad (x, y > 0)$$

แล้ว

$$f(x) = x^c \qquad (x > 0)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

เมื่อเปลี่ยนโดเมน และยกเลิกเงื่อนไขความต่อเนื่อง ฟังก์ชันคำตอบของสมการคู่ขนานของสมการโคชี อาจมีรูปแบบที่แตกต่างออกไปดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.3.4 ให้ $a \in \mathbb{Z}$ จงหา $f : \{x \in \mathbb{Z};\ x \geq a\} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{Z}\ ;\ x \geq a,\ y \geq a,\ x + y \geq a)$$

วิธีทำ **กรณีที่หนึ่ง: $a \geq 0$** แยกพิจารณาเป็นสามกรณีย่อย

- กรณีย่อย 1.1: $f(a) = 0$

เราจะแสดงโดยการอุปนัย ว่า

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{Z},\ x \geq a) \tag{2.3.4.1}$$

ให้ x เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า a สมมุติว่า f เป็น 0 ณ $x - 1$ จาก $2x > a$ ได้ว่า $f(2x)$ หาค่าได้ และ

$$0 = f(x-1)f(x+1) = f(x-1+x+1) = f(2x) = f(x+x) = (f(x))^2$$

แสดงว่า f เป็น 0 ณ x แสดงว่า (2.3.4.1)เป็นจริง

- กรณีย่อย 1.2: $f(a) \neq 0,\ f(a+1) = 0$

โดยการพิสูจน์เช่นเดียวกันกับในกรณีย่อยที่แล้ว ได้ว่า

$$f(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{Z},\ x \geq a+1)$$

จาก

$$f(2a) = (f(a))^2 \neq 0$$

แสดงว่า $a \leq 2a \leq a$ ดังนั้น $a = 0$ และ

$$0 \neq f(0) = f(0+0) = (f(0))^2$$

ซึ่งให้ว่า $f(0) = 1$ จึงสรุปได้ว่า

$$(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0 \\ 0 & , x \geq 1 \end{cases} \tag{2.3.4.2}$$

- กรณีย่อย 1.3 $f(a) \neq 0,\ f(a+1) \neq 0$

ให้ $q := \frac{f(a+1)}{f(a)} \neq 0$

เราจะพิสูจน์ว่า

$$f(x) = f(a)q^{x-a} \qquad (x \in \mathbb{Z},\ x \geq a)$$

สมการนี้เป็นจริง เมื่อ $x = a,\ a+1$

ให้ $x > a$ และ สมมุติเพื่อการอุปนัยว่า ประพจน์เป็นจริง ณ $x,\ x - 1$ กล่าวคือ

$$f(x-1) = f(a)q^{x-1-a},\ \ f(x) = f(a)q^{x-a}$$

จาก $2x > a$ แสดงว่า $f(2x)$ หาค่าได้ และด้วยวิธีการหาค่าสองวิธี พบว่า

$$f(2x) = f(x-1+x+1) = f(x-1)f(x+1) = f(a)q^{x-1-a}f(x+1)$$

และ

$$f(2x) = f(x+x) = (f(x))^2 = (f(a))^2 q^{2x-2a}$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการทั้งสอง และใช้ $q \neq 0,\ f(a) \neq 0$ ได้ว่า

$$f(x+1) = f(a)q^{x+1-a}$$

ซึ่งแสดงว่าสมการที่ต้องการพิสูจน์ เป็นจริง ณ x + 1 จึงเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $x \geq a$
โดยการอุปนัย
แทนค่า $x = 2a$ ได้ $f(2a) = f(a)q^a$
ในทำนองกลับกัน $f(2a) = (f(a))^2$ ให้ว่า $f(a) = q^a$
ดังนั้น

$$f(x) = q^x \qquad (x \in \mathbb{Z}, x \geq a) \qquad (2.3.4.3)$$

กรณีที่สอง: a < 0

ฟังก์ชัน f เมื่อจำกัดโดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็มไม่ติดลบ สอดคล้องกับเงื่อนไขของกรณีที่หนึ่ง (โดยมี 0 แทนที่ a) ดังนั้น f จึงต้องมีรูปเป็นไปตามสูตรใดสูตรหนึ่งในสามสูตร (2.3.4.1), (2.3.4.2), (2.3.4.3) เมื่อ $x \geq 0$ (ในการพิจารณาในส่วนที่เหลือ จำเป็นต้องทราบว่า -1 อยู่ในโดเมนของ f)

- กรณีย่อย 2.1 $f(x) = 0$ สำหรับ $x \geq 0$ (คือสูตร (2.3.4.1) จริง)
  ดังนั้น $f(x) = 0$ เมื่อ $a \leq x \leq 0$ ทั้งนี้โดยการอุปนัยย้อนหลัง เพราะ สมมุติว่า $f(x) = 0$ สำหรับบาง x โดยที่ $a < x \leq 0$ แล้ว
  $$f(x - 1) = f(x)f(-1) = 0 \text{ ด้วยเช่นกัน}$$

- กรณีย่อย 2.2 $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ สำหรับ $x > 0$ (คือสูตร (2.3.4.2) จริง) กรณีนี้เป็นไปไม่ได้ เพราะ
  $$f(0) = f(1 - 1) = f(1)f(-1) = 0$$

- กรณีย่อย 2.3 $f(x) = q^x$ สำหรับ $x \geq 0$ และ q เป็นค่าคงตัว $\neq 0$ (คือสูตร (2.3.4.3) จริง) เราจะแสดงว่า
  $$f(x) = q^x \text{ สำหรับ } a \leq x \leq 0$$

  ก่อนอื่นสังเกตว่า
  $$1 = q^0 = f(0) = f(1 - 1) = f(1)f(-1) = qf(-1)$$

  ดังนั้น $f(-1) = \frac{1}{q}$ เช่นกันกับข้างต้น

  โดยการอุปนัยย้อนหลัง สมมุติว่า $f(x) = q^x$ เมื่อ $a < x \leq 0$ แล้ว
  $$f(x - 1) = f(x)f(-1) = q^x q^{-1} = q^{x-1}$$
  แสดงว่าประพจน์เป็นจริง

สรุปได้ว่า ไม่ว่า a จะมีเครื่องหมายเป็นเช่นใด ฟังก์ชัน (2.3.4.1) และ (2.3.4.3) (พร้อมด้วยเลขฐาน $q \neq 0$ ใด ๆ) ประกอบกันเป็นคำตอบทั่วไปของสมการฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ ยกเว้นในกรณีที่ $a = 0$ ซึ่งในกรณีนี้จะมีคำตอบเพิ่มขึ้นอีกหนึ่งคำตอบ ที่กำหนดด้วยฟังก์ชัน (2.3.4.2)

แบบฝึกหัด

1. จงหาฟังก์ชัน f, g, h : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า ทุกจำนวนจริง x,y ใดๆ

$$f(x+y) = f(x)g(y) + h(y)$$

2. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง f,g,h ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$

3. จงหาฟังก์ชันคำตอบทั้งหมดที่นิยามบนจำนวนจริงบวกและสอดคล้องกับ

$$f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

4. จงหาฟังก์ชันคำตอบทั้งหมดของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}$$

5. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่องทั้งหมดที่มีสมบัติว่า ทุกจำนวนจริง x, y ใดๆ

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y)$$

6. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ที่ส่งค่า x, x+y และ x+2y ซึ่งเป็นลำดับเลขคณิตไปเป็น f(x), f(x + y), f(x + 2y) ซึ่งเป็นลำดับเรขาคณิต กล่าวคือ

$$\{f(x+y)\}^2 = f(x)\cdot f(x+2y)$$

7. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง f ทั้งหมดที่

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y)$$

8. จงหาฟังก์ชัน f,g,h : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y) = f(x)g(y) + h(y)$$

9. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy+1)$$

10. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง f,g,h : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y) + g(x-y) = 2h(x) + 2h(y)$$

2.4 สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต

ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เรากล่าวว่า f สอดคล้องกับ***สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต*** (หรือเรียกสั้น ๆ ว่า ***สมการเดอเลมเบอร์ต***) เมื่อ

(DAL) $$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

ก่อนอื่นสังเกตว่า ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ เป็นฟังก์ชันคำตอบของ (DAL)

เราจะแสดงว่าฟังก์ชันคำตอบที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ ของสมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต มีเพียงฟังก์ชันทั้งสองเท่านั้น

แทนค่า y = 0 ใน (DAL) ได้

$$2f(x) = 2f(x)f(0)$$

ดังนั้น $f(x) = 0$ หรือ $f(0) = 1$

เนื่องจากเราไม่สนใจฟังก์ชันคำตอบที่เป็นฟังก์ชันศูนย์ จากนี้ไปจะพิจารณา เมื่อ $f(0) = 1$
แทนค่า $x = 0$ ใน (DAL) ได้ $f(-y) = f(y)$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคู่

เปลี่ยนตัวแปร $x = ny$ ใน (DAL) ได้

$$f((n+1)y) = 2f(y)f(ny) - f((n-1)y) \qquad (2.4.1)$$

เปลี่ยนตัวแปร $y = x$ ใน (DAL) ได้

$$f(2x) + 1 = 2\{f(x)\}^2$$

เปลี่ยนตัวแปร $t = 2x$ ในสมการล่าสุดนี้ แล้วจัดรูปได้

$$f(\tfrac{t}{2})^2 = \tfrac{1}{2}\{f(t) + 1\} \qquad (2.4.2)$$

โดยความต่อเนื่อง และค่า $f(0) = 1$ ได้ว่า มีจำนวนจริง $a > 0$ ที่ทำให้ $f(x) > 0$ สำหรับทุกค่า $x \in [-a,a]$ เราแยกพิจารณาเป็นอีกสองกรณี

- กรณี $0 < f(a) \leq 1$

เลือก b โดยที่ $0 \leq b < \frac{\pi}{2}$ และ $f(a) = \cos b$

เราจะแสดงว่า ถ้า $x = \frac{na}{2^m}$ เมื่อ $m \geq 0$, $n > 0$ เป็นจำนวนเต็มแล้ว

$$f(\tfrac{na}{2^m}) = f(x) = \cos(\tfrac{bx}{a}) = \cos\left(\frac{b}{a}\frac{na}{2^m}\right) \qquad (2.4.3)$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์บน m และ n เมื่อ $n = 1$, $m = 0$ สมการ (2.4.3) เป็นจริงจากนิยามของ b

แทนค่า $t = a$ ใน (2.4.2) ได้

$$f(\tfrac{a}{2})^2 = \tfrac{1}{2}\{f(a) + 1\} = \tfrac{1}{2}\{\cos b + 1\} = \cos^2(\tfrac{b}{2})$$

ดังนั้น

$$f(\frac{a}{2}) = \cos(\frac{b}{2})$$

เพราะทั้งคู่มีค่าเป็นบวก แสดงว่า (2.4.3) เป็นจริงเมื่อ n = 1, m = 1

สมมุติว่า (2.4.3) เป็นจริง เมื่อ n = 1 และบางจำนวนนับ m โดย (2.4.2) ได้

$$\{f(\frac{a}{2^{m+1}})\}^2 = \frac{1}{2}\{f(\frac{a}{2^m}) + 1\} = \frac{1}{2}\{\cos(\frac{b}{2^m}) + 1\} = \cos^2(\frac{b}{2^{m+1}})$$

ซึ่งแสดงว่า

$$f(\frac{a}{2^{m+1}}) = \cos(\frac{b}{2^{m+1}})$$

เพราะทั้งคู่เป็นบวก แสดงว่า (2.4.3) เป็นจริง เมื่อ n = 1 และทุกจำนวนเต็ม $m \geq 0$

สมการ (2.4.3) เป็นจริงเมื่อ n = 2 และทุกจำนวนเต็ม $m \geq 0$ เพราะในกรณีนี้ $\frac{na}{2^m} = \frac{a}{2^{m-1}}$ ซึ่งลดทอนลงเป็นกรณี n = 1

แทนค่า n = 2 แทนค่า $y = \frac{a}{2^m}$ ใน (2.4.1) ได้

$$f(\frac{3a}{2^m}) = 2f(\frac{a}{2^m})f(\frac{a}{2^{m-1}}) - f(\frac{a}{2^m}) = 2\cos(\frac{b}{2^m})\cos(\frac{b}{2^{m-1}}) - \cos(\frac{b}{2^m}) = \cos(\frac{3b}{2^{m+1}})$$

แสดงว่า (2.4.3) เป็นจริง เมื่อ n = 3 และทุกจำนวนเต็ม $m \geq 0$

สมมุติว่า (2.4.3) เป็นจริงสำหรับบางจำนวนนับ n และทุกจำนวนเต็ม $m \geq 0$ แทนค่า $y = a/2^m$ ใน (2.4.1) ได้

$$\begin{aligned} f(\frac{(n+1)a}{2^m}) &= 2f(\frac{a}{2^m})f(\frac{na}{2^m}) - f(\frac{(n-1)a}{2^m}) \\ &= 2\cos(\frac{b}{2^m})\cos(\frac{nb}{2^m}) - \cos(\frac{(n-1)b}{2^m}) \\ &= \cos(\frac{(n+1)b}{2^m}) \end{aligned}$$

แสดงว่า (2.4.3) เป็นจริง ณ n+1 และทุกจำนวนเต็ม $m \geq 0$ เป็นอันจบสิ้นการพิสูจน์ (2.4.3) โดยการอุปนัย

เนื่องจากเซตของจำนวนจริง $\{\frac{na}{2^m}$: เมื่อ n > 0, $m \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$ หนาแน่นในช่วง $[0,\infty)$ โดยความต่อเนื่อง ได้ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง $x \geq 0$

$$f(x) = \cos(\frac{bx}{a})$$

จากการที่ f เป็นฟังก์ชันคู่ จึงได้ว่า (2.4.3) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x

- กรณี f(a) > 1

จะมีจำนวนจริงบวก b ที่ว่า f(a) = cosh b ด้วยวิธีการพิสูจน์แบบเดียวกับในกรณีที่แล้ว ได้ว่า

$$f(x) = \cosh(\frac{bx}{a}) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

สรุปจากการวิเคราะห์ข้างต้นได้เป็น

ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเดอเลมเบอร์ต ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันจริงต่อเนื่อง ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ ถ้า f สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad \textbf{(DAL)}$$

แล้ว

$$f(x) = \cos(cx) \text{ หรือ } f(x) = \cosh(cx)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการประยุกต์ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเดอเลมเบอร์ต และสมการโคชี เป็นตัวอย่างที่ค่อนข้างลึกซึ้งและยาก ทั้งนี้เพราะมีฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องถึงสองฟังก์ชัน และเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องค่อนข้างกว้าง ให้สังเกตด้วยว่า ตัวสมการเชิงฟังก์ชันคล้ายกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และเอกลักษณ์ของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

ตัวอย่าง 2.4.1 (IMO 1972) ให้ $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)g(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (2.4.1.1)$$

(i) จงพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และ $|f(x)| \leq 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว

$$|g(y)| \leq 1 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } y$$

(ii) จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง f, g ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันข้างต้น

วิธีทำ (i) สมมุติว่ามีจำนวนจริง y_0 ที่มีสมบัติว่า

$$|g(y_0)| = 1 + a \text{ เมื่อ } a > 0$$

ดังนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x เราได้ว่า

$$2f(x)g(y_0) = f(x + y_0) + f(x - y_0)$$

ให้ M เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ f(x) เมื่อแปร x ไปเหนือเซตของจำนวนจริง เขียนย่อได้เป็น

$$M = \sup \{ f(x) ; x \in \mathbb{R}\}$$

ดังนั้น $0 < M \leq 1$ จากอสมการเชิงฟังก์ชัน และข้อมูลข้างต้น ได้ว่า

$$2|f(x)||g(y_0)| \leq |f(x + y_0)| + |f(x - y_0)| \leq 2M$$

ดังนั้น

$$|f(x)| \leq \frac{M}{|g(y_0)|} < M \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ซึ่งขัดแย้งกับนิยามความเป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ M
ข้อขัดแย้งนี้แสดงว่า ไม่มีจำนวนจริง y_0 ดังกล่าว

(ii) สังเกตว่า ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันศูนย์ แล้ว เราสามารถเลือก g ให้เป็นฟังก์ชันใด ๆ ได้ โดยที่สมการเชิงฟังก์ชัน (2.4.1.1) เป็นจริงเสมอ เพราะฉะนั้น จากนี้ไปสมมุติว่า f(x) ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ ซึ่งแสดงว่า มีจำนวนจริง a ที่มีสมบัติว่า

$$f(a) \neq 0$$

แทนค่า x = a และเปลี่ยนตัวแปร y เป็น –y ใน (2.4.1.1) ได้

$$2f(a)g(-y) = f(a - y) + f(a + y) = 2f(a)g(y)$$

เนื่องจาก $f(a) \neq 0$ จึงได้

$$g(y) = g(-y)$$

กล่าวคือ g เป็นฟังก์ชันคู่

แทนค่า x = a, y = 0 ใน (2.4.1.1) ได้

$$2f(a) = 2f(a)g(0)$$

ซึ่งให้ว่า g(0) = 1 กล่าวคือ g ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์

ให้ $p(t) := \frac{1}{2}\{f(t) + f(-t)\}$, $q(t) := \frac{1}{2}\{f(t) - f(-t)\}$

ดังนั้น

$$f(x) = p(x) + q(x)$$

ในที่นี้ p เป็นฟังก์ชันคู่ ในขณะที่ q เป็นฟังก์ชันคี่ (ซึ่งปรกติ เรียกกันว่า ส่วนคู่ และส่วนคี่ของ f ตามลำดับ)

เมื่อใช้ฟังก์ชันใหม่คู่นี้ สมการเชิงฟังก์ชัน (2.4.1.1) เปลี่ยนรูปเป็น

$$p(x + y) + p(x - y) + q(x + y) + q(x - y) = 2p(x)g(y) + 2q(x)g(y) \qquad (2.4.4)$$

เปลี่ยนตัวแปร x เป็น –x และ y เป็น –y และใช้ความเป็นฟังก์ชันคู่ของ g ได้ว่า

$$p(x + y) + p(x - y) - q(x + y) - q(x - y) = 2p(x)g(y) - 2q(x)g(y) \qquad (2.4.5)$$

เมื่อบวก (2.4.4) และ (2.4.5) เข้าด้วยกัน ได้

$$p(x + y) + p(x - y) = 2p(x)g(y) \qquad (2.4.6)$$

สลับ x กับ y ใน (2.4.6) แล้วใช้ความเป็นฟังก์ชันคู่ของ p ได้

$$p(x + y) + p(x - y) = 2p(y)g(x) \qquad (2.4.7)$$

เมื่อเปรียบเทียบ (2.4.6) กับ (2.4.7) พบว่า

$$p(x)g(y) = p(y)g(x) \qquad (2.4.8)$$

แทนค่า y = 0 ใน (2.4.8) ได้ p(x) = kg(x) เมื่อ k = p(0) (เราทราบว่า g(0) = 1)

ถ้า $k \neq 0$ แล้วแทน p(x) = kg(x) ลงใน (2.4.7) ได้

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y)$$

ซึ่งคือสมการเดอเลมเบอร์ต เมื่อใช้ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเตอเลมเบอร์ต ได้ว่า

$$g(x) = \cos(cx) \quad \text{หรือ} \quad g(x) = \cosh(cx)$$

(ในที่นี้ g ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ เพราะ g(0) = 1) ในกรณีนี้ p(x) ไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์

- ถ้า p(x) และ q(x) เป็นฟังก์ชันศูนย์พร้อมกัน แล้ว f(x) เป็นฟังก์ชันศูนย์ ในขณะที่ g(x) เป็นฟังก์ชันใด ๆ ได้
- ถ้า p(x) ไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์ แต่ q(x) เป็นฟังก์ชันศูนย์ แล้ว f(x) = p(x) = cg(x) และในกรณีนี้เช่นที่พบข้างต้น g(x) = cos(cx) หรือ g(x) = cosh(cx)

เราเหลือต้องพิจารณากรณี **p(x) และ q(x) ทั้งคู่ไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์** ในกรณีนี้ มีจำนวนจริง b ที่ทำให้ $q(b) \neq 0$ เมื่อลบ (2.4.5) จาก (2.4.4) ได้

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x)g(y) \qquad (2.4.9)$$

เมื่อสลับ x กับ y ใน (2.4.9) และใช้ความเป็นฟังก์ชันคี่ของ q ได้ว่า

$$q(x + y) - q(x - y) = 2q(y)g(x) \qquad (2.4.10)$$

เมื่อลบ (2.4.9) จาก (2.4.10) ได้

$$q(x - y) = q(x)g(y) - q(y)g(x) \qquad (2.4.11)$$

แทนค่า y = b ใน (2.4.11) แล้วแก้หา g(x) ได้

$$g(x) = \frac{g(b)q(x) - q(x - b)}{q(b)} \qquad (2.4.12)$$

ถ้าใช้ (2.4.10) แล้วจะได้สมการเชิงฟังก์ชันสำหรับ g(x) :

$$g(x + y) + g(x - y) = 2g(x)g(y) \qquad (2.4.13)$$

ซึ่งคือสมการเดอเลมเบอร์ด เนื่องจาก g(0) = 1 จึงได้จากทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเดอเลมเบอร์ดว่า

$$g(x) = \cos(c_2x) \quad \text{หรือ} \quad g(x) = \cosh(c_2x)$$

ถ้า $c_2 = 0$ แล้ว $g(x) \equiv 1$ เมื่อแทนสิ่งนี้ลงใน (2.4.11) ได้

$$q(x - y) = q(x) - q(y) \qquad (2.4.14)$$

ซึ่งคือสมการโคชี โดยมีคำตอบเป็น $q(x) = c_3x$

ถ้า $c_2 \neq 0$ แล้ว เราต้องแก้สมการ

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x)\cos(c_2y) \qquad (2.4.15)$$

หรือ

$$q(x + y) + q(x - y) = 2q(x)\cosh(c_2y) \qquad (2.4.16)$$

ภายใต้เงื่อนไขที่ว่า q เป็นฟังก์ชันคี่

พิจารณาโจทย์ที่กว้างขึ้น คือการหาฟังก์ชันคี่ f ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)h(y) \qquad (2.4.17)$$

เมื่อ h เป็นฟังก์ชันคู่ที่ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว ที่กำหนดมาให้

เลือกจำนวนจริง r ที่มีสมบัติว่า $h(x - 2r) \neq h(x)$

ให้ f_p เป็นฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันหนึ่งของ (2.4.17) และ f เป็นฟังก์ชันคำตอบทั่วไป

เลือกค่าคงตัว A, B ที่ทั้งคู่ไม่เป็นศูนย์ และทำให้

$$Af_p(r) + Bf(r) = 0$$

นิยาม $F(x) := Af_p(x) + Bf(x)$

เพื่อว่า $F(r) = 0$

สังเกตด้วยว่า F เป็นฟังก์ชันคี่

สลับ x กับ y ใน (2.4.17) ได้ $f(x + y) - f(x - y) = 2f(y)h(x) \qquad (2.4.18)$

เมื่อลบ (2.4.18) จาก (2.4.17) ได้

$$f(x - y) = f(x)h(y) - f(y)h(x) \qquad (2.4.19)$$

เนื่องจาก f_p เป็นคำตอบหนึ่งของ (2.4.17) ดังนั้น มันสอดคล้องกับ (2.4.19) ด้วยเช่นกัน ทำให้ได้ว่า F สอดคล้องกับ (2.4.19) และให้ว่า

$$F(x - y) = F(x)h(y) - F(y)h(x) \qquad (2.4.20)$$

เราจะแสดงว่า F ต้องเป็นฟังก์ชันศูนย์

สมมุติว่ามีจำนวนจริง s ที่ทำให้ $F(s) \neq 0$ แทนค่า y = s ใน (2.4.20) แล้วแก้หา h จะได้

$$h(x) = \frac{h(s)F(x) - F(x - s)}{F(s)} \qquad (2.4.21)$$

แทนค่า x = s, y = r ใน (2.4.20) ได้

$$F(s - r) = F(s)h(r) \quad (\text{เพราะว่า } F(r) = 0)$$

แทนค่า y = -r ใน (2.4.20) และใช้ความจริงที่ว่า h เป็นฟังก์ชันคู่ ได้

$$F(x + r) = F(x)h(r)$$

ดังนั้น

$$F(s) = F(s - r + r) = F(s - r)h(r) = F(s)(h(r))^2$$

จาก $F(s) \neq 0$ ได้ว่า $(h(r))^2 = 1$ ซึ่งให้ว่า

$$F(x - 2r) = F(x - r)h(r) = F(x)(h(r))^2 = F(x)$$

จาก (2.4.21) ได้ $h(x - 2r) = h(x)$

ซึ่งขัดแย้งกับการเลือก r จึงสรุปได้ว่า F(x) เป็นฟังก์ชันศูนย์

ถ้า $f_p(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันศูนย์ แล้ว $B \neq 0$ และเราได้ว่า $f(x) = -Af_p(x)/B$
เป็นฟังก์ชันคำตอบทั่วไปของ (2.4.17)

ในกรณีของสมการ (2.4.15) เราอาจใช้ $f_p(x) = \sin(c_4x)$ และได้ $f(x) = c_5\sin(c_4x)$ เป็นคำตอบทั่วไปของ (2.4.15) ในทำนองเดียวกัน หากใช้ $f_p(x) = \sinh(c_4x)$ เป็นคำตอบหนึ่งของ (2.4.16) จะได้
$f(x) = c_5\sinh(c_4x)$ เป็นคำตอบทั่วไปของ (2.4.16)

สรุปได้ว่า ฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชัน (2.4.1.1) คือ

(i) $f(x) = c_1\cos(c_2x) + c_3\sin(c_2x)$, $g(x) = \cos(c_2x)$ หรือ

(ii) $f(x) = c_1\cosh(c_2x) + c_3\sinh(c_2x)$, $g(x) = \cosh(c_2x)$ หรือ

(iii) $f(x) = c_1 + c_2x$, $g(x) \equiv 1$ หรือ

(iv) $f(x) \equiv 0$, g เป็นฟังก์ชันใด ๆ

แบบฝึกหัด

1. จงหาฟังก์ชัน $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า ทุกจำนวนจริง x,y ใดๆ

$$f(x+y) = f(x)g(y) + h(y)$$

2. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(xy+1)$$

3. จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า ทุกจำนวนจริง x,y ใดๆ

$$f(x+y) + g(x-y) = 2h(x) + 2h(y)$$

4. จงแสดงว่า f ,h ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ และเป็นฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x+y) - f(x-y) = 2h(x)h(y)$$

คือฟังก์ชันที่นิยามโดย

$h(x) \equiv 0$	$f(x) \equiv k$
$h(x) = ax$	$f(x) = \left(\frac{a^2}{2}\right)x^2 + k$
$h(x) = a\sin(bx)$	$f(x) = 2a^2\sin^2(\frac{bx}{2}) + k$
$h(x) = a\sinh(bx)$	$f(x) = 2a^2\sinh^2(\frac{bx}{2}) + k$

บทที่ 3

สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเต็ม

3.1 โดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ หรือเซตของจำนวนเต็มไม่ติดลบ

สมการเชิงฟังก์ชันที่จะพิจารณาในหัวข้อนี้ คือสมการที่ฟังก์ชันคำตอบมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนนับ (ซึ่งคือจำนวนเต็มบวก) หรือจำนวนเต็มไม่ติดลบ จำนวนนับมีสมบัติที่สำคัญหลายประการ ซึ่งสามารถนำมาช่วยในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันได้ สมบัติเหล่านี้ ได้แก่

(ส1) สมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ

(ส2) สมบัติไตรวิภาค กล่าวคือ จากจำนวนนับสองจำนวน สามารถจำแนกได้ว่าจำนวนทั้งสอง เท่ากัน หรือถ้าไม่เท่ากัน จำนวนใดมากกว่า หรือน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งได้ .

(ส3) สมบัติการแยกตัวประกอบได้หนึ่งเดียวเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ กล่าวคือ เมื่อ n เป็นจำนวนนับแล้ว n สามารถเขียนได้ในรูป $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ เมื่อ $p_1,p_2,...,p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ เป็นจำนวนนับ

(ส4) สมบัติการใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ (ดังได้แสดงมาแล้วบ้างในบทที่ 2)

(ส5) สมบัติการจัดอันดับดี (well-ordering) ซึ่งกล่าวว่า "ในเซตย่อยของจำนวนนับใดๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะมีจำนวนนับที่มีค่าน้อยสุดเสมอ" เช่น 1 เป็นจำนวนนับที่มีค่าน้อยที่สุดใน $\mathbb{N}$ หรือ 11 จำนวนนับที่มีค่าน้อยที่สุดในเซตของจำนวนเฉพาะที่มีสองหลัก

ในคณิตศาสตร์ระดับสูงขึ้น สามารถพิสูจน์ได้ว่าสมบัติการจัดอันดับดี และสมบัติการใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ มีความสมมูลต่อกัน (equivalent)

สมบัติในกลุ่มต่อไปเป็นสมบัติเชิงทฤษฎีจำนวน ที่เกี่ยวข้องกับจำนวนนับ

(ส6) สมบัติการมีขั้นตอนวิธีของการหาร กล่าวคือ เมื่อ k เป็นจำนวนนับ แล้ว จำนวนนับ n สามารถเขียนได้ในรูป $n = ak + r$ เมื่อ $a \in \mathbb{N}_0, 0 \leq r \leq k-1$

(ส7) สมบัติการเขียนได้ในรูปเลขฐาน กล่าวคือ ถ้า b (จำนวนฐาน) เป็นจำนวนนับที่มีค่า ≥ 2 แล้ว จำนวนนับ n ใด ๆ สามารถเขียนได้หนึ่งเดียวในรูป $n = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_kb^k$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ, $a_0,\ldots,a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$, $a_k \neq 0$

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการใช้สมบัติข้างต้นในการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน เริ่มด้วยตัวอย่างแบบง่าย ที่ใช้การแทนค่า เพื่อลดจำนวนตัวแปร แล้วใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์ $f(1) = 1$ และ

$$f(m + n) = f(m) + f(n) + mn$$

วิธีทำ แทนค่า $n = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(m + 1) = f(m) + m + 1$$

เมื่อใช้สมการนี้ พร้อมด้วยค่าเริ่มต้น $f(1) = 1$ ควบคู่กับการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ พบว่า

$$f(m) = \frac{m(m+1)}{2}$$

ซึ่งตรวจคำตอบได้โดยง่ายว่าเป็นคำตอบที่แท้จริง

ตัวอย่างต่อไปใช้สมบัติการจัดอันดับดีของจำนวนนับ และอสมการ

ตัวอย่าง 3.1.2 (Canadian MO 1969) ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติดังนี้

1. มีโดเมนเป็นจำนวนนับ
2. มีเรนจ์เป็นจำนวนเต็ม
3. $f(2) = 2$
4. $f(mn) = f(m)f(n)$ สำหรับทุกจำนวนนับ m, n
5. $f(m) > f(n)$ เมื่อ $m > n$

จงแสดงว่า $f(n) = n$

วิธีทำ **(วิธีที่ 1)** สังเกตว่าจากเงื่อนไขข้อ 2, 3, 4 และ 5. ได้

$$2 = f(2) = f(1.2) = f(1)f(2) = f(1).2$$

ดังนั้น $f(1) = 1$ นอกจากนี้

$$f(2^2) = f(2.2) = f(2)f(2) = 2.2 = 2^2, \quad f(2^3) = f(2.2^2) = f(2)f(2^2) = 2.2^2 = 2^3, \ldots$$

นั่นคือ $f(2^k) = 2^k$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots$

พิจารณาลำดับของจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่างจำนวนที่เป็นกำลังของ 2 ที่อยู่ถัดกัน

$$2^k < 2^k+1 < 2^k+2 < \ldots < 2^k+2^k - 1 = 2^{k+1} - 1 < 2^{k+1}$$

โดยเงื่อนไขข้อ 5. ได้

$$2^k = f(2^k) < f(2^k+1) < f(2^k+2) < \ldots < f(2^{k+1} - 1) = f(2^{k+1}) < 2^{k+1}$$

ดังนั้นระหว่าง 2^k และ 2^{k+1} มีจำนวนเต็ม $2^k - 1$ จำนวน ที่เป็นค่าของ $f(2^k + j)$ เมื่อ $j = 1,2,\ldots,2^k - 1$

เนื่องจากมีจำนวนเต็ม $2^{k+1} - 2^k - 1 = 2^k - 1$ จำนวนที่อยู่ระหว่าง 2^k และ 2^{k+1} จึงสรุปได้ว่า $f(2^k+j) = 2^k+j$

(วิธีที่ 2) เช่นเดียวกันกับวิธีที่ 1 สังเกตก่อนอื่นว่า

$$f(2^k) = 2^k \text{ เมื่อ } k = 0, 1, 2,\ldots$$

จากเงื่อนไขข้อ 2 และ 5 ได้ว่า

$$f(m+1) \geq f(m) + 1 \geq f(m-1) + 2 \geq \ldots \geq f(1) + m = m + 1$$

ซึ่งชี้ด้วยว่า

$$\text{ถ้า } f(m) > m \text{ แล้ว } f(m+k) > f(m) + k \quad (k = 0, 1, 2,\ldots)$$

ต่อไป จะแสดงว่าไม่มีจำนวนนับ n ใดที่มีค่า $f(n) > n$

สมมุติว่ามีจำนวนนับ n ดังกล่าว พิจารณาจำนวนที่เป็นกำลังของ 2 ที่มากกว่า n

นั่นคือ จำนวน 2^m ที่ $k = 2^m - n > 0$

ดังนั้น

$$2^m = f(2^m) = f(n + 2^m - n) \geq f(n) + 2^m - n > n + 2^m - n = 2^m$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

(วิธีที่ 3) ใช้การอุปนัย กรณี $k = 1$ จากข้อสังเกตเช่นข้างต้นได้ $f(1) = 1$

สมมุติว่า $f(k) = k$ สำหรับ $k = 1, 2,\ldots, n$ เราจะแสดงว่า $f(n+1) = n+1$

ถ้า $n+1 = 2j$ แล้ว

$$1 \leq j < n \text{ และ } f(n+1) = f(2j) = f(2)f(j) = 2j = n+1$$

ถ้า $n+1 = 2j+1$ แล้ว

$$1 \leq j < n \quad \text{และ} \quad 2j = f(2j) < f(2j+1) < f(2j+2) = f(2(j+1)) = f(2)f(j+1) = 2(j+1) = 2j+2$$

ดังนั้น

$$2j < f(2j + 1) < 2j + 2$$

แสดงว่า

$$f(2j+1) = 2j + 1 = n +1$$

ตัวอย่าง 3.1.3 ให้ $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x - 10 & \text{เมื่อ } x > 100 \\ f(f(x + 11)) & \text{เมื่อ } x \leq 100 \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 91$ สำหรับทุก $x \leq 100$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ แสดงการใช้วิธีการที่เรียกว่า การอุปนัยถอยหลัง หรือย้อนกลับ

สังเกตว่า เมื่อ $n = 90, 91, \ldots, 100$ แล้ว $n + 11 > 100$ สำหรับค่า n เหล่านี้ เมื่อแทนค่าในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(n + 11) = (n + 11) - 10 = n + 1$$

สำหรับค่า n เหล่านี้ เนื่องจาก $90 \leq n \leq 100$ โดยสมการเชิงฟังก์ชัน ร่วมกับข้อมูลที่ได้ล่าสุด พบว่า

$$f(n) = f(f(n + 11)) = f(n + 1)$$

เพราะฉะนั้นจาก

$$f(101) = 101 - 10 = 91$$

ได้ว่า

$$f(90) = f(91) = f(92) = \ldots = f(100) = f(101) = 91$$

ถ้ามีบาง $n \leq 89$ ที่ให้ค่า $f(n + 11) = 91$ แล้ว จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(n) = f(f(n + 11)) = f(91)$$

ซึ่งมีค่า 91 จากที่พบข้างต้น ซึ่งแสดงว่า ในการหาค่าของ f(n) เมื่อ $n \leq 89$ ให้กลับไปดูที่ค่าของ f(n + 11) ถ้าค่านี้เป็น 91 แล้ว จะได้ว่า f(n) = 91 ด้วย

นอกจากนี้ ยังพบด้วยว่า ถ้าฟังก์ชันมีค่าเท่ากับ 91 สำหรับค่าของ n จำนวน 11 ค่าที่อยู่ถัดกัน แล้วไม่เพียงว่า f(n) มีค่า 91 แต่สมบัติของการมี 11 จำนวนถัดกันที่มีค่าฟังก์ชันเป็น 91 เป็นจริงด้วยสำหรับ n – 1 ซึ่งชี้ว่า

$$f(n - 1) = 91$$

ในทำนองเดียวกัน f(n – 2) = 91 ฯลฯ เนื่องจาก สิ่งนี้เป็นจริง ณ n = 89 ดังนั้น

$$f(n) = 91 \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } n \leq 89$$

ตัวอย่าง 3.1.4 (Japanese MO 1991) ให้ p, q เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนและเรนจ์เป็น $\mathbb{N}$ ที่นิยามโดย

$$p(1) = 2,\ p(2) = 3,\ p(3) = 4,\ p(4) = 1 \text{ และ } p(n) = n \text{ เมื่อ } n \geq 5$$

$$q(1) = 3,\ q(2) = 4,\ q(3) = 2,\ q(4) = 1 \text{ และ } q(n) = n \text{ เมื่อ } n \geq 5$$

(ก) จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ที่ $f(f(n)) = p(n) + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$

(ข) จงแสดงว่าไม่มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ใดที่ $f(f(n)) = q(n) + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$

วิธีทำ (ก) นิยาม f โดย f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 7, f(4) = 5, f(5) = 3 และ

$$f(n) = \begin{cases} n+3 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \geq 6 \\ n-1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \geq 7 \end{cases}$$

(ข) สมมุติว่ามีฟังก์ชัน f ดังกล่าวจริง ดังนั้น

$$f(f(3)) = q(3) + 2 = 4 \qquad (3.1.4.1)$$

$$f(f(4)) = q(4) + 2 = 3 \qquad (3.1.4.2)$$

จาก (3.1.4.1) ได้ $f(3) \neq 3$

ถ้า f(3) = 4 แล้วจาก (3.1.4.1) จะได้ f(4) = 4 ซึ่งจะขัดแย้งกับ (3.1.4.2)
ดังนั้นค่าของ f(3) ต้องไม่เป็น 3 และ 4

ถ้า f(3) = 1 แล้วจาก (3.1.4.1) จะได้ f(1) = 4 ทำให้ได้ว่า

$$f(4) = f(f(1)) = q(1) + 2 = 5$$

ดังนั้น (3.1.4.2) ให้ f(f(4)) = f(5) = 3

และได้ว่า

$$1 = f(3) = f(f(5)) = q(5) + 2 = 7$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น $f(3) \neq 1$

ถ้า $f(3) = 2$ แล้วจาก (3.1.4.1) ได้ $f(2) = 4$ ดังนั้น

$$f(4) = f(f(2)) = q(2) + 2 = 6$$

และโดย (3.1.4.2) $f(6) = f(f(4)) = 3$ ดังนั้น

$$2 = f(3) = f(f(6)) = q(6) + 2 = 8$$

เป็นข้อขัดแย้งเช่นกัน

ถ้า $f(3) = a \geq 5$ แล้ว (3.1.4.1) ให้ $4 = f(f(3)) = f(a)$ จากนี้

$$f(4) = f(f(a)) = q(a) + 2 = a + 2 \quad \text{และ} \quad f(a+2) = f(f(4)) = 3 \text{ โดย (3.1.4.2)}$$

เพราะฉะนั้น

$$a = f(3) = f(f(a+2)) = q(a+2) + 2 = a + 4$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

สรุปได้ว่าไม่มี f ดังกล่าวอยู่จริง

ตัวอย่าง 3.1.5 (Ukranian MO 1999) ให้ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n)) + f(n) = 2n \quad (n \geq 1)$$

จงพิสูจน์ว่า $f(n) = n \quad (n \in \mathbb{N})$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้แสดงการประยุกต์สมบัติสามประการได้แก่ สมบัติไดรวิภาค การใช้การอุปนัย และการจัดอันดับดีของ $\mathbb{N}$ ร่วมกับ สมบัติความเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ขั้นแรก จะแสดงว่าฟังก์ชันคำตอบต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ถ้า $f(m) = f(n)$ แล้ว $f(f(m)) = f(f(n))$

เมื่อแทนในสมการเชิงฟังก์ชันที่โจทย์กำหนดมาให้ ได้ว่า $2m=2n$

ดังนั้น $m = n$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งหมายความว่าแต่ละค่าของ $f(n)$ แตกต่างกัน

ขั้นที่สอง ตรวจสอบ ณ จุดเริ่มต้น

แทนค่า $n = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$f(f(1)) + f(1) = 2$$

เนื่องจากเรนจ์ คือ $\mathbb{N}$ ซึ่งมีสมบัติจัดอันดับได้ดี ดังนั้น

$$f(f(1)) = f(1) = 1$$

ขั้นที่สาม ใช้การอุปนัย เพื่อพิสูจน์ประพจน์ที่ว่า $f(n) = n \quad (n \geq 1)$

กรณี $n = 1$ ได้ตรวจแล้วในขั้นที่สอง

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับที่ < k
กล่าวคือสมมุติว่า $f(n) = n$ สำหรับทุกจำนวนนับ $n < k$ เราจะพิสูจน์ว่า $f(k) = k$

- ถ้า $f(k) < k$ แล้วโดยสมมุติฐานของการอุปนัย $f(f(k)) = f(k)$ ซึ่งขัดแย้งกับสมการเชิงฟังก์ชัน
- ถ้า $f(k) > k$ แล้วโดยความเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ร่วมกับสมมุติฐานของการอุปนัย ต้องได้ว่า

$$f(f(k)) \geq k$$

เมื่อใช้อสมการทั้งสองนี้กับนิพจน์ทางซ้ายมือของสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า

$$f(f(k)) + f(k) > k + k = 2k$$

ซึ่งขัดแย้งกับสมการเชิงฟังก์ชันที่โจทย์กำหนดมาให้
เพราะฉะนั้นต้องได้ว่า $f(k) = k$ เท่านั้น แสดงว่าประพจน์เป็นจริงโดยการอุปนัย

ตัวอย่าง 3.1.6 (Iranian MO 1996-1997) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ

$$f(n + 1) + f(n+3) = f(n+5)f(n+7) - 1375$$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ใช้สมบัติการจัดอันดับดี และ การหารลงตัวของจำนวนนับ
ให้ $a_k = f(2k - 1)$ และ $b_k = f(2k)$ ดังนั้น สมการเชิงฟังก์ชัน แยกเขียนได้เป็น

$$a_k + a_{k+1} = a_{k+2}a_{k+3} - 1375 \qquad (3.1.6.1)$$
$$b_k + b_{k+1} = b_{k+2}b_{k+3} - 1375 \qquad \text{เมื่อ } k \in \mathbb{N}$$

เปลี่ยนตัวแปร k ด้วย k + 1 ใน (3.1.6.1) และลบด้วย (3.1.6.1) ได้

$$a_{k+2} - a_k = a_{k+3}(a_{k+4} - a_{k+2})$$

เนื่องจาก $a_k \geq 2$ สมการล่าสุดให้ว่า $a_{k+2} = a_k$ สำหรับทุกจำนวนนับ k เพราะไม่เช่นนั้นแล้ว

$$| a_{k+2} - a_k | > | a_{k+4} - a_{k+2} | > | a_{k+6} - a_{k+4} | > \ldots > 0$$

เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนนับที่ลดลงโดยแท้
ซึ่งขัดแย้งกับความจริงที่ว่า $\mathbb{N}$ เป็นเซตจัดอันดับดี

แทนค่า k = 1 และใช้ความจริงที่เพิ่งค้นพบ ได้ว่า

$$a_1 + a_2 = a_1a_2 - 1375$$

ซึ่งชี้ว่า

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) = 1376$$

ถ้า t เป็นตัวหารของ 1376 แล้ว

$$a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 1 + t$$

ในขณะที่

$$a_2 = a_4 = a_6 = \ldots = 1 + \frac{1376}{t}$$

ข้อโต้แย้งเช่นข้างต้น ใช้ได้กับ b_i เช่นกัน ดังนั้น ฟังก์ชันคำตอบ คือ

$$f(4n-3) = 1+t_1,$$
$$f(4n-1) = 1+1376/t_1,$$
$$f(4n-2) = 1+t_2,$$
$$f(4n) = 1+1376/t_2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

เมื่อ t_1 , t_2 เป็นจำนวนนับที่เป็นตัวหารของ 1376

ตัวอย่าง 3.1.7 (Czech-Slovak MO 1998) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 168 \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.1.7.1}$$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ใช้วิธีการเปลี่ยนตัวแปร และสมบัติการจัดอันดับดีของเซตของจำนวนนับ

เปลี่ยนตัวแปร n ด้วย k และ k + 1 (ซึ่งเป็นการเปลี่ยนตัวแปรแบบหนึ่งต่อหนึ่ง) ได้

$$f(k) + f(k+1) = f(k+2)f(k+3) - 168$$
$$f(k+1) + f(k+2) = f(k+3).f(k+4) - 168$$

นำสมการที่สองลบด้วยสมการแรกได้

$$f(k+2) - f(k) = f(k+3)(f(k+4) - f(k+2)) \tag{3.1.7.2}$$

แทนค่า k = 1 ได้

$$f(3) - f(1) = f(4)(f(5) - f(3))$$

เปลี่ยนตัวแปร $k = 2m - 1$ ได้

$$f(2m+1) - f(2m-1) = f(2m+2)(f(2m+3) - f(2m+1)) \tag{3.1.7.3}$$

เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันคำตอบเป็นจำนวนนับที่มีค่ามากกว่า 1 สมการ (3.1.7.3) ชี้ว่า ค่าในลำดับ

$$| f(3) - f(1)| , \ | f(5) - f(3) | , \ \dots , \ | f(2m+1) - f(2m-1)| \ , \dots$$

ทุกค่าจะต้องเป็นจำนวนเต็มบวก หรือไม่ก็เป็นศูนย์ทั้งหมด

กรณีที่ทุกค่าเป็นจำนวนเต็มบวก สมการ (3.1.7.3) แสดงด้วยว่า

$$|f(3) - f(1)| = f(4)| f(5) - f(3) | > | f(5) - f(3) | > | f(7) - f(5) | > \dots$$

แสดงว่า

ลำดับ $|f(3) - f(1)| , \ | f(5) - f(3) | , \dots$ เป็นลำดับลดโดยแท้

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $\mathbb{N}$ เป็นเซตจัดอันดับดี

เพราะฉะนั้น ทุกค่าในลำดับนี้ต้องเป็นศูนย์ทั้งหมด ซึ่งให้ว่า

$$f(2m-1) = a \quad \text{สำหรับทุก } m \in \mathbb{N}$$

เมื่อ a เป็นจำนวนนับที่มีค่าคงตัว > 1

ในทำนองเดียวกัน ได้ว่า

$$f(2m) = b \text{ สำหรับทุก } m \in \mathbb{N} \text{ เมื่อ } b \text{ เป็นจำนวนนับที่มีค่าคงตัว} > 1$$

แทนค่า n = 1 ใน (3.1.7.1) จะได้

$$a + b = f(1) + f(2) = f(3)f(4) - 168 = ab - 168$$

ซึ่งให้

$$(a - 1)(b - 1) = 169 = 13^2$$

ดังนั้น ทางที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ

$$(a - 1, b - 1) = (1, 169), (13, 13), (169, 1)$$

ซึ่งให้

$$(a, b) = (2, 170), (14, 14), (170, 2)$$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \text{ คี่} \\ 170 & x \text{ คู่} \end{cases} \quad \text{หรือ} \quad f(x) = 14 \quad \text{หรือ} \quad f(x) = \begin{cases} 170 & x \text{ คี่} \\ 2 & x \text{ คู่} \end{cases}$$

ซึ่งตรวจคำตอบได้ว่าถูกต้อง

ตัวอย่างต่อไปแสดงการประยุกต์สมบัติการแยกตัวประกอบได้หนึ่งเดียวเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง 3.1.8 ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับ $f(2) = 2$ และสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(mn) = f(m)f(n) \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

จงแสดงว่าฟังก์ชันคำตอบมีเป็นจำนวนอนันต์

วิธีทำ จากสมการเชิงฟังก์ชันได้ว่า

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1)f(1)$$

ดังนั้น

$$f(1) = 1 \text{ หรือ } 0$$

แต่จากสมการเชิงฟังก์ชันได้ด้วยว่า

$$2 = f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2)f(1)$$

ดังนั้น f(1) = 1 เท่านั้น

เมื่อเขียนจำนวนนับ x > 1 ในรูปผลคูณหนึ่งเดียวของจำนวนเฉพาะ

$$x = p_1^{a_1} \ldots p_n^{a_n}$$

แล้วสมการเชิงฟังก์ชันให้ว่า

$$f(x) = f(p_1)^{a_1} \ldots f(p_n)^{a_n}$$

ดังนั้น การหาฟังก์ชันคำตอบ f เพียงพอที่จะพิจารณาค่าของฟังก์ชัน ณ แต่ละจำนวนเฉพาะ ค่า f(2) = 2 ได้รับการกำหนดมาให้แล้ว ดังนั้น จึงเหลือการหาค่าของฟังก์ชันบนจำนวนเฉพาะที่ไม่ใช่ 2 เนื่องจากไม่มีเงื่อนไขอื่นใดอีก จึงสามารถกำหนดค่า ณ จำนวนเฉพาะหนึ่ง ๆ ให้เป็นจำนวนใด ๆ ได้ แสดงว่าจำนวนของฟังก์ชันคำตอบมีเป็นอนันต์

ตัวอย่างต่อไปเป็นกรณีที่เรนจ์เป็นเซตจำกัดของจำนวนเต็มไม่ติดลบ

ตัวอย่าง 3.1.9 ให้ $S = \{0, 1, 2, \ldots, 1999\}$ จงหา $f : \mathbb{N}_0 \to S$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(s) = s$ สำหรับทุก $s \in S$

(ii) $f(m + n) = f(f(m) + f(n))$ สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}_0$

วิธีทำ สมมุติว่า $f(2000) = 2000 - t$,สำหรับบางค่า t ที่อยู่ในช่วง $1 \leq t \leq 2000$ เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยบน n ว่า

"$f(n) = f(n - t)$ สำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq 2000$"

เมื่อ $n = 2000$ ประพจน์นี้เป็นจริงโดยข้อสมมุติ เพราะ $200 - t \in S$

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริงที่ n

ดังนั้น โดยสมการเชิงฟังก์ชันและสมมุติฐานของการอุปนัยได้

$$f(n + 1) = f(f(n) + f(1)) = f(f(n - t) + f(1)) = f(n - t + 1)$$

แสดงว่าประพจน์เป็นจริงตามต้องการ

ในทำนองกลับกัน ให้ $c \in S$ เราจะแสดงว่ามีฟังก์ชันที่ต้องการ โดยที่ $f(2000) = c$

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติว่า

$$f(s) = s \text{ สำหรับทุก } s \in S \text{ ในขณะที่ } f(n) = f(n - t) \text{ เมื่อ } t = 2000 - c$$

เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยบน $m + n$ ว่า เงื่อนไข (ii) เป็นจริง

ถ้า $m + n \leq 2000$ แล้ว $m, n \in S$ แสดงว่าเงื่อนไข (ii) เป็นจริงอย่างชัดเจน

ถ้า $m + n > 2000$ แล้ว ในกรณีที่ $m, n \in S$ เงื่อนไข (ii) เป็นจริงอย่างชัดเจน

ในกรณีที่เหลือ สมมุติโดยไม่เสียนัยทั่วไปได้ว่า $n \geq 2000$

ดังนั้น

$$f(m + n) = f(m + n - t) = f(f(m) + f(n - t)) = f(f(m) + f(n))$$

โดยที่การเท่ากันครั้งแรกและครั้งสุดท้าย มาจากนิยามความเป็นคาบของ f ส่วนการเท่ากันครั้งที่สองมาจากสมมุติฐานของการอุปนัย นอกจากนี้ยังพบด้วยว่ามีฟังก์ชันที่ใช้ได้ทั้งหมด 2000 ฟังก์ชันพอดี

ตัวอย่าง 3.1.10 (Irish MO 1999) กำหนดให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

(1) $f(ab) = f(a)f(b)$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนนับที่เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน

(2) $f(p + q) = f(p) + f(q)$ สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p และ q

จงแสดงว่า $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ และ $f(1999) = 1999$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ใช้การแทนค่า และสมบัติของจำนวนเฉพาะ

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จากเงื่อนไขข้อ (2) ได้

$$f(2p) = f(p + p) = f(p) + f(p) = 2f(p)$$

แต่โดยเงื่อนไขข้อ (1) ได้

$$f(2p) = f(2)f(p)$$

เนื่องจากเรนจ์เป็นเซตของจำนวนนับ ดังนั้น $f(2) = 2$

เมื่อใช้ค่าที่พบนี้หาค่าเพิ่มเติมได้

$f(4) = f(2 + 2) = f(2) + f(2) = 2 + 2 = 4$

$f(5) = f(3) + f(2) = f(3) + 2$

$f(7) = f(5 + 2) = f(5) + f(2) = f(3) + 4$

$f(12) = f(4\cdot3) = f(4)f(3) = 4f(3),$

$f(12) = f(7 + 5) = f(7) + f(5) = 2f(3) + 6$

เทียบค่าของ f(12) ได้

$$4f(3) = 2f(3) + 6$$

ดังนั้น $f(3) = 3$

เมื่อแทนค่าในสมการอื่นได้

$$f(5) = 5,\ f(7) = 7$$

จาก

$$f(14) = f(2\cdot7) = f(2)f(7) = 14,\ \ f(14) = f(3 + 11) = f(3) + f(11) = 3 + f(11)$$

ซึ่งให้ $f(11) = 11$ และ

$$f(13) = f(11 + 2) = f(11) + f(2) = 11 + 2 = 13$$

จาก

$$f(2002) = f(1999 + 3) = f(1999) + f(3) \qquad \text{(เพราะ 1999 เป็นจำนวนเฉพาะ)}$$
$$= f(1999) + 3$$

และ

$$f(2002) = f(2\cdot7\cdot11\cdot13\ ) = f(2)f(7)f(11)f(13) = 2\cdot7\cdot11\cdot13 \qquad \text{(โดยใช้เงื่อนไขข้อ (1) ซ้ำ ๆ)}$$
$$= 2002$$

เมื่อแทนค่ากลับ ได้

$$f(1999) = 1999$$

ตัวอย่าง 3.1.11 (Czech-Slovak MO 1996) จงหาค่า k ที่ทำให้มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(i) $f(1995) = 1996$

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y) + k\, f(D(x,y))$ $\qquad (x, y \in \mathbb{N})$

เมื่อ D(x,y) คือตัวหารร่วมมากของ x และ y

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ใช้การเปลี่ยนตัวแปร สมบัติว่าด้วยตัวหารร่วมมาก และสมบัติการแยกตัวประกอบหนึ่งเดียวเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของจำนวนนับ

แทน x = y ใน (ii) ได้ว่า

$$f(x^2) = (k+2)f(x)$$

ใช้ความสัมพันธ์นี้ซ้ำจะได้

$$f(x^4) = (k+2)f(x^2) = (k+2)^2 f(x)$$

แทน $y = x^3$ จากนั้นแทน $y = x^2$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน แล้วใช้ค่าของ $f(x^2)$ ที่ได้รับข้างต้น พบว่า

$$f(x^4) = f(x) + f(x^3) + k\,f(x) = (k+1)f(x) + f(x.x^2) = (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + k\,f(x)$$
$$= (2k+2)f(x) + f(x^2) = (3k+4)f(x)$$

จาก (i) $f(1995) \neq 0$ แทนค่าสองแบบของ $f(x^4)$ ที่พบข้างต้นได้ว่า

$$(k+2)^2 f(1995) = f(1995^4) = (3k+4)f(1995)$$

นั่นคือ

$$(k+2)^2 = 3k+4 \text{ ได้ } k \in \{0, -1\}$$

- **กรณี k = -1**: สมการเชิงฟังก์ชันมีรูปเป็น

$$f(xy) = f(x) + f(y) - f(D(x,y)) \qquad (x, y \in \mathbb{N})$$

แทนค่า x = p, y = p เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(p^2) = f(p) + f(p) - f(p) = f(p)$$

เมื่อทำซ้ำ ๆ พบว่า

$$f(p^i) = f(p) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

แทนค่า $x = p^i$, $y = q^j$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกัน และ $i, j \in \mathbb{N}$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน แล้วใช้ค่าฟังก์ชัน ณ กำลังของจำนวนเฉพาะที่เพิ่งค้นพบ จะได้

$$f(p^i q^j) = f(p) + f(q) - f(1)$$

เมื่อทำซ้ำกับจำนวนเฉพาะสามจำนวน จะได้

$$f(p_1^i p_2^j p_3^k) = f(p_1) + f(p_2^j p_3^k) - f(1) = f(p_1) + f(p_2) + f(p_3) - 2f(1)$$

เมื่อเขียนสมาชิกในโดเมนหนึ่งเดียวในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะ

$$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$$

แล้วฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันมีรูปเป็น

$$f(x) = f(p_1) + f(p_2) + \ldots + f(p_n) - (n-1)f(1)$$

เนื่องจาก 1995 = 5·3·133 เงื่อนไขใน (i) เป็นจริงได้ถ้าเราให้ f(5) = 1996 และถ้าให้ f(1) = f(p) = 0 ทุกจำนวนเฉพาะ $p \neq 5$ ดังนั้น ค่า k = -1 เป็นคำตอบได้

- **กรณี k = 0**: สมการเชิงฟังก์ชันลดรูปเป็น

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

แทนค่า $x = y = 1$ ได้ $f(1) = 0$ แทนค่า $x = p$, $y = p$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(p^2) = f(p) + f(p) = 2f(p)$$

เมื่อทำซ้ำ ๆ พบว่า

$$f(p^i) = if(p) \qquad (i \in \mathbb{N})$$

แทนค่า $x = p^i$, $y = q^j$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกัน และ $i, j \in \mathbb{N}$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน แล้วใช้ค่าฟังก์ชัน ณ กำลังของจำนวนเฉพาะที่เพิ่งค้นพบ จะได้

$$f(p^iq^j) = if(p) + jf(q)$$

เมื่อเขียนสมาชิกในโดเมนหนึ่งเดียวในรูปของผลคูณของจำนวนเฉพาะ

$$x = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$$

แล้วฟังก์ชันคำดอบของสมการเชิงฟังก์ชันมีรูปเป็น

$$f(x) = \alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+ \ldots + \alpha_n f(p_n)$$

ถ้าให้ทุก $f(p_i) = 0$ ยกเว้น $f(5) = 1996$ ได้ว่าสมการเชิงฟังก์ชันและเงื่อนไขเป็นจริง
ดังนั้น $k = 0$ เป็นค่าที่ต้องการได้

จากทั้งสองกรณีได้ว่า $k = 0$ หรือ -1

ตัวอย่าง 3.1.12 (Canadian MO 1990) ให้ f เป็นฟังก์ชันที่โดเมนเป็น $\mathbb{N}$ และมีสมบัติว่า $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ และ

$$f(n+2) = f(n+2 - f(n+1)) + f(n+1 - f(n)) \qquad (n \geq 1)$$

1. จงแสดงว่า
   (ก) $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$
   (ข) ถ้า f(n) เป็นจำนวนคี่ แล้ว $f(n+1) = f(n) + 1$
2. จงหาค่าของ n ที่ทำให้ $f(n) = 2^{10} + 1$

วิธีทำ 1. (ก) แทนค่า $n = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ $f(3) = 2$

พิจารณาประพจน์ : $f(n+1) - f(n) \in \{0, 1\}$

จากค่า f(1), f(2), f(3) พบว่า ประพจน์นี้เป็นจริงเมื่อ $n = 1, 2$

สมมุติเพื่อการอุปนัยว่าประพจน์เป็นจริงเมื่อ $n = 1, 2, \ldots, m - 1$ $(m \geq 3)$ สำหรับ n เหล่านี้ ได้ว่า

$$f(n) \leq n \text{ และ}$$

$$\{(n+2) - f(n+1)\} - \{(n+1) - f(n)\} = 1 - \{f(n+1) - f(n)\} \in \{0, 1\}$$

ดังนั้นโดยสมมุติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$f(n+2 - f(n+1)) - f(n+1 - f(n)) \in \{0,1\} \qquad (3.1.12.1)$$

- **กรณีที่ 1 f(m) = f(m – 1) + 1**

จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$f(m+1) - f(m) = \{f(m+1 - f(m) + f(m - f(m-1))\} - \{f(m + f(m-1)) + f(m - 1 - f(m - 2))\}$$
$$= f(m+1 - f(m)) - f(m-1 - f(m-2))$$

แทนค่า f(m) = f(m-1) + 1 ในพจน์แรกทางขวามือ ให้ว่า

$$f(m+1) - f(m) = f(m - f(m - 1)) - f(m - 1 - f(m - 2))$$

ซึ่งมีค่า $\in \{0,1\}$ โดยการแทนค่า n + 2 = m ใน (3.1.12.1)

- **กรณีที่ 2 f(m) = f(m – 1)**

จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$f(m) = f(m - f(m - 1)) + f(m-1 - f(m-2))$$

และ

$$f(m-1) = f(m-1 - f(m-2)) + f(m - 2 - f(m - 3)$$

เมื่อเทียบ f(m) = f(m-1) พบว่า

$$f(m - f(m-1)) = f(m-2 - f(m-3))$$

จาก (3.1.12.1) ต้องได้ว่าค่าทั้งสองในสมการท้ายนี้เท่ากับ f(m – 1 – f(m – 2))

กลับไปที่สมการเชิงฟังก์ชันพบว่า

$$f(m+1) - f(m) = f(m+1 - f(m)) - f(m - 1 - f(m - 2))$$

เมื่อแทนค่า f(m – 1 – f(m – 2)) = f(m – f(m – 1)) จากที่ค้นพบ ในพจน์สุดท้ายทางขวามือ ได้

$$f(m+1) - f(m) = f(m +1 - f(m)) - f(m - f(m - 1)) \in \{0,1\} \quad (\text{โดย } (3.1.12.1))$$

สรุปได้ว่าประพจน์เป็นจริงเมื่อ n = m

ดังนั้น

1. (ก) เป็นจริงโดยการอุปนัย

1. (ข) พิจารณาประพจน์

"ถ้า f(n) เป็นจำนวนคี่ แล้ว f(n+1) = f(n) + 1"

กรณี n =1 พบว่าประพจน์เป็นจริง

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริงเมื่อ n = 1, 2, ... , m – 1

ถ้า f(m) เป็นคู่ แล้วไม่มีอะไรในประพจน์ที่ต้องพิสูจน์

จากสมมุติฐานของการอุปนัย ถ้า f(m-1) เป็นคี่ แล้ว f(m) = f(m-1) + 1 จะเป็นคู่

เพราะฉะนั้น ถ้า f(m) เป็นคี่ แล้ว f(m – 1) ต้องเป็นคู่

เมื่อใช้ประกอบกับข้อมูลในข้อ (ก) ได้ว่า

$$f(m) = f(m-1) + 1$$

จากสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m+1) = f(m+1-f(m)) + f(m-f(m-1)) = 2f(m-f(m-1))$$

ดังนั้น f(m+1) เป็นจำนวนคู่ และมีค่าเท่ากับ f(m)+1 โดยข้อ 1 (ก)

2. ก่อนอื่นสังเกตว่า จากข้อ 1(ก) และ 1(ข) f(n) เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด และ เมื่อเพิ่ม จะเพิ่มขึ้นครั้งละ 1 จากค่าเดิมเท่านั้น นอกจากนี้ ค่าของฟังก์ชัน จะต้องเพิ่มเป็นจำนวนอนันต์ครั้ง เพราะไม่เช่นนั้น ณ จุดหนึ่งเป็นต้นไป ค่าของฟังก์ชันจะเป็นค่าคงตัวตลอดไป ซึ่งเป็นไปไม่ได้ จากเงื่อนไขของสมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดให้

ต่อไปเราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยว่า

"สำหรับแต่ละจำนวนนับ $k \geq 2$, จำนวนนับ $n = 2^k$ เป็นคำตอบหนึ่งเดียวของสมการ $f(n) = 2^{k-1} + 1$"

กรณี $k = 2$ จาก $f(3) = 2$ และ $f(2^2) = f(4) = f(4-f(3)) + f(3-f(2)) = f(2) + f(1) = 3 = 2^{2-1} + 1$ และจากข้อ 1(ก), 1(ข) ได้ว่าไม่มีคำตอบอื่นอีกของสมการ $f(n) = 3$ แสดงว่ากรณีนี้ประพจน์เป็นจริง

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริง ณ $k = m \geq 2$
กล่าวคือ $n = 2^m$ เป็นคำตอบหนึ่งเดียวของ $f(n) = 2^{m-1} + 1$
จากข้อสังเกตในตอนต้น เนื่องจากฟังก์ชันมีค่าไม่ลด และเพิ่มเป็นจำนวนอนันต์ครั้ง โดยที่แต่ละครั้งเพิ่มด้วยค่า 1 ดังนั้น ต้องมีจำนวนนับ u ที่ทำให้

$$f(u) = 2^m + 1$$

และจากข้อ 1(ข) ต้องได้ว่า

$$f(u+1) = f(u) + 1 > f(u) > f(u-1)$$

เพราะฉะนั้นจำนวนนับ u เช่นว่านี้มีเพียงหนึ่งเดียว จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$2^m + 1 = f(u) = f(u-f(u-1)) + f(u-1-f(u-2)) \qquad (3.1.12.2)$$

จาก 1(ข) ได้ว่า

$$f(u-1) = 2^m$$

และจาก 1(ก) $u - f(u-1) - \{u-1-f(u-2)\}$ ต้องมีค่าเป็น 0 หรือ 1
ดังนั้น 1 (ก) ให้อีกว่า

ผลต่าง $f(u-f(u-1)) - f(u-1-f(u-2))$ มีค่า 0 หรือ 1 เท่านั้น

ถ้าผลต่างนี้เป็น 0 ค่าทางขวามือของสมการ (3.8) จะเป็นจำนวนคู่ ขัดแย้งกับค่าทางซ้ายมือ
ดังนั้น ผลต่างต้องเป็น 1 เท่านั้นเพราะฉะนั้น เมื่อใช้ร่วมกับ (3.8) จะได้

$$f(u-f(u-1)) = f(u-1-f(u-2)) + 1 = 2^{m-1} + 1$$

ซึ่งโดยสมมุติฐานของการอุปนัยชี้ว่า

$$u - f(u - 1) = 2^m$$

นั่นคือ

$$u = 2^m + f(u - 1) = 2^{m+1}$$

แสดงว่าประพจน์เป็นจริง เมื่อ k = m+1

จากประพจน์ที่พิสูจน์ข้างต้น สรุปได้ว่า ค่าของ n ที่สอดคล้องกับสมการ $f(n) = 2^{10} + 1$ คือ $n = 2^{11}$

ตัวอย่าง 3.1.13 ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(1) = 1, \quad f(2k) = 2f(k) - 1 \quad \text{และ} \quad f(2k + 1) = 2f(k) + 1$$

เมื่อเขียนจำนวนนับ a ในรูปฐานสองเป็น

$$a = a_n2^n + a_{n-1}2^{n-1} + \ldots + a_12 + a_0 := a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0$$

แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$f(a) = b_n2^n + b_{n-1}2^{n-1} + \ldots + b_12 + b_0 \qquad \text{เมื่อ} \quad b_i = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } a_i = 1 \\ -1 & \text{ถ้า } a_i = 0 \end{cases}$$

วิธีทำ เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยบนจำนวนหลักของ a ที่เขียนอยู่ในรูปฐานสอง

กรณีที่ a มีหลักเดียว ดังนั้น a = 1

จากสมมุติฐานได้ว่า f(1) = 1 นั่นคือ สิ่งที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง

ต่อไปสมมุติว่า ข้อสรุปเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับที่ มีจำนวนหลักน้อยกว่า k + 1

พิจารณาจำนวนนับ a ที่เขียนในรูปฐานสองแล้วมี k + 1 หลัก

$$a = a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1a_0$$

ถ้า $a_0 = 0$ แล้ว $a = 2(a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1)$ และโดยสมการเชิงฟังก์ชัน ร่วมกับสมมุติฐานของการอุปนัยได้

$$f(a) = 2f(a_ka_{k-1}\ldots a_1) - 1 = 2(b_k2^{k-1} + b_{n-1}2^{k-2} + \ldots + b_1) - 1 = b_k2^k + b_{k-1}2^{k-1} + \ldots + b_12 + b_0$$

แสดงว่า f(n) มีรูปแบบตามต้องการ

ถ้า $a_0 = 1$ แล้ว $a = 2(a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1) + 1$ และโดยสมการเชิงฟังก์ชันร่วมกับสมมุติฐานของการอุปนัยได้

$$f(a) = 2f(a_ka_{k-1}\ldots a_1) + 1 = 2(b_k2^{k-1} + b_{n-1}2^{k-2} + \ldots + b_1) + 1 = b_k2^k + b_{k-1}2^{k-1} + \ldots + b_12 + b_0$$

แสดงว่า f(n) มีรูปแบบตามต้องการ

ตัวอย่างต่อไปแสดงการใช้สมบัติเชิงทฤษฎีจำนวนที่สำคัญสมบัติหนึ่ง ซึ่งกล่าวว่า จำนวนนับทุกจำนวนสามารถเขียนได้เป็นผลบวกของจำนวนกำลังสองสมบูรณ์สี่จำนวน (ขอละการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ในที่นี้ สามารถหาข้อมูลเพิ่มได้ที่ Redmond หน้า 324)

ตัวอย่าง 3.1.14 (German MC) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(a)f(b)f(c)f(d) = f(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{N}_0)$$

วิธีทำ แทนค่า $a = b = c = d = 0$ ได้ $f(0)^4 = f(0)$ ดังนั้น $f(0) = 0$ หรือ 1

- **กรณีที่** 1: $f(0) = 0$ เราจะแสดงโดยการอุปนัยว่า

" $f(n) = 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็มไม่ติดลบ n"

ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, 2$ หรือ 3 แล้ว จะต้องมีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนจาก a, b, c, d ที่มีค่าเป็น 0 ดังนั้น

$$f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 0$$

สมมุติว่า

$$0 = f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = \ldots = f(n-1)$$

โดยทฤษฎีบทที่กล่าวว่า ทุกจำนวนนับเขียนได้เป็นผลบวกของกำลังสองของจำนวนนับสี่จำนวน ถ้า $1 < n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ แล้ว จะต้องมีจำนวนหนึ่งจาก a,b,c,d ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์และน้อยกว่าเท่ากับ $n - 1$ จากสมการเชิงฟังก์ชันและสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ทันทีว่า

$$f(n) = f(a)f(b)f(c)f(d) = 0$$

- **กรณีที่ 2**: $f(0) = 1$ ให้ $f(1) = a$ ดังนั้น จากสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(2) = f(1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2) = f(1)f(1)f(0)f(0) = a^2,$$

$$f(3) = f(1 + 1 + 1 + 0) = a^3 \text{ และ } f(4) = f(1 + 1 + 1 + 1) = a^4$$

เนื่องจาก $4 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2$ ได้ว่า

$$a^4 = f(4) = f(2)f(0)f(0)f(0) = a^2$$

ดังนั้น $a = 0, 1$ หรือ -1

กรณีย่อย 2.1 $f(1) = a = 0$: โดยข้อโต้แย้งเช่นข้างต้นได้ว่า

$f(n) = 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 1$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันคำตอบคือ $f(0) = 1$, $f(n) = 0$ $(n \geq 1)$

กรณีย่อย 2.2 $f(1) = a = 1$: โดยข้อโต้แย้งเช่นข้างต้นได้ว่า

$f(n) = 1$ สำหรับทุกจำนวนเต็มไม่ติดลบ

กรณีย่อย 2.3 $f(1) = a = -1$:

โดยข้อโต้แย้งเช่นข้างต้น เนื่องจากผลบวกของกำลังสองจำนวนคี่จำนวนมีค่าเป็นคี่ และผลบวกของกำลังสองจำนวนคู่จำนวนมีค่าเป็นคู่ ดังนั้นจะได้ว่า

$$f(n) = (-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

ตัวอย่าง 3.1.15 (Iranian MO 1999-2000) จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

1. $f(m) = 1$ ก็ต่อเมื่อ $m = 1$
2. ถ้า $d = (m, n)$ แล้ว $f(mn) = \frac{f(m)f(n)}{f(d)}$
3. สำหรับทุกจำนวนนับ m ต้องมีว่า

$$f^{2000}(m) := f(f(\ldots f(m)\ldots)) = m$$

เมื่อฟังก์ชันประกอบดังกล่าวกระทำซ้ำ 2000 ครั้ง

วิธีทำ ส่วนแรก (ซึ่งขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่าน) คือการแสดงโดยการอุปนัยบนจำนวนนับ k และ n ว่า

$$f(n^k) = f(n)$$

จากนั้นใช้ผลนี้ ร่วมกับเงื่อนไขข้อ 1, 2 จะได้ว่า

$$f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}) = f(p_1)f(p_2)\ldots f(p_k)$$

เมื่อบรรดา p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ α_k เป็นจำนวนเต็มบวก
โดยเงื่อนไขข้อ 2 ถ้า $m \mid n$ แล้ว $f(m) \mid f(n)$

ให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน เราจะแสดงว่า f(p) หาร f(q) ไม่ลงตัว
ถ้า $f(p) \mid f(q)$ แล้ว จากข้อสังเกตข้างต้น และเงื่อนไขข้อ 2 ได้ว่า

$$f(f(pq)) = f(f(p)f(q)) = \frac{f(f(p))f(f(q))}{f(f(p))} = f(f(q))$$

ใช้ความสัมพันธ์นี้ซ้ำ ๆ ร่วมกับ เงื่อนไขข้อ 3 ได้ว่า

$$pq = f^{2000}(pq) = f^{2000}(q) = q$$

ทำให้ได้ $p = 1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แสดงว่า สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ $p \neq q$ ต้องมีว่า $f(p) \nmid f(q)$

ต่อไปจะแสดงว่า เมื่อ $n > 1$ ถ้าค่าของ f(n) เป็นกำลังของจำนวนเฉพาะแล้ว n ก็เป็นกำลังของจำนวนเฉพาะเช่นกัน (อาจเป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกัน หรือตัวเดียวกันก็ได้)
สมมุติเพื่อหาข้อขัดแย้งว่า f(n) มีค่าเป็นกำลังของจำนวนเฉพาะ แต่ n ไม่เป็นกำลังของจำนวนเฉพาะตัวเดียวกัน
นั่นคือ มีจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน q และ r ที่ $qr \mid n$
ให้ $f(n) = p^a$ โดยเงื่อนไขข้อ 2 ได้

$$f(q)f(r) \mid p^a$$

แสดงว่า ทั้ง f(q) และ f(r) เป็นกำลังของ p
แสดงว่า $f(q) \mid f(r)$ หรือ $f(r) \mid f(q)$ ขัดแย้งกับข้างต้น

ให้ $b = f^{1999}(p)$ ดังนั้น $f(b) = f^{2000}(p) = p$ โดยสิ่งที่เพิ่งค้นพบ ได้ว่า b เป็นกำลังของจำนวนเฉพาะ
ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$f^{1998}(p),\ f^{1997}(p),\ \ldots,\ f(p) \quad \text{เป็นกำลังของจำนวนเฉพาะ}$$

ดังนั้น กล่าวได้ว่า f(p) แต่ละค่าที่เป็นไปได้ คือการเรียงสับเปลี่ยนของกำลังของจำนวนเฉพาะในรูป $p_k^{\alpha_k}$ เพราะ

$$f^{2000}(p^{\alpha}) = p^{\alpha} \text{ สำหรับทุกจำนวนเฉพาะ } p$$

ตัวอย่าง 3.1.16 (IMO 1988) ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(1) = 1,\ f(3) = 3,\ f(2n) = f(n),$$

$$f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n) \text{ และ } f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$$

จงหาว่าจะมีจำนวนนับ n กี่จำนวนที่ $f(n) = n$ โดยที่ $1 \leq n \leq 1988$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ใช้การแทนค่า และการประยุกต์สมบัติการเขียนได้ในรูปเลขฐานและใช้การอุปนัย

ขั้นแรกเราพิจารณาค่าของฟังก์ชันบนจำนวนนับบางส่วนก่อน

$f(1) = 1$, $f(2) = f(1) = 1$, $f(3) = 3$,

$f(4) = f(2) = 1$, $f(5) = 2f(3) - f(1) = 6 - 1 = 5$, $f(6) = f(3) = 3$,

$f(7) = 3f(3) - 2f(1) = 9 - 2 = 7$, $f(8) = f(4) = 1$, $f(9) = 2f(5) - f(2) = 10 - 1 = 9$,

$f(10) = f(5) = 5$, $f(11) = 3f(5) - 2f(2) = 15 - 2 = 13$, $f(12) = f(6) = 3$,

$f(13) = 2f(7) - f(3) = 14 - 3 = 11$, $f(14) = f(7) = 7$, $f(15) = 3f(7) - 2f(3) = 21 - 6 = 15$,

$f(16) = f(8) = 1$

เมื่อเขียนในรูปฐานสองจะได้ว่า

$f((1)_2) = 1 = (1)_2$, $f((10)_2) = f(2) = 1 = (01)_2$, $f((11)_2) = f(3) = 3 = (11)_2$,

$f((100)_2) = f(4) = 1 = (001)_2$, $f((101)_2) = f(5) = 5 = (101)_2$ $f((110)_2) = f(6) = 3 = (011)_2$,

$f((111)_2) = f(7) = 7 = (111)_2$, $f((1000)_2) = f(8) = 1 = (0001)_2$

ทำให้เดาลักษณะของฟังก์ชันได้คือ ถ้าเราเขียนจำนวนนับในรูปฐานสอง ค่าของฟังก์ชันหาได้โดยการเขียนหลักของเลขฐานสองใหม่โดยการเขียนผันกลับ กล่าวคือ

ถ้า

$$n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_k 2^k$$

โดยที่ k เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบ, $a_0,\ldots,a_k \in \{0,1\}$, $a_k \neq 0$ แล้ว

$$f(n) = a_k + a_{k-1} 2 + a_{k-2} 2^2 + \ldots + a_0 2^k$$

เราจะแสดงว่าประพจน์ดังกล่าวจริงโดยใช้การอุปนัย บนจำนวนหลักของเลขในฐานสอง

จาก $f((1)_2) = 1 = (1)_2$ ทำให้ได้ว่ากรณีเป็นเลขหนึ่งหลักเป็นจริง

ต่อไปสมมุติว่าประพจน์เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับที่จำนวนหลักเมื่อเขียนในรูปเลขฐานสองมี $\leq m$ หลัก กล่าวคือ สมมุติว่า

$$f(a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_k 2^k) = a_k + a_{k-1} 2 + a_{k-2} 2^2 + \ldots + a_0 2^k$$

สำหรับทุกจำนวนนับ $k < m$ แล้วเราจะพิสูจน์ว่า

$$f(a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_m 2^m) = a_m + a_{m-1} 2 + a_{m-2} 2^2 + \ldots + a_0 2^m$$

ให้ n เป็นจำนวนนับที่เขียนในรูปเลขฐานสองแล้วมี m+1 หลัก นั่นคือ

$$n = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_m 2^m$$

โดยที่ $a_m = 1$ และ $a_0,\ldots,a_{m-1} \in \{0, 1\}$ แยกพิจารณาเป็นสามกรณีดังนี้

- **กรณี $a_0 = 0$:** ได้ว่า

$$n = a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_m 2^m = 2(a_1 + a_2 2^{2-1} + \ldots + a_m 2^{m-1})$$

ซึ่งมี m หลัก โดยสมมุติฐานของการอุปนัยและสมการเชิงฟังก์ชันได้ว่า

$$\begin{aligned} f(n) &= f(a_1 + a_2 2^{2-1} + \ldots + a_m 2^{m-1}) \\ &= a_m + a_{m-1} 2 + a_{m-2} 2^2 + \ldots + a_1 2^{m-1} \\ &= a_m + a_{m-1} 2 + a_{m-2} 2^2 + \ldots + a_1 2^{m-1} + a_0 2^m \end{aligned}$$

- **กรณี $a_0 = 1$ และ $a_1 = 0$:** ได้ว่า

$$n = 1 + a_2 2^2 + \ldots + a_m 2^m = 1 + 4(a_2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-3} + a_m 2^{m-2}) = 4k+1$$

จากนิยามของ f เมื่อ n = 4k+1 ได้

$$\begin{aligned} f(n) &= 2f(2k+1) - f(k) \\ &= 2f(1 + a_2 2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-2} + a_m 2^{m-1}) - f(a_2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-3} + a_m 2^{m-2}) \\ &= 2(a_m + a_{m-1} 2 + \ldots + a_2 2^{m-2} + 2^{m-1}) - (a_m + \ldots + a_2 2^{m-2}) \\ &= a_m + a_{m-1} 2 + \ldots + a_2 2^{m-2} + 2^m \\ &= a_m + a_{m-1} 2 + \ldots + a_2 2^{m-2} + a_1 2^{m-1} + a_0 2^m \end{aligned}$$

- **กรณี $a_0 = a_1 = 1$:** ได้ว่า

$$n = 1 + 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_m 2^m = 3 + 4(a_2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-3} + a_m 2^{m-2}) = 4k+3$$

จากนิยามของ f เมื่อ n = 4k+1 ได้

$$\begin{aligned} f(n) &= 3f(2k+1) - 2f(k) \\ &= 3f(1 + a_2 2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-2} + a_m 2^{m-1}) - 2f(a_2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-3} + a_m 2^{m-2}) \\ &= 3(a_m + \ldots + a_2 2^{m-2} + 2^{m-1}) - 2(a_m + \ldots + a_3 2^{m-3} + a_2 2^{m-2}) \\ &= a_m + \ldots + a_2 2^{m-2} + 3 \times 2^{m-1} \\ &= a_m + \ldots + a_2 2^{m-2} + 2^{m-1} + 2^m \\ &= a_m + \ldots + a_2 2^{m-2} + a_1 2^{m-1} + a_0 2^m \end{aligned}$$

จากทั้งสามกรณีได้แสดงว่า ประพจน์เป็นจริงโดยการอุปนัย

คำตอบของปัญหานี้ หาได้ด้วยการหาจำนวนนับที่มีค่าน้อยกว่า 1988 ซึ่งเมื่อเขียนในรูปเลขฐานสอง ตัวเลขของหลักเมื่ออ่านจากซ้ายไปขวาต้องเหมือนกับการอ่านตัวเลขจากขวาไปซ้าย (จำนวนนับประเภทนี้มีชื่อว่า ***"จำนวนพาลินโดรมิค"***) หรือจะกล่าวได้ว่า

ถ้า $n = a_0 + a_1 2 + \ldots + a_{m-1} 2^{m-1} + a_m 2^m$ แล้ว $a_j = a_{m-j}$ เมื่อ $0 \leq j \leq m$

สำหรับจำนวนพาลินโดรมิค m+1 หลัก ต้องมีค่าของ a_0 และ a_m เป็น 1 เท่านั้นแต่หลักที่เหลือสามารถเป็นได้ทั้ง 0 หรือ 1 ทำให้ได้ว่ามีจำนวนพาลินโดรมิค m+1 หลัก อยู่ $2^{[m/2]}$ จำนวน กล่าวคือมีจำนวนพาลินโดรมิค n หลัก อยู่ $2^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$

สังเกตได้ว่า 1988 = $(11111000100)_2$ ซึ่งเป็นเลขฐานสองสิบเอ็ดหลัก สำหรับจำนวนพาลินโดรมิคสิบเอ็ดหลักที่มีค่ามากกว่า 1988 มีเพียงสองจำนวนคือ 2047 = $(11111111111)_2$ และ 2015 = $(11111011111)_2$ ทำให้เราได้ว่ามีจำนวนพาลินโดรมิคอยู่

$$(1+1+2+2+4+4+8+8+16+16+32) - 2 = 92$$ จำนวนที่มีค่าน้อยกว่า 1988

ดังนั้นคำตอบของโจทย์ข้อนี้คือ 92

ตัวอย่าง 3.1.17 จงหา f: $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ทั้งหมดที่มีสมบัติต่อไปนี้

ก. $2f(m^2+n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2$ $\quad (m, n \in \mathbb{N}_0)$

ข. ถ้า $m, n \in \mathbb{N}_0$, $m \geq n$ แล้ว $f(m^2) \geq f(n^2)$

วิธีทำ แทนค่า m = 0 และ n = 0 ลงในข้อ ก. ได้

$$2f(m^2) = (f(m))^2 + (f(0))^2 \quad \text{และ} \quad 2f(n^2) = (f(0))^2 + (f(n))^2$$

นำสมการแรกลบด้วยสมการที่สองได้

$$f(m)^2 - f(n)^2 = 2\{f(m^2) - f(n^2)\}$$

ซึ่งใช้ร่วมกับข้อ ข. ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันไม่ลด นั่นคือ

$$\text{ถ้า } m \geq n \text{ แล้ว } f(m) \geq f(n)$$

แทนค่า m = n = 0 ลงในข้อ ก. จะได้ว่า

$$f(0) = 0 \text{ หรือ } 1$$

- **กรณีที่ 1** f(0) = 1: ได้ว่า

$$2f(m^2) = f(m)^2 + 1$$

ดังนั้น f(1) = 1

แทนค่า m = n = 1 ในข้อ ก. จะได้

$$f(2) = 1$$

และได้โดยการอุปนัยอีกว่า

$$f(2^{2^n}) = \frac{1}{2}\left[f(2^{2^{n-1}}) + f(0)^2 \right] = \frac{1}{2}(f(2^{2^{n-1}})^2 + 1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

ซึ่งให้ $f(2^{2^k}) = 1$ $(k \in N_0)$

เนื่องจากความเป็นฟังก์ชันทางเดียว จึงสรุปได้ว่า

$$f(n) = 1 \text{ ทุก } n \in N_0$$

- **กรณีที่ 2** f(0) = 0: ได้

$$2f(m^2) = f(m)^2 \text{ หรือ } \frac{f(m^2)}{2} = \left(\frac{f(m)}{2}\right)^2$$

จากข้อ ก. ได้

$$f(2) = f(1)^2$$

ดังนั้น

$$\frac{f(2^{2^n})}{2} = \left(\frac{f(2^{2^{n-1}})}{2}\right)^2 = \left(\frac{f(2^{2^{n-2}})}{2}\right)^{2^2} = \ldots = \left(\frac{f(2)}{2}\right)^{2^n} = \frac{f(1)^{2^{n+1}}}{2^{2^n}}$$

จากข้อ ก. ได้

$$2f(1) = f(1)^2$$

ดังนั้น

$$f(1) = 0 \text{ หรือ } f(1) = 2$$

ถ้า f(1) = 0 จากกลุ่มของสมการข้างต้น ได้ว่า

$$f(2^{2^n}) = 0 \text{ เมื่อ } n \geq 0$$

และจากความเป็นฟังก์ชันทางเดียวของ f ทำให้ f เป็นฟังก์ชันศูนย์

ถ้า f(1) = 2 แล้ว

$$f(2^{2^n}) = 2 \cdot 2^{2^n}$$

เนื่องจาก $\frac{f(m^2)}{2} = \left(\frac{f(m)}{2}\right)^2$ และโดยความเป็นฟังก์ชันไม่ลดได้

$$f(m+1)^2 = 2f((m+1)^2) \geq 2f(m^2 + 1) = f(m)^2 + f(1)^2 = f(m)^2 + 4$$

ทำให้ได้ว่า f(m+1) > f(m)

และจาก $f(m)^2 = 2f(m^2)$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น f เป็นคู่ทุก m จึงได้ว่า

$$f(m+1) - f(m) - 2 \geq 0$$

แต่ $$\sum_{m=0}^{2^{2^n}-1} (f(m+1) - f(m) - 2) = f(2^{2^n}) - f(0) - 2 \cdot 2^{2^n} = 0$$

เมื่อแปร n ไปเหนือจำนวนเต็มไม่ติดลบ

สรุปได้ว่า

$$f(m+1) = f(m) + 2 \text{ สำหรับทุก } m \geq 0$$

ดังนั้น f(n) = 2n

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันคำตอบที่เป็นไปได้คือ

ฟังก์ชันศูนย์ หรือ ฟังก์ชันค่าคงตัว f(n) = 1 หรือ f(n) = 2n $(n \in \mathbb{N}_0)$

ตัวอย่าง 3.1.18 ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n) + f(m)) = m + n \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

จงหา ฟังก์ชัน f ที่เป็นไปได้ทั้งหมด และหาค่าของ f (1988)

วิธีทำ เราจะแสดงว่าฟังก์ชันคำตอบมีเพียง $f(n) = n$ เท่านั้น ซึ่งให้อีกด้วยว่า $f(1988) = 1988$

ให้ $r = f(1)$, $s = f(2)$ เพื่อความสะดวกเรากำกับการอ้างอิงถึงด้วยหมายเลขสมการ

$$f(f(n) + f(m)) = n + m \qquad (3.1.18.1)$$

$$f(1) = r \qquad (3.1.18.2)$$

$$f(2) = s \qquad (3.1.18.3)$$

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.3) ได้ $f(2s) = 4$ (3.1.18.4)

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.2) ได้ $f(2r) = 2$ (3.1.18.5)

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.5) ได้ $f(4) = 4r$ (3.1.18.6)

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.2), (3.1.18.6) ได้ $f(5r) = 5$ (3.1.18.7)

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.2), (3.1.18.3) ได้ $f(s + r) = 3$ (3.1.18.8)

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.4) ได้ $f(8) = 4s$ (3.1.18.9)

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.7), (3.1.18.8) ได้ $f(8) = 6r + s$ (3.1.18.10)

ดังนั้น $4s = 6r + s$ ซึ่งให้ $s = 2r$ เราจะแสดงโดยการอุปนัยว่าเมื่อ $n \geq 4$ แล้ว

$$f(nr) = n \qquad (3.1.18.11)$$

$$f(n) = nr \qquad (3.1.18.12)$$

จาก (3.1.18.1), (3.1.18.5), (3.1.18.8) ได้

$$f(5) = 3r + s = 5r$$

แสดงว่า (3.1.18.11), (3.1.18.12) เป็นจริงเมื่อ $n = 4, 5$ (ให้พิจารณา (3.1.18.2), (3.1.18.6), (3.1.18.7) ด้วย)

สมมุติว่า (3.1.18.11) เป็นจริง ณ n และ $n - 1$ ดังนั้น

$$f((n - 1)r) = n - 1 \qquad (3.1.18.13)$$

ใช้ (3.1.18.1), (3.1.18.5), (3.1.18.13) ได้

$$f(n + 1) = (n - 1)r + 2r = (n + 1)r$$

นอกจากนี้

$$f(n - 1) = (n - 1)r \qquad (3.1.18.14)$$

จาก (3.1.18.14), (3.1.18.1), (3.1.18.3) ได้

$$f((n + 1)r) = n + 1$$

เป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์โดยการอุปนัย

เนื่องจาก $4r \geq 4$ โดย (3.1.18.12) ได้ $f(4r) = 4r^2$

และโดย (3.1.18.11) ได้ $f(4r) = 4$ ซึ่งให้ $r = 1$

จาก (3.1.18.2), (3.1.18.3), (3.1.18.8), (3.1.18.11) พบว่า

$$f(n) = n \quad (n \in \mathbb{N})$$

ตัวอย่าง 3.1.19 จงหาฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(3mn + m + n) = 4f(m)f(n) + f(m) + f(n) \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0)$$

วิธีทำ สมมุติว่าเรามีฟังก์ชัน f ดังกล่าว สร้างฟังก์ชัน $g : 3\mathbb{N}_0 + 1 \to 4\mathbb{N}_0 + 1$ โดยให้

$$g(x) := 4f(\tfrac{x-1}{3}) + 1$$

ฟังก์ชัน g มีนิยามแจ่มชัด และตรวจสอบได้โดยง่ายว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง จาก $3\mathbb{N}_0+1$ ไปบน $4\mathbb{N}_0 + 1$ นอกจากนี้ฟังก์ชันผกผันของมันคือ

$$g^{-1}(y) = 3f^{-1}((y - 1)/4) + 1$$

ให้ $m, n \in \mathbb{N}_0$ จากนิยามของ f และ g ได้

$$\begin{aligned} g((3m + 1)(3n + 1)) &= g(3(3mn + m + n)+ 1) \qquad = 4f(3mn + m + n) + 1 \\ &= 4\{4f(m)f(n) + f(m) + f(n)\} + 1 \qquad = (4f(m) + 1)(4f(n) + 1) \\ &= g(3m + 1)g(3n + 1) \end{aligned}$$

กล่าวคือ g เป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ (multiplicative) ในความหมายที่ว่า

$$g(xy) = g(x)g(y) \qquad (x, y \in 3\mathbb{N}_0+1)$$

ในทำนองกลับกัน เมื่อมีฟังก์ชันเชิงการคูณ ที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง g จาก $3\mathbb{N}_0 + 1$ ไปบน $4\mathbb{N}_0 + 1$ แล้ว เราสามารถสร้างฟังก์ชัน f ที่มีสมบัติที่ต้องการได้ โดยสร้าง

$$f(x) := \tfrac{1}{4}\{g(3x + 1) - 1\}$$

การตรวจสอบว่า f มีสมบัติที่ต้องการทำได้ง่าย (ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด) จึงเหลือเพียงต้องแสดงว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง

ให้ P_1, P_2 เป็นเซตของจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $3n + 1$, $3n + 2$ ตามลำดับ ให้ Q_1 , Q_2 เป็นเซตของจำนวนเฉพาะที่อยู่ในรูป $4n +1$, $4n + 3$ ตามลำดับ เราทราบกันดีว่า แต่ละเซตดังกล่าวมีสมาชิกเป็นจำนวนอนันต์ (เป็นผลจากทฤษฎีบทของ Dirichlet) ให้ h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และทั่วถึง จาก $P_1 \cup P_2$ ไปบน $Q_1 \cup Q_2$ โดยส่ง P_1 แบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงไปบน Q_1 และส่ง P_2 แบบหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง ไปบน Q_2 (ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดว่า การส่ง h ดังกล่าวมีอยู่จริง)

สร้างฟังก์ชัน g ดังนี้ $g(1) := 1$, สำหรับ $n > 1$, $n \in 3\mathbb{N}_0 + 1$ ให้การแยกตัวประกอบหนึ่งเดียวเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะของ n เป็น $n = \prod p_i$ (โดยที่อาจมี p_i ซ้ำ)

นิยาม $g(n) := \prod h(p_i)$ เราตรวจก่อนว่า g มีนิยามแจ่มชัด ให้ $n \in 3\mathbb{N}_0+1$ ดังนั้น จะต้องมีจำนวนเฉพาะแบบ P_2 อยู่เป็นปริมาณคู่จำนวน ที่หาร n ได้ลงตัว จำนวนเฉพาะแต่ละจำนวนเหล่านี้ ถูกส่งด้วย h ไปยังจำนวนเฉพาะใน Q_2 และเนื่องจากมีเป็นจำนวนคู่ ผลคูณเหล่านี้ต้องอยู่ใน $4\mathbb{N}_0 + 1$ แสดงว่า g มีนิยามแจ่มชัด ในขณะที่ความเป็นฟังก์ชันเชิงการคูณ ตรวจสอบได้ไม่ยาก จึงขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่างต่อไปแสดงถึงแนวคิดที่สำคัญแนวคิดหนึ่ง ที่เรียกว่าจุดตรึง ซึ่งสามารถนำมาใช้เป็นเครื่องมือในการหาคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง แนวคิดนี้จะพบเสมอในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการทำซ้ำ (iteration) ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 3.1.20 (IMO 1996) จงหา $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n) \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0)$$

วิธีทำ แทนค่า $m = n = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ $f(0) = 0$ ซึ่งให้ว่า

$$f(f(n)) = f(n) \text{ สำหรับทุก } n \in \mathbb{N}_0$$

ซึ่งแสดงด้วยว่า สมการเชิงฟังก์ชันที่โจทย์ให้มา สมมูลกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m + f(n)) = f(m) + f(n),\ f(0) = 0$$

สังเกตด้วยว่า ถ้า $f(x)$ ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ แล้ว f จะมีจุดตรึง (fixed points ซึ่งคือจุด x ที่มีสมบัติว่า $f(x) = x$) ที่ไม่ใช่จุดศูนย์ ให้ a เป็นจุดตรึงค่าน้อยสุดที่ไม่ใช่จุดศูนย์ของ f ถ้า $a = 1$ แล้วสามารถตรวจได้โดยง่ายว่า $f(2) = 2$ และโดยการอุปนัยได้ว่า $f(n) = n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$

สมมุติว่า $a > 1$ โดยการอุปนัยแสดงได้ว่า $f(ka) = ka$ สำหรับทุก $k \in \mathbb{N}$ เราจะแสดงว่า จุดตรึงของ f ทุกจุดจะอยู่ในรูป ka สำหรับบาง $k \in \mathbb{N}$

ขั้นแรกสังเกตว่า ผลบวกของจุดตรึงสองจุดของ f จะเป็นจุดตรึงด้วย ให้ b เป็นจุดตรึงใด ๆ ของ f เลือกจำนวนเต็มไม่ติดลบ q, r โดยที่

$$b = aq + r,\ 0 \leq r < a$$

ดังนั้น

$$b = f(b) = f(aq + r) = f(r + f(aq)) = f(r) + f(aq) = f(r) + aq$$

ซึ่งให้ว่า $f(r) = r$ และจาก $r < a$ ต้องได้ว่า $r = 0$ ซึ่งแสดงว่า จุดตรึงทุกจุดต้องอยู่ในรูป ka

เนื่องจากเซต $\{f(n) ; n \in \mathbb{N}_0\}$ เป็นเซตของจุดตรึงของ f จึงได้โดยเฉพาะอย่างยิ่งว่า

$$f(i) = an_i \text{ สำหรับแต่ละ } i < a \text{ โดยที่ } n_0 = 0 \text{ และ } n_i \in \mathbb{N}_0$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และเขียน

$$n = ka + i,\ 0 \leq i < a$$

จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(n) = f(i + ka) = f(i + f(ka)) = f(i) + ka = n_i a + ka = (n_i + k)a$$

เราต้องตรวจสอบว่าฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันของโจทย์

ให้ $m = ka + i,\ n = sa + j,\ 0 \leq i, j < a$ ดังนั้น

$$f(m + f(n)) = f(ka + i + f(sa + j)) = f((k + s + n_j)a + i) = (k + s + n_j + n_i)a = f(m) + f(n)$$

เพราะฉะนั้น ถ้า f ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ แล้ว f จะมีรูปแบบดังนี้ ให้ $a \in \mathbb{N}$ และ $n_1, n_2, \ldots, n_{a-1} \in \mathbb{N}_0$ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ $n_0 = 0$ ดังนั้น

$$f(n) = ([\tfrac{1}{a}]a + i) = a[\tfrac{n}{a}] + an_i \quad \text{เมื่อ } n = [\tfrac{n}{a}]a + i,\ 0 \leq i < a$$

ตัวอย่าง 3.1.21 จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n$$

วิธีทำ โดยการตรวจพินิจ พบว่า $f(n) = n$ เป็นฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันหนึ่ง เราจะแสดงว่าฟังก์ชันนี้เป็นเพียงคำตอบเดียว เราเริ่มด้วยการแสดงว่า ฟังก์ชันคำดอบต้องเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะ

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(f(x)) = f(f(y)) &&\Rightarrow f(f(f(x))) = f(f(f(y))) \\ &\Rightarrow f(f(f(x))) + f(f(x)) + f(x) = f(f(f(y))) + f(f(y)) + f(y) \\ &\Rightarrow 3x = 3y &&\Rightarrow x = y \text{ ตามต้องการ} \end{aligned}$$

ต่อไปเป็นการพิสูจน์โดยการอุปนัยว่า

$$f(n) = n$$

แทนค่า $n = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน และใช้ความเป็นจำนวนนับของเรนจ์ ได้ว่า $f(1) = 1$
สมมุติว่า ประพจน์เป็นจริง เมื่อ $n < k$ เราจะพิสูจน์ว่า $f(k) = k$

ถ้า $f(k) < k$ แล้ว โดยสมมุติฐานของการอุปนัย ได้

$$f(f(k)) = f(k)$$

โดยความเป็นหนึ่งต่อหนึ่งของ f ได้ $f(k) = k$ เป็นข้อขัดแย้ง

ถ้า $f(k) > k$ แล้ว ต้องได้ว่า $f(f(k)) \geq k$ (เพราะไม่เช่นนั้น $f(f(k)) < k$ ซึ่งโดยสมมุติฐานของการอุปนัย ได้

$$f(f(f(k))) = f(f(k))$$

โดยความเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ได้ $f(f(k)) = f(k)$ และ $f(k) = k$ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง)
ในทำนองเดียวกัน แสดงได้ว่า

$$f(f(f(k))) \geq k$$

ดังนั้น

$$f(f(f(k))) + f(f(k)) + f(k) > 3k$$

ขัดแย้งกับสมการเชิงฟังก์ชันที่โจทย์กำหนด
สรุปได้ว่าฟังก์ชันคำดอบคือ

$$f(n) = n \quad (n \in \mathbb{N})$$

ตัวอย่าง 3.1.22 (IMO 1987) จงพิสูจน์ว่าไม่มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n)) = n + 1987$$

วิธีทำ แทน 1987 ด้วยจำนวนนับ c เราจะหาว่า c ต้องเป็นเท่าใด จึงจะทำให้มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n)) = n + c \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \qquad (3.1.22.1)$$

สมมุติว่า f เป็นฟังก์ชันดังกล่าว ดังนั้น

$$f(r + c) = f(f(f(r))) = f(r) + c \qquad (r \in \mathbb{N}_0) \qquad (3.1.22.2)$$

โดยการอุปนัย ได้ว่า

$$f(r + cq) = f(r) + cq \qquad (q, r \in \mathbb{N}_0) \qquad (3.1.22.3)$$

ให้ $C = \{0, 1, 2, \ldots, c-1\}$ เมื่อ $n \in C$

ให้ g(n), h(n) เป็นผลหาร และเศษเหลือจากการหาร f(n) ด้วย c กล่าวคือ

$$f(n) = cg(n) + h(n), \qquad g(n) \in \mathbb{N}_0, \quad h(n) \in C \qquad (3.1.22.4)$$

เมื่อประยุกต์สมการ (3.1.22.3) กับ $q = g(n)$, $r = h(n)$ ได้

$$f(f(n)) = f(h(n)) + cg(n) \geq cg(n)$$

เนื่องจาก $n \in C$ สมการ (3.1.22.1) ให้ว่า

$$f(f(n)) = n + c < 2c$$

ดังนั้น

$$cg(n) < 2c \text{ กล่าวคือ } g(n) = 0 \text{ หรือ } 1$$

พิจารณาเซต $C_0 = \{n \in C; g(n) = 0\}$, $C_1 = \{n \in C; g(n) = 1\}$ เซตทั้งสองนี้ต่างสมาชิกกัน และมียูเนียนเป็น C

ถ้า $n \in C_0$ แล้วสมการ (3.1.22.4) ให้

$$f(n) = h(n)$$

และโดย (3.1.22.1) ได้

$$f(h(n)) = f(f(n)) = n + c$$

ซึ่งแสดงว่า เมื่อหาร f(h(n)) ด้วย c แล้วจะได้ ผลหารเป็น 1 และเศษเหลือเป็น n กล่าวคือ

$$g(h(n)) = 1, \quad h(h(n)) = n \text{ เมื่อ } n \in C_0$$

ถ้า $n \in C_1$ แล้วสมการ (3.1.22.4) ให้

$$f(n) = h(n) + c$$

เมื่อใช้ (3.1.22.1), (3.1.22.2) (พร้อมด้วย $r = h(n)$) ได้ว่า

$$n + c = f(f(n)) = f(h(n) + c) = f(h(n)) + c$$

ดังนั้น $f(h(n)) = n$ ซึ่งแสดงว่า

$$g(h(n)) = 0, \quad h(h(n)) = n \text{ เมื่อ } n \in C_1$$

สมบัติของฟังก์ชัน $h : C \longrightarrow C$ ที่พบข้างต้น สรุปได้ดังนี้

$$h(h(n)) = n \qquad (n \in C) \qquad (3.1.22.5)$$

$$n \in C_0 \Rightarrow h(n) \in C_1 ; \qquad n \in C_1 \Rightarrow h(n) \in C_0 \qquad (3.1.22.6)$$

สมการ (3.1.22.5) แสดงว่า h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง C เมื่อใช้ความจริงนี้ ร่วมกับ (3.1.22.6) ได้ว่า h ส่ง C_0 ไปทั่วถึง C_1 และส่ง C_1 ไปทั่วถึง C_0 ดังนั้น เซตทั้งสองต้องมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน ซึ่งแสดงว่า $C = C_0 \cup C_1$ มีสมาชิกเป็นจำนวนคู่ กล่าวคือ c เป็นจำนวนเต็มคู่

สรุปได้ว่า ฟังก์ชัน f : $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน (3.1.22.1) มีอยู่จริง เพียงเมื่อ c เป็นจำนวนเต็มคู่ เมื่อกลับไปที่โจทย์แรกเริ่มที่มี c = 1987 สรุปได้ว่า ไม่มีฟังก์ชันดังกล่าว

ตัวอย่าง 3.1.23 (IMO 1982) กำหนดให้ฟังก์ชัน f : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

a) $f(m + n) - f(m) - f(n) = 0$ หรือ 1 สำหรับทุกจำนวนนับ m, n

b) $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ และ $f(9999) = 3333$

จงหาค่าของ $f(1982)$

วิธีทำ โดยเงื่อนไข a) ได้

$$f(m + n) \geq f(m) + f(n) \text{ สำหรับทุก } m, n$$

เมื่อ $m = n = 1$ ได้

$$f(2) \geq 2f(1)$$

เนื่องจาก $f(2) = 0$ จึงได้ $f(1) = 0$

เมื่อ $m = 2, n = 1$ ได้

$$f(3) = f(2) + f(1) + (0 \text{ หรือ } 1) = 0 \text{ หรือ } 1$$

เนื่องจาก $f(3) > 0$ ดังนั้น $f(3) = 1$

ซึ่งให้ด้วยว่า

$$f(3 + 3) \geq f(3) + f(3) = 2 \times 1 = 2$$

โดยการอุปนัย สามารถแสดงได้โดยง่ายว่า

$$f(3n) \geq n$$

ถ้า $f(3n) > n$ สำหรับบาง n แล้ว

$$f(3m) > m \text{ สำหรับทุก } m \geq n$$

เนื่องจาก $f(9999) = f(3 \cdot 3333) = 3333$ เราต้องได้ว่า

$$f(3n) = n \text{ สำหรับทุก } n \leq 3333$$

ดังนั้น

$$1982 = f(3 \cdot 1982) \geq f(2 \cdot 1982) + f(1982) \geq 3f(1982)$$

ซึ่งให้ว่า $f(1982) \leq \frac{1982}{3} < 661$

นอกจากนี้ $f(1982) \geq f(1980) + f(2) = f(3 \cdot 660) = 660$ จึงสรุปได้ว่า

$$f(1982) = 660$$

ข้อสังเกตสุดท้าย คือ ฟังก์ชัน $f(n) = [\frac{n}{3}]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ ซึ่งแสดงว่า ฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์มีอยู่จริง

แบบฝึกหัด

1. (HK MO 1988-1989) นิยามฟังก์ชัน f สำหรับแต่ละจำนวนนับ n โดย $f(n) = \begin{cases} n-3 & \text{ถ้า } n \geq 2000 \\ f(f(n+5)) & \text{ถ้า } n < 2000 \end{cases}$

   (ก) จงหาค่าของ f(1998)

   (ข) จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมดที่ f(n) = 1997

2. จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

   (i) f(2) = 2

   (ii) f(mn) = f(m)f(n) สำหรับทุกจำนวนนับ m, n ที่เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน

   (iii) f(m) < f(n) สำหรับจำนวนนับ m < n

3. จงแสดงว่าไม่มี $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

   (i) f(2) = 3

   (ii) f(mn) = f(m)f(n) $(m, n \in \mathbb{N})$

   (iii) f(m) < f(n) สำหรับจำนวนนับ m < n

4. ให้ $f : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

   (i) f(2) = 2

   (ii) f(mn) = f(m)f(n) สำหรับทุกจำนวนนับ m, n

   (iii) f(m) < f(n) สำหรับจำนวนนับ m < n

   จงพิสูจน์ว่า $f(n) = n \quad (n \in \mathbb{N})$

5. (Romanian MC 2002) จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

   $$f(3x + 2y) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{N})$$

6. ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

   $$f(f(n)) = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

   จงหาค่าของ f(2001)

7. จงหา $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

   (i) $f(m^2 + n^2) = \{f(m)\}^2 + \{f(n)\}^2 \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0)$

   (ii) f(1) > 0

8. จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m + f(n)) = n + f(m + k) \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

เมื่อ k เป็นจำนวนนับที่ตรึงค่าหนึ่ง

9. (British MO 2003) ให้ $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ มีสมบัติต่อไปนี้

(i) $\{f(2n + 1)\}^2 - \{f(2n)\}^2 = 6f(n) + 1 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$

(ii) $f(2n) \geq f(n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$

ถามว่ามีจำนวนจริงที่น้อยกว่า 2003 อยู่ทั้งสิ้นกี่จำนวน ที่เป็นภาพของ f

10. (British MO 2002) ให้ $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ มีสมบัติต่อไปนี้

(a) $f(n + 1) > f(n) \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$

(b) $f(n + f(m)) = f(n) + m + 1 \qquad (m, n \in \mathbb{N}_0)$

จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ f(2001)

11. (Romanian MC 2003) จงหา $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า สำหรับทุกจำนวนนับ n ค่าของ $f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$ เป็นกำลังสามของจำนวนจำนวนหนึ่งที่มีค่าอย่างมาก n

12. จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$f(f(n)) + f(n) \in \{2n + 2001, 2n + 2002\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

13. (AMOC 1984) ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(mn) = f(m) + f(n) \qquad (m, n \in \mathbb{N})$

(ii) $f(n) = 0$ เมื่อเขียน n ในรูปฐาน 10 แล้ว หลักหน่วยเป็น 3

(iii) $f(10) = 0$

จงหาค่าของ f(1984) และ f(1985)

14. (Romania MC 2002) จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(3x + 2y) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{N})$$

15. (Bulgarian MC 1994) ให้ $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3 \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

จงหาค่าของ f(1993)

16. (Estonian MO) จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

3.2 ความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relations) (ในหัวข้อนี้เซตของจำนวนที่เกี่ยวข้อง คือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน)

มีสมการเชิงฟังก์ชันที่สำคัญประเภทหนึ่งสำหรับฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนนับ (ในบางครั้งเรียกว่า **ลำดับ** หรือ **ฟังก์ชันเลขคณิต**) ที่รู้จักกันในนาม ***ความสัมพันธ์เวียนเกิด*** ซึ่งจัดเป็นสมการชนิดหนึ่งในบรรดาสมการที่เรียกว่า**สมการเชิงผลต่าง** (Difference Equations) ในกรณีที่ความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็นแบบเชิงเส้นที่สัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว มีวิธีการแน่นอนและทฤษฎีบทว่าด้วยคำตอบทั่วไปของสมการประเภทนี้ ซึ่งในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์เฉพาะในกรณีที่เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสอง ที่เป็นสมการเอกพันธุ์ เท่านั้น คำตอบของสมการอันดับสูงขึ้นสามารถหาได้ในทำนองคล้ายกัน

ให้ f(n) ฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนนับ และสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว กล่าวคือ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันในรูป

$$f(n) = a\,f(n-1) + bf(n-2) \qquad (n = 2,3,\dots)$$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว เมื่อ เขียน u_n แทน f(n) แล้วความสัมพันธ์เวียนเกิดเขียนได้ในรูป

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \qquad (n \geq 2) \qquad (3.2.1)$$

ให้ λ เป็นราก (ซึ่งอาจเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้) ของพหุนาม $Q(z) = z^2 - az - b$ ดังนั้น $\lambda^2 = a\lambda + b$ เมื่อคูณตลอดด้วย λ^{n-2} จะได้

$$\lambda^n = a\lambda^{n-1} + b\lambda^{n-2} \quad (n \geq 2)$$

ซึ่งแสดงว่า $u_n = \lambda^n$ เป็นฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันหนึ่งของสมการ (3.2.1)

เนื่องจาก Q(z) เป็นพหุนามดีกรีสอง ถ้ารากทั้งสอง λ และ μ ของพหุนามนี้มีค่าต่างกัน เราจะพบคำตอบอย่างน้อยหนึ่งคู่ คือ

$$u_n = \lambda^n \text{ และ } u_n = \mu^n$$

สมมุติว่า u_n และ v_n เป็นฟังก์ชันคำตอบใดๆ คู่หนึ่งของสมการ (3.2.1) พิจารณาผลบวกเชิงเส้นของ u_n และ v_n ซึ่งคือนิพจน์ในรูป

$$w_n = cu_n + dv_n \text{ โดยที่ c และ d เป็นค่าคงตัว}$$

พิจารณา $n \geq 2$ พบว่า

$$w_n = cu_n + dv_n = c(au_{n-1} + bu_{n-2}) + d(av_{n-1} + bv_{n-2})$$
$$= a(cu_{n-1} + dv_{n-1}) + b(cu_{n-2} + dv_{n-2}) = aw_{n-1} + bw_{n-2}$$

ซึ่งแสดงว่า w_n สอดคล้องกับสมการ (3.2.1) เช่นเดียวกัน

จึงสรุปได้ว่า ผลบวกเชิงเส้นของบรรดาผลเฉลยของสมการ (3.2.1) เป็นผลเฉลยของสมการ (3.2.1) เช่นกัน

เนื่องจาก λ^n และ μ^n เป็นคำตอบคู่หนึ่ง จึงได้ว่า

$$v_n = c\lambda^n + d\mu^n \qquad (3.2.2)$$

เมื่อ c และ d เป็นค่าคงตัว เป็นฟังก์ชันคำตอบของสมการ (3.2.1)

ในการแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง จำต้องมีการกำหนด ***เงื่อนไขเริ่มต้น*** (initial conditions) ของลำดับ u_n ซึ่งคือค่าสองค่า x_0 และ x_1 ที่ว่า

$$u_0 = x_0 \text{ และ } u_1 = x_1$$

ถ้าหาค่า c และ d ใน (3.2.2) ด้วยคู่ของสมการ

$$c + d = x_0, \qquad c\lambda + d\mu = x_1 \tag{3.2.3}$$

แล้วลำดับ v_n ใน (3.2.2) จะสอดคล้องกับสมการ (3.2.1) พร้อมด้วยเงื่อนไขเริ่มต้น $v_0 = x_0$, $v_1 = x_1$ สรุปสิ่งที่ได้กล่าวข้างต้นได้เป็นทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (กรณีรากไม่ซ้ำ)

ให้ a, b, x_0 และ x_1 เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $b \neq 0$ สมมุติว่า พหุนามลักษณะเฉพาะ $Q(z) = z^2 - az - b$ มีรากทั้งสองเป็น $\lambda \neq \mu$

ถ้า u_n เป็นลำดับที่สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง (3.2.1) และมีสมบัติว่า $u_0 = x_0$ และ $u_1 = x_1$ แล้ว

$$u_n = c\lambda^n + d\mu^n \quad (n \geq 0) \tag{3.2.4}$$

เมื่อ c และ d หาได้จากการแก้สมการใน (3.2.3)

ในทำนองกลับกัน ถ้าเราเริ่มต้นด้วย ลำดับในรูป (3.2.4) พร้อมทั้งให้

$$a = \lambda + \mu \text{ และ } b = -\lambda\mu$$

แล้ว λ และ μ จะเป็นรากของ***พหุนามลักษณะเฉพาะ*** $Q(z) = z^2 - az - b$

ลำดับดังกล่าวนี้จะเป็นคำตอบของสมการ (3.2.1) กล่าวคือ ลำดับในรูป (3.2.4) จะสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสอง (3.2.1)

นอกจากนี้ ถ้า $b \neq 0$ แล้ว $\lambda \neq 0$ และ $\mu \neq 0$ ในขณะที่ ถ้า $b = 0$ แล้วโดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์พบว่าลำดับในรูป (3.2.4) เป็นลำดับเรขาคณิต ในรูป

$$u_n = u_1 a^{n-1} \quad (n \geq 2)$$

ตัวอย่าง 3.2.1 จำนวนฟิโบนักชี (Fibonacci Number) $F_0, F_1, F_2, \ldots$ นิยามโดย $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ และ

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

เมื่อเขียนจำนวนฟิโบนักชีแบบแจกแจงจะได้ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

ในที่นี้ a = b = 1 และ Q(z) มีรากที่แตกต่างกันเป็น $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\mu = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

ในสมการ (3.2.3) ได้ค่า $c = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ และ $d = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

สรุปได้ว่า $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad (3.2.1.1)$

ตัวอย่าง 3.2.2 จำนวนลูคาส (Lucas numbers) L_n นิยามโดย $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ และ

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad (n > 2)$$

จากทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (กรณีรากไม่ซ้ำ) ได้ว่า

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (n = 1,2,3, \ldots) \qquad (3.2.2.1)$$

สังเกตเห็นว่าทั้ง F_n และ L_n ต่างสอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดเดียวกัน แต่ต่างกันที่เงื่อนไขเริ่มต้น

ในทฤษฎีบทที่กล่าวข้างต้นพหุนามลักษณะเฉพาะ $Q(z) = z^2 - az - b$ ต้องมีรากทั้งสองต่างกัน ในกรณีที่มีรากซ้ำ λ เพียงตัวเดียวจะได้ว่า $Q(z) = (z - \lambda)^2$ ซึ่งให้ค่า $a = 2\lambda$, $b = -\lambda^2$ และ $a^2+4b = 0$ ในทำนองกลับกัน ถ้า $a^2 + 4b = 0$ แล้วจากสูตรการหารากของพหุนามกำลังสอง จะได้ว่า $Q(z)$ มีรากซ้ำ ในกรณีนี้คำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิดเชิงเส้นอันดับสองดังกล่าว หาได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (กรณีรากซ้ำ) ให้ a, b, x_0 และ x_1 เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $a^2+4b = 0$ และ $b \neq 0$

สมมุติว่าพหุนามลักษณะเฉพาะ $Q(z) = z^2 - az - b$ มีรากซ้ำเป็น λ ถ้า u_n เป็นลำดับที่เป็นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด (3.2.1) และสอดคล้องกับ $u_0 = x_0$, $u_1 = x_1$ แล้ว

$$u_n = c\lambda^n + dn\lambda^n \qquad (n \geq 0) \qquad (3.2.6)$$

เมื่อ c, d หาได้จากการแก้ระบบสมการ

$$c = x_0, \quad c\lambda + d\lambda = x_1 \qquad (3.2.5)$$

พิสูจน์ สมมุติฐานที่ว่า $b \neq 0$ ชี้ว่า $\lambda \neq 0$ และระบบสมการ (3.2.5) มีเพียงผลเฉลยเดียว ด้วยเหตุผลเดียวกันกับในกรณีรากต่างกัน ทราบว่าลำดับ λ^n สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด (3.2.1) และจาก $a^2+4b = 0$ ได้ $\lambda = \frac{a}{2}$ ซึ่งแสดงว่า

$$n\lambda^n = a(n-1)\lambda^{n-1} + b(n-2)\lambda^{n-2} \qquad (n \geq 2)$$

กล่าวคือ ลำดับ $n\lambda^n$ เป็นผลเฉลยของสมการ (3.2.1) และเนื่องจากผลบวกเชิงเส้นของผลเฉลย ยังคงเป็นผลเฉลย ดังนั้น ลำดับที่นิยามโดย (3.2.6) เป็นคำตอบของความสัมพันธ์เวียนเกิด (3.2.1) เช่นกัน โดยไม่ขึ้นอยู่กับค่า c และ d แต่เพื่อให้ได้ลำดับที่ต้องการ จำเป็นที่จะต้องหา c และ d ที่ทำให้

$$u_0 = x_0 \text{ และ } u_1 = x_1$$

ซึ่งคือการแก้ระบบสมการ(3.2.5) เพื่อหา c และ d นั่นเอง ◆

ตัวอย่างต่อไป แสดงการใช้ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดที่ซับซ้อนยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 3.2.3 จงแสดงว่าลำดับ $\{a_n\}$ ที่นิยามโดย $a_0 = 0$, $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 + 1}$$

มีค่าเป็นจำนวนนับทั้งหมด

วิธีทำ เมื่อลองแทนค่าหาพจน์แรก ๆ ได้ว่า

$$\{a_n\} = \{0, 1, 4, 15, 56, 209, 780,\ldots\}$$

ซึ่งเป็นจำนวนนับจริง

นอกจากนี้ เมื่อสังเกตอย่างใกล้ชิด พบว่าพจน์แรก ๆ ในลำดับดังกล่าว สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$$

หากแสดงได้ว่าความสัมพันธ์นี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq 1$ จะได้ว่าข้อสรุปที่โจทย์ต้องการเป็นจริง

เพราะฉะนั้น เราจะเริ่มด้วยการแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$b_0 = 0, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1} \qquad (n \geq 1)$$

พหุนามลักษณะเฉพาะในที่นี้ คือ

$$Q(z) = z^2 - 4z + 1$$

มีรากเป็น $z = 2 \pm \sqrt{3}$

โดยทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (กรณีรากไม่ซ้ำ) ได้ว่า

$$b_n = a(2 + \sqrt{3})^n + b(2 - \sqrt{3})^n$$

เมื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ พบว่า

$$b = -a = -1/2\sqrt{3}$$

เพื่อความสะดวกในการดำเนินการต่อไป ให้ $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$ ซึ่งให้ว่า $\alpha - \beta = 2\sqrt{3}$

ดังนั้น

$$b_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$$

สังเกตด้วยว่า $\alpha + \beta = 4$, $\alpha\beta = 1$ เพื่อให้บรรลุวัตถุประสงค์ที่กล่าวถึงในตอนต้น เราเหลือเพียงต้องแสดงว่า $b_{n+1} = 2b_n + \sqrt{3b_n^2 + 1}$ ซึ่งเทียบเท่ากับการแสดงว่า

$$(b_{n+1} - 2b_n)^2 = 3b_n^2 + 1$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือ ได้ว่า

$$\begin{aligned}(b_{n+1} - 2b_n)^2 &= \left[\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} - 2\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right]^2 \\ &= \left(\frac{1}{\alpha-\beta}\right)^2 \{\alpha^n(\alpha - 2) - \beta^n(\beta - 2)\}^2 \\ &= \frac{1}{12}\{\sqrt{3}(\alpha^n + \beta^n)\}^2 = \frac{1}{4}(\alpha^n + \beta^n)^2\end{aligned}$$

ในขณะที่

$$3b_n^2 + 1 = 3\{(\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)\}^2 + 1 = 3/12(\alpha^n - \beta^n)^2 + 1 = \frac{1}{4}\{(\alpha^n - \beta^n)^2 + 4\}$$

$$= \frac{1}{4}\{(\alpha^n - \beta^n)^2 + 4\alpha^n\beta^n\} = \frac{1}{4}(\alpha^n + \beta^n)^2$$

ซึ่งให้การเท่ากันที่ต้องการ

ตัวอย่างในลำดับต่อไป แม้จะเป็นโจทย์สมการเชิงฟังก์ชัน ที่ฟังก์ชันคำตอบมีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงไม่ติดลบ ซึ่งพิจารณาโดยผิวเผินแล้ว ไม่น่าจะเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด แต่เมื่อทำการเปลี่ยนตัวแปรอย่างเหมาะสม สามารถเปลี่ยนรูปโจทย์เป็นโจทย์ว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด แล้วใช้ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดได้

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ a, b เป็นจำนวนจริงบวกสองจำนวน กำหนดให้ $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x)) + af(x) = b(a + b)x, \qquad (2b \neq -a)$$

จงพิสูจน์ว่า สมการเชิงฟังก์ชันนี้มีฟังก์ชันคำตอบเพียงหนึ่งเดียว

วิธีทำ ให้ $f^0(x) = x$, $f^1(x) = f(x)$, $f^n(x) = f(f^{n-1}(x))$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ เมื่อดำเนินการด้วย f ซ้ำ ๆ กับสมการเชิงฟังก์ชันได้ว่า

$$f^{n+2}(x) + af^{n+1}(x) - b(a + b)f^n(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดใน $f^n(x)$ ที่มีพหุนามลักษณะเฉพาะเป็น

$$y^2 + ay - b(a + b) = (y + a + b)(y - b)$$

เนื่องจาก $b \neq -a - b$ เมื่อ $a,b \in \mathbb{R}^+$ โดยทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด ได้ว่า

$$f^n(x) = c_1b^n + c_2(-a - b)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

เมื่อใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $x = f^0(x) = c_1 + c_2$ และ $f(x) = f^1(x) = c_1b - c_2(a + b)$ พบว่า

$$c_1 = \frac{(a+b)x + f(x)}{a+2b}, \quad c_2 = \frac{bx - f(x)}{a+2b} \qquad \text{และ} \qquad \frac{1}{(a+b)^n}f^n(x) = c_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^n + (-1)^nc_2$$

จาก $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$ ได้ว่า $f^n : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$

ดังนั้น $$c_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^n + (-1)^nc_2 \geq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ซึ่งให้ว่า $$c_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n+1} \geq c_2 \geq -c_1\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

เนื่องจาก $a + b > b \geq 0$ เมื่อให้ $n \to \infty$ ในอสมการเหล่านี้ ได้ $c_2 = 0$ แสดงว่า $f(x) = bx$
ซึ่งตรวจได้ว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้อง

โจทย์ความสัมพันธ์เวียนเกิดบางข้อมีสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงตัว แต่สามารถเปลี่ยนให้เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้ แล้วใช้วิธีการแบบเดียวกันกับที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิดหาคำตอบได้

ตัวอย่าง 3.2.5 นิยามลำดับ $\{f(n) ; n = 0, 1, 2, \ldots\}$ ดังนี้ $f(0) = f(1) = 0$ และ

$$f(n + 2) = 4^{n+2}f(n + 1) - 16^{n+1}f(n) + n.2^{n^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

จงหา $f(n)$ และแสดงว่า $f(1989)$, $f(1990)$, $f(1991)$ ทั้งสามจำนวนหารลงตัวด้วย 13

วิธีทำ ให้ $f(n) := g(n)\cdot 2^{n^2}$ แล้วแทนในความสัมพันธ์เวียนเกิด ได้

$$g(n + 2) - 2g(n + 1) + g(n) = n.16^{n-1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

เมื่อบวกความสัมพันธ์เหล่านี้ ตั้งแต่ 0 ถึง $n - 1$ ได้

$$g(n + 1) - g(n) = \frac{1}{15^3}\{1 - (15n + 1)\cdot 16^{-n}\}$$

ดำเนินการเช่นเดิมอีกครั้งหนึ่ง ได้

$$g(n) = \frac{1}{15^2}\{15n - 32 + (15n + 2)\cdot 16^{-n+1}\}$$

ซึ่งแทนค่ากลับแล้วให้

$$f(n) = \frac{1}{15^3}\{15n + 2 + (15n - 32)\cdot 16^{n-1}\}\cdot 2^{(n-2)^2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

ต่อไปพิจารณาค่า $f(n) \bmod 13$ ได้

$$15n + 2 + (15n - 32).16^{n-1} \equiv 2n + 2 + (2n - 6).3^{n-1} \equiv 2\{n + 1 + (n - 3).3^{n-1}\}$$

จาก $1990 \equiv 1 \pmod{13}$, $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, $1990 \equiv 1 \pmod 3$ ได้ว่า

$$f(1990) \equiv 0 \pmod{13}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$f(1989) \equiv 0 \pmod{13},\ f(1991) \equiv 0 \pmod{13}$$

ตามต้องการ

มีอีกวิธีการหนึ่งในการแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว วิธีนี้ใช้โครงสร้างที่เรียกว่า อนุกรมกำลังนัยนิยม (Formal power series) (ซึ่งหมายถึง อนุกรมกำลังที่เราไม่สนใจความสำคัญของการลู่เข้า แต่สนใจตำแหน่งและค่าของสัมประสิทธิ์ อนุกรมเหล่านี้ประกอบกันเป็นโครงสร้างที่มีความหมายชัดเจนทางพีชคณิตนามธรรม) เนื่องจากวิธีการเกี่ยวข้องกับเนื้อหาที่สูงกว่าในหนังสือเล่มนี้ จึงจะขอเพียงยกตัวอย่างแสดงแนวคิดดังกล่าว

ตัวอย่าง 3.2.6 จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(f(n))) + 6f(n) = 3f(f(n)) + 4n + 2001$$

วิธีทำ ก่อนอื่นสังเกตว่า คำตอบหนึ่งของสมการนี้ คือ

$$f(n) = n + 667$$

เราจะแสดงว่าฟังก์ชันนี้คือคำตอบเดียวที่เป็นไปได้

ให้ $a_k = f(\, f(\, f(\ldots f(n)\ldots)))$ $:= f^k(n)$ แทนฟังก์ชันประกอบกระทำซ้ำ k ครั้ง และ $a_0 = n$
ดังนั้น สมการเชิงฟังก์ชัน เปลี่ยนรูปเป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_{k+3} - 3a_{k+2} + 6a_{k+1} - 4a_k = 2001 \qquad (k \geq 0)$$

พิจารณาอนุกรมกำลัง $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ เมื่อใช้ร่วมกับความสัมพันธ์เวียนเกิด ได้ว่า

$$(1 - 3x + 6x^2 - 4x^3)\, G(x) = a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1 + 6a_0)x^2 + \frac{2001x^3}{1-x}$$

เนื่องจาก $1 - 3x + 6x^2 - 4x^3 = (1 - x)(1 - 2x + 4x^2) = \dfrac{(1-x)(1+8x^3)}{1+2x}$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{1-2x+4x^2} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Ax^k + \sum_{k=0}^{\infty} B(k+1)x^k + (Cx + D)(1 + 2x) \sum_{k=0}^{\infty} (-2x)^{3k} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a_k = f^k(n) > 0$ สำหรับทุก $k \geq 0$ เราต้องมีว่า

$$C = D = 0$$

ดังนั้น

$$\{a_0 + (a_1 - 3a_0)x + (a_2 - 3a_1 + 6a_0)x^2\}(1 - x) + 2001x^3 = \{A(1 - x) + B\}(1 - 2x + 4x^2)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ ได้

$$a_0 = A + B, \quad a_1 - 4a_0 = -3A - 2B$$

เมื่อแทนค่า $x = 1$ พบว่า $2001 = 3B$
เพราะฉะนั้น $a_1 - a_0 = B = 667$ และ

$$f(n) = a_1 = a_0 + 667 = n + 667$$

โจทย์เกี่ยวกับความสัมพันธ์เวียนเกิด ที่ไม่ใช่ความสัมพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวและไม่ใช่โจทย์การหาคำตอบโดยตรง มีอยู่มากมายเช่นกัน ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างหนึ่ง

ตัวอย่าง 3.2.7 (German MC) ลำดับ $\{f_n ; n \in \mathbb{N}_0\}$ กำหนดโดยความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$f_n = n f_{n-1} + (n - 1)^2 - 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

ถามว่าค่าเริ่มต้น f_0 จะต้องเป็นจำนวนเต็มใดที่ทำให้ ลำดับของค่าสัมบูรณ์ $\{|\, f_n| \, ; n \in \mathbb{N}_0\}$ ไม่บรรจุจำนวนเฉพาะเลย

วิธีทำ เมื่อแทนค่า $n = 1, 2, 3, 4$ ลงในความสัมพันธ์เวียนเกิด ได้

$$f_1 = 1(f_0 - 1), \quad f_2 = 2(f_1 + 0), \quad f_3 = 3(f_2 + 1), \quad f_4 = 4(f_3 + 2)$$

โดยการอุปนัย (ซึ่งรายละเอียด ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดแก่ผู้อ่าน) ได้ว่า

$$f_n = n(f_{n-1} + n - 2) \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad (3.2.7.1)$$

ซึ่งแสดงว่า $n \mid f_n$ $(n \in \mathbb{N})$ ทำให้ได้ทันทีว่า

สำหรับ $n > 1$ ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ ค่าสัมบูรณ์ $|f_n|$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ จึงเหลือต้องพิจารณา กรณี $n = 1$ และ n เป็นจำนวนเฉพาะ

- **กรณี n = 1**: จาก $f_1 = f_0 - 1$ พบว่า $|f_1|$ ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $f_0 \neq 1 \pm p$ เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ
- **กรณี n = p เป็นจำนวนเฉพาะ**: จาก (3.2.7.1) ได้ว่า $|f_n|$ เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $f_{n-1} + n - 2$ ต้องเป็น 1 หรือ -1 เท่านั้น

- ถ้า $f_{n-1} + n - 2 = -1$ แล้ว $f_{n-1} = -(n - 1)$ และ จาก (3.2.7.1) ได้

$$f_{n-1} = (n - 1)(f_{n-2} + n - 3)$$

เมื่อใช้สมการทั้งสองนี้ร่วมกัน พบว่า $f_{n-2} = -(n - 2)$ เมื่อดำเนินการในทำนองเดียวกัน ได้ว่า

$$f_k = -k \qquad (k \leq n)$$

ซึ่งนำไปสู่ค่า $f_0 = 0$

- ถ้า $f_{n-1} + n - 2 = 1$ แล้ว $f_{n-1} = -(n - 3)$ แต่จากที่ทราบข้างต้นว่า $k \mid f_k$ จึงได้ว่า

$$(n - 1) \mid (n - 3)$$

ซึ่งเป็นจริงได้สำหรับจำนวนเฉพาะ $n = 2, 3$ เท่านั้น

ถ้า $n = 2$ แล้ว $f_2 = 2f_1 = 2(f_0 - 1)$ เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $f_0 = 0$ หรือ 2 เท่านั้น
ถ้า $n = 3$ แล้ว $f_3 = 3(f_2 + 1) = 3(2f_1 + 1) = 3(2(f_0 - 1) + 1)$ เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ $f_0 = 0$ หรือ 1 เท่านั้น

สรุปได้ว่า ลำดับของค่าสัมบูรณ์ ไม่บรรจุจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ ค่าเริ่มต้น f_0 ต้องไม่อยู่ในเซตต่อไปนี้

$$\{0, 1, 2, 1 - p, 1 + p;\ \text{เมื่อ } p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$$

ตัวอย่าง 3.2.8 (IMO 1985) สำหรับทุกจำนวนจริง x_1 สร้างลำดับ $x_1, x_2, \ldots$ โดยให้

$$x_{n+1} = x_n(x_n + \tfrac{1}{n}) \text{ สำหรับแต่ละ } n \geq 1$$

จงพิสูจน์ว่า มีหนึ่งค่าพอดีของ x_1 ที่มีสมบัติว่า $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ สำหรับทุก n

วิธีทำ ให้ $P_1(x) = x$

$$P_{n+1}(x) = P_n(x)(P_n(x) + \tfrac{1}{n}) \qquad (n=1,2,\ldots) \qquad (3.2.8.1)$$

จากนิยามนี้พิสูจน์ได้โดยการอุปนัยว่า

(i) $P_n(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2^{n-1}

(ii) $P_n(x)$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้นจึงเป็นฟังก์ชันเพิ่มและเป็นฟังก์ชันนูนสำหรับ $x \geq 0$

(iii) $P_n(0) = 0$, $P_n(1) \geq 1$

(iv) $P_n(x) = x_n$

เนื่องจากเงื่อนไข $x_{n+1} > x_n$ สมมูลกับ $x_n > 1 - \frac{1}{n}$ โจทย์จึงสามารถเขียนได้ใหม่เป็น

"จงแสดงว่า มีจำนวนจริงบวก t เพียงหนึ่งเดียวที่มีสมบัติว่า $1 - \frac{1}{n} < P_n(t) < 1$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$"

เนื่องจาก P_n เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีค่าเพิ่มจาก 0 ไปยังค่าที่มากกว่าเท่ากับ 1 เมื่อ $0 \leq x \leq 1$
ดังนั้นจึงมี a_n และ b_n เพียงอย่างละหนึ่งเดียวที่มีสมบัติว่า

$$a_n < b_n \text{ , } P_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n} \text{ , } P_n(b_n) = 1 \qquad (3.2.8.2)$$

จากนิยาม (3.2.8.1) ได้

$$P_{n+1}(a_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

และ

$$P_{n+1}(a_{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

ซึ่งแสดงว่า

$$a_n < a_{n+1}$$

เนื่องจาก $P_{n+1}(b_n) = 1+\frac{1}{n+1}$ และ $P_{n+1}(b_{n+1}) = 1$ จึงได้

$$b_n > b_{n+1}$$

เนื่องจาก P_n เป็นฟังก์ชันนูน กราฟของ $P_n(x)$ อยู่ใต้เส้นคอร์ด $y = \frac{1}{b_n}x$ เมื่อ $0 \leq x \leq b_n$
โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$P_n(a_n) = 1 - \frac{1}{n} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

จากความจริงนี้และ $b_n < 1$ เราพบว่า

$$b_n - \frac{b_n}{n} \leq a_n \text{ , } b_n - a_n \leq \frac{b_n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

เพราะฉะนั้นเรามีลำดับอนันต์ที่มีขอบเขต $\{a_n\},\{b_n\}$ โดยลำดับแรกเป็นลำดับเพิ่ม ลำดับหลังเป็นลำดับลดที่ $a_n < b_n$ และผลต่าง $a_n - b_n \longrightarrow 0$ $(n \longrightarrow \infty)$
จึงสรุปได้ว่ามีจำนวนจริง t เพียงหนึ่งเดียวที่เป็นลิมิตของลำดับทั้งสอง โดยที่

$$an < t < bn \text{ และ } 1 - \frac{1}{n} < P_n(t) < 1 \ (n \in \mathbb{N})$$

ตัวอย่าง 3.2.9 (USAMO 1973) ให้ (x_n), (y_n) เป็นลำดับของจำนวนเต็ม ที่นิยามดังนี้

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
$$y_0 = 1, \quad y_1 = 7, \quad y_{n+1} = 2y_n + 3y_{n-1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

ดังนั้น พจน์แรก ๆ จำนวนหนึ่งของลำดับทั้งสอง คือ

$$X : 1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots$$
$$Y : 1, 7, 17, 55, 161, 487, \ldots$$

จงพิสูจน์ว่า ยกเว้น " 1 " ในพจน์แรก ไม่มีพจน์อื่นใดอีกเลยในลำดับทั้งสองที่เหมือนกัน

วิธีทำ เนื่องจากลำดับทั้งสอง สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิดอันดับสอง ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว เมื่อใช้วิธีการเช่นบรรยายข้างต้น สามารถแก้ความสัมพันธ์เวียนเกิด แล้วได้ว่า

$$x_n = \frac{1}{3}\{2^{n+1} + (-1)^n\}, \qquad y_n = 2\cdot 3^n - (-1)^n \qquad (n \geq 0)$$

ดังนั้น

$$x_n = y_m \iff 3^{m+1} - 2^n = \frac{1}{2}\{3(-1)^m + (-1)^n\}$$

ถ้า $n = 0$ หรือ $n = 1$ แล้ว $m = 0$ เป็นเพียงคำตอบเดียวที่เป็นไปได้

จากนี้ไปสมมุติว่า $n \geq 2$

ถ้า m, n เป็นคู่ หรือคี่พร้อมกัน แล้ว ค่าทางขวามือของสมการสุดท้ายเป็นคู่ ในขณะที่ค่าทางซ้ายมือเป็นคี่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ แต่ถ้า m, n มีความเป็นคู่-คี่ ตรงกันข้าม แล้ว สมการท้ายนี้ ไม่เป็นจริง เมื่อพิจารณา mod 4

แบบฝึกหัด

1. (AMOC 1997) จงหาลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ของจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติว่า $a_0 = 1$ และ $a_n - a_{n+1} = a_{n+2}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$ และพิสูจน์ว่า ลำดับดังกล่าวมีเพียงลำดับเดียว

2. เมื่อ $n = 1, 2, \ldots$ ให้ $\{u_n\}$ เป็นลำดับที่นิยามโดย $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$ จงพิสูจน์ว่า
$$u_{n+2} + u_n \geq 2 + u_{n+1}^2/u_n$$

3. จงหา $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์
$$f(f(n)) + f(n) = 2n + 3k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$
เมื่อ k เป็นจำนวนนับที่ตรึงค่าหนึ่ง

4. (Ukranian 2002) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่า ≥ 1, $n \geq 1$, $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ นิยามลำดับ
$$\{x_k : 0 \leq k \leq n\} \text{ โดย } x_0 = 1, \ x_k = 1/(1 + a_k x_{k-1}) \qquad (1 \leq k \leq n)$$

จงพิสูจน์ว่า

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > n^2A/(n^2 + A^2)$$

5. จงหา $f : \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x) - x) = 2x \qquad (x \in \mathbb{R}_0)$$

6. (Albanian MO 2001) นิยามลำดับ $\{a_n\}$ โดย

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+\sqrt{1+a_n^2}}$$

จงหา a_n ในรูปของฟังก์ชันของ n

7. ให้ $a \in \mathbb{R}$ และ $\{f_n(x)\}$ เป็นลำดับของพหุนามที่กำหนดโดย $f_0(x) = 1$ และ

$$f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_n(ax) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(i) จงพิสูจน์ว่า $f_n(x) = x^n f_n(1/x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$

(ii) จงหารูปแบบของ $f_n(x)$

8. จงหาลำดับอนันต์ $a_1, a_2, \ldots$ ของจำนวนนับที่มีขอบเขต ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{\gcd(a_{n-1}, a_{n-2})} \qquad (n \in \mathbb{N}, n > 2)$$

(Korean MO 1994-

9. (AMOC 1986) ให้ c เป็นจำนวนนับ นิยามลำดับ $\{f_n\}$ ดังนี้

$$f_1 = 1, \quad f_2 = c, \quad f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1} + 2 \qquad (n \geq 2)$$

จงแสดงว่า แต่ละดรรชนีล่าง k ใดๆ จะมีดรรชนีล่าง r ที่มีสมบัติว่า $f_k.f_{k+1} = f_r$

10. (AMOC 1984) ให้ q เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ และให้ an เป็นลำดับที่นิยามโดย

$$a_0 = 1, a_1 = a + q$$

และลำดับที่เหลือคือ

i. $\frac{a_{2k-1}}{a_{2k-2}} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}}$

ii. $a_{2k} - a_{2k-1} = a_{2k+1} - a_{2k}$

จงแสดงว่า สำหรับแต่ละ q ใดๆ จะมีจำนวนนับ N ที่ทำให้ได้ว่า $a_n > 1994$ ทุก $n > N$

11. (AMOC 1985) ให้ f(n) เป็นผลบวกของ n พจน์แรกของลำดับ

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, \ldots$$

(i) จงหาสูตรสำหรับ f(n)

(ii) จงพิสูจน์ว่า $f(s + t) - f(s - t) = st$ เมื่อ $s, t \in \mathbb{N}$ และ $s > t$

12. (Putnam 1979) จงหาจำนวนจริง a ที่ทำให้ลำดับที่นิยามโดย

$$u_0 = a,\ u_{n+1} = 2u_n - n^2$$

สอดคล้องกับ $u_n > 0$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$

3.3 สมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม

ตัวอย่างต่อไปนี้ เป็นการแก้สมการเชิงฟังก์ชัน โดยอาศัยสมบัติบางประการของฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 3.3.1 (Iranian MO 1999-2000) ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข $f(1) = 1$ และ

$$f(n+1) = \begin{cases} f(n)+2, & \text{ถ้า } n = f(f(n)-n+1) \\ f(n)+1, & \text{อื่นๆ} \end{cases}$$

(ก) จงพิสูจน์ว่า $f(f(n) - n + 1) \in \{ n, n+1 \}$

(ข) จงหา f

วิธีทำ (ก) เราจะพิสูจน์ประพจน์ในข้อนี้โดยการอุปนัย

กรณี $n = 1$ คือ $f(f(1) - 1 + 1) = f(1) = 1 \in \{1, 2\}$ เป็นจริง

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริงที่ n เราจะพิสูจน์ว่าเป็นจริงที่ n+1 โดยพิจารณากรณีที่เป็นไปได้สองกรณี

- **กรณีที่ 1** : $f(f(n) - n + 1) = n$

โดยสมการเชิงฟังก์ชันได้ $f(n+1) = f(n) + 2$ ซึ่งให้ว่า

$$(f(n+1) - (n+1) + 1) - (f(n) - n + 1) = 1$$

โดยเงื่อนไขของสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$1 \leq f(f(n+1) - (n+1) + 1) - f(f(n) - n + 1) \leq 2$$

เมื่อใช้เงื่อนไขของกรณีนี้ พบว่า

$$n + 1 \leq f(f(n+1) - (n+1) + 1) \leq n + 2$$

เนื่องจากเรนจ์คือเซตของจำนวนนับ อสมการหลังนี้แสดงว่า ประพจน์เป็นจริงที่ $n + 1$

- **กรณีที่ 2** : $f(f(n) - n + 1) = n + 1$

โดยสมการเชิงฟังก์ชันได้ $f(n+1) = f(n) + 1$ ซึ่งให้ว่า

$$f(n+1) - (n+1) + 1 = f(n) - n + 1$$

ดังนั้น

$$f(f(n+1) - (n+1) + 1) = f(f(n) - n + 1) = n + 1$$

แสดงว่าประพจน์เป็นจริงที่ $n + 1$ เช่นกัน

(ข) เราจะพิสูจน์ประพจน์ที่ว่า $f(n) = [n\Phi]$ เมื่อ $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (สังเกตว่า $\Phi^2 = \Phi + 1$)

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ กรณี $n = 1$ ได้ $f(1) = [\Phi] = 1$ เป็นจริง

สมมุติว่าประพจน์ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับที่ $\leq n$ จากข้อ (ก) แยกพิจารณาเป็นสองกรณี

- **กรณีที่ 1** : $f(f(n) - n + 1) = n$

จาก $f(n) = [n\Phi] < 2n$ ได้ว่า $f(n) - n + 1 \leq n$

โดยเงื่อนไขของกรณีนี้ และ สมมุติฐานของการอุปนัยได้

$$n = f(f(n) - n + 1) = [f(n)\Phi - n\Phi + \Phi] = [[n\Phi]\Phi - n\Phi + \Phi]$$

ซึ่งให้ว่า

$$n + 1 > \Phi[n\Phi] - n\Phi + \Phi \geq n$$

ให้ $\{x\} = x - [x]$ แทนภาคเศษส่วนของจำนวนจริง x ดังนั้น อสมการทางซ้ายให้ว่า

$$n + 1 > \Phi(n\Phi - \{n\Phi\}) - n\Phi + \Phi$$

ซึ่งจัดรูปได้

$$\Phi\{n\Phi\} > n\Phi^2 - n\Phi - n + \Phi - 1 = \Phi - 1$$

กล่าวคือ $\{n\Phi\} > (\Phi - 1)/\Phi$

ซึ่งให้ว่า

$$3 > \{n\Phi\} + \Phi > (\Phi - 1)/\Phi + \Phi = 2$$

ดังนั้น

$$[(n+1)\Phi] = [[n\Phi] + \{n\Phi\} + \Phi] = [n\Phi] + [\{n\Phi\} + \Phi] = [n\Phi] + 2 = f(n) + 2 = f(n+1)$$

- **กรณีที่ 2** : $f(f(n) - n + 1) = n + 1$ เช่นเดียวกันกับกรณีที่แล้วได้ว่า

$$n + 1 = f(f(n) - n + 1) = [f(n)\Phi - n\Phi + \Phi] = [[n\Phi]\Phi - n\Phi + \Phi]$$

ซึ่งให้

$$n + 2 > [n\Phi]\Phi - n\Phi + \Phi > n + 1$$

อสมการทางซ้ายจัดรูปได้เป็น

$$n + 1 < \Phi(n\Phi - \{n\Phi\}) - n\Phi + \Phi$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$\Phi\{n\Phi\} < n\Phi^2 - n\Phi - n + \Phi - 1 = \Phi - 1$$

กล่าวคือ $\{n\Phi\} < (\Phi - 1)/\Phi$

ซึ่งให้ว่า

$$1 < \{n\Phi\} + \Phi < (\Phi - 1)/\Phi + \Phi = 2$$

ดังนั้น

$$[(n + 1)\Phi] = [[n\Phi] + \{n\Phi\} + \Phi] = [n\Phi] + [\{n\Phi\} + \Phi] = [n\Phi] + 1 = f(n) + 1 = f(n + 1)$$

จากทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า $f(n) = [n\Phi]$ โดยการอุปนัย

ตัวอย่าง 3.3.2 (IMO 1993) จงตรวจสอบว่า มีฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ หรือไม่ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้

$$f(1) = 2 \tag{3.3.2.1}$$

$$f(f(n)) = f(n) + n \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.3.2.2}$$

วิธีทำ ให้ $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

เนื่องจาก $a^2 - a - 1 = 0$ ดังนั้น ฟังก์ชัน $g(x) := ax$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$g(g(n)) - g(n) - n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

ให้ [x] แทนฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม เราจะแสดงว่า ฟังก์ชัน $f(n) := [g(n) + \frac{1}{2}]$ สอดคล้องกับความต้องการของโจทย์

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ เพราะจาก $a > 1$ ได้ $g(n + 1) > g(n) + 1$
2. เนื่องจาก $2 < a + \frac{1}{2} < 3$ ดังนั้น $f(1) = 2$
3. จากนิยามของ f , g ได้ว่า $|f(n) - g(n)| < \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
|f(f(n)) - f(n) - n| &= |g(g(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\
&= |g(g(n)) - g(f(n)) + g(f(n)) - f(f(n)) + f(n) - g(n)| \\
&= |(a-1)\{g(n) - f(n)\} + g(f(n)) - f(f(n))| \\
&\le (a-1)\,|g(n) - f(n)| + |g(f(n)) - f(f(n))| \\
&\le \tfrac{1}{2}(a-1) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}a < 1
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(f(n)) - f(n) - n$ เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น สมการเชิงฟังก์ชันเป็นจริงสำหรับ f

ตัวอย่าง 3.3.3 (German MC) ลำดับ $a_0, a_1, a_2, \ldots$ นิยามโดย

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = [\sqrt[3]{a_n + n}]^3 \quad (n \ge 0)$$

เมื่อ [x] แทนฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม

(ก) จงหาสูตรสำเร็จสำหรับ a_n ในพจน์ของ n เท่านั้น

(ข) จงหาค่า n ทั้งหมดที่ทำให้ $a_n = n$

วิธีทำ (ก) จากนิยามเห็นได้ชัดว่า จำนวนเต็ม a_n เป็นจำนวนกำลังสามสมบูรณ์ ดังนั้น

$$a_{n+1} = [\sqrt[3]{a_n + n}]^3 \ge [\sqrt[3]{a_n}]^3 = a_n \tag{3.3.3.1}$$

ซึ่งแสดงว่า ลำดับนี้เป็นลำดับค่าไม่ลด เมื่อหาค่าพจน์แรก ๆ ของลำดับ พบว่า

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 && \text{เมื่อ } n = 0, 1 \\
a_n &= 1 && \text{เมื่อ } n = 2, 3, 4, 5, 6, 7 \\
a_n &= 8 && \text{เมื่อ } n = 8, 9, \ldots, 19
\end{aligned} \tag{3.3.3.2}$$

$a_n = 27$ เมื่อ $n = 20, 21, \ldots, 37$

$a_n = 64$ เมื่อ $n = 38, 39, \ldots, 61$

ซึ่งมีค่าคงตัวเป็นส่วน ๆ โดยที่การเพิ่มของค่าเกิด ณ n ที่เขียนได้เป็นระยะห่างระหว่างจำนวนกำลังสามสมบูรณ์ที่อยู่ถัดกัน (คือ $7 = 8 - 1$, $19 = 27 - 8$ ฯลฯ) ซึ่งนำไปสู่ประพจน์ที่ว่า

"ให้ $m_k = k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$ ดังนั้น $a_n = k^3$ เมื่อ $n = m_k + 1, m_k + 2, \ldots, m_{k+1}$ $(k \geq 1)$"

เราจะพิสูจน์ประพจน์นี้ด้วยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์

ประพจน์นี้เป็นจริงเมื่อ $k = 1$ เพราะจากข้อมูลข้างต้น $a_n = 1$ เมื่อ $n = 2, \ldots, 7$

พิจารณา $k \geq 2$ สมมุติว่า

$$a_n = (k-1)^3 \text{ เมื่อ } n = m_{k-1} + 1, m_{k-1} + 2, \ldots, m_k \qquad (3.3.3.3)$$

เนื่องจาก $m_{k+1} - m_k = 6k$ เราจะต้องแสดงว่า

$$a_{m_k + i} = k^3 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6k) \qquad (3.3.3.4)$$

เราจะแสดงว่า (3.3.3.4) เป็นจริงโดยการอุปนัยซ้อนอีกชั้นหนึ่ง เมื่อ $i = 1$ จากนิยามได้

$$a_{m_k+1} = [\sqrt[3]{a_{m_k} + m_k}\,]^3 = [\sqrt[3]{(k-1)^3 + (k^3 - (k-1)^3)}\,]^3 = k^3$$

ตามต้องการ

สมมุติว่า (3.3.3.4) เป็นจริง สำหรับบาง i, $1 \leq i < 6k$ พิจารณา ณ $i + 1$ จากนิยาม ได้

$$a_{m_k+i+1} = [\sqrt[3]{a_{m_k+i} + (m_k + i)}\,]^3 = [\sqrt[3]{k^3 + 3k^2 - 3k + 1 + i}\,]^3$$

เนื่องจาก $i < 6k$ ได้

$$\sqrt[3]{k^3 + 3k^2 - 3k + 1 + i} < \sqrt[3]{k^3 + 3k^2 + 3k + 1} = k + 1$$

แสดงว่า

$$a_{m_k+i+1} \leq k^3$$

จาก (3.3.3.1) ความสัมพันธ์ล่าสุดนี้เป็นอสมการแท้ไม่ได้ เพราะฉะนั้น (3.3.3.4) เป็นจริง ณ $i + 1$

ทำให้ (3.3.3.4) เป็นจริงเมื่อ $i = 1, \ldots, 6k$ โดยการอุปนัย ซึ่งให้ทันทีว่าประพจน์แรกเริ่มเป็นจริงโดยการอุปนัยด้วยเช่นกัน ทำให้ได้ว่า (3.3.3.3) เป็นจริง เมื่อ $m_k + 1 \leq n \leq m_{k+1}$ กล่าวคือ

$$3k^2 - 3k + 2 \leq n \leq 3k^2 + 3k + 1 \quad (k \geq 1, n \geq 2)$$

เมื่อแก้หา k ได้

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{12n-3} \leq k \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{12n-15} \qquad (3.3.3.5)$$

อสมการทางซ้ายของ (3.3.3.5) ชี้ว่า

$$k + 1 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{12n-3} > \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{12n-15}$$

เมื่อใช้ร่วมกับอสมการทางขวามือของ (3.3.3.5) ให้ว่า

$$k = [\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{12n-15}\,] \qquad (n \geq 2)$$

เพราะฉะนั้น (3.3.3.3) ให้สูตร

$$a_n = \begin{cases} 0 & ,n = 0,1 \\ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{12n-15}\right] & ,n \geq 2 \end{cases}$$

(ค) จากข้อมูลใน (3.3.3.2) พบว่า $a_n = n$ เมื่อ $n = 0, 8, 27$

เราจึงสันนิษฐานว่า ไม่มีค่า n อื่นอีกที่สมการนี้เป็นจริง เพื่อการพิสูจน์ข้อสันนิษฐานนี้ สมมุติว่า

$$m_k + 1 \leq n \leq m_{k+1} \text{ เมื่อ } k \geq 4 \quad (\text{ทั้งนี้เพราะ } m_4 = 37)$$

จาก (3.3.3.3) ได้

$$a_n = k^3$$

เนื่องจาก $n \leq m_{k+1} = 3k^2 + 3k + 1$ จึงได้ว่า

$$a_n - n \geq k^3 - 3k^2 - 3k - 1 = (k+1)(k^2 - 4k + 1) - 2 \geq (4+1)(4^2 - 16 + 1) - 2 = 3$$

แสดงว่าสมการ

$$a_n = n \text{ เป็นจริงเพียงเมื่อ } n = 0, 8, 27 \text{ เท่านั้น}$$

ตัวอย่าง 3.3.4 (IMO 1976) ลำดับ $(u_n)_{n \geq 0}$ มีนิยามเป็น $u_0 = 2$, $u_1 = 5/2$ และ

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

จงพิสูจน์ว่า

$$[u_n] = 2^{\frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)}$$

วิธีทำ เราเริ่มด้วยการทดลองหาพจน์แรก ๆ จำนวนหนึ่งก่อน เริ่มด้วย

$$u_1 = \frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2}$$

$$u_2 = u_1(u_0^2 - 2) - (2 + \tfrac{1}{2}) = (2 + \tfrac{1}{2})(2^2 - 2) - (2 + \tfrac{1}{2}) = 2 + \tfrac{1}{2}$$

$$u_3 = u_2(u_1^2 - 2) - (2 + \tfrac{1}{2}) = (2 + \tfrac{1}{2})\{(2 + \tfrac{1}{2})^2 - 2\} - (2 + \tfrac{1}{2}) = (2 + \tfrac{1}{2})(2^2 + \tfrac{1}{2^2}) - (2 + \tfrac{1}{2}) = 2^3 + \tfrac{1}{2^3}$$

$$u_4 = (2^3 + \tfrac{1}{2^3})\{(2 + \tfrac{1}{2})^2 - 2\} - (2 + \tfrac{1}{2}) = (2^3 + \tfrac{1}{2^3})(2^2 + \tfrac{1}{2^2}) - (2 + \tfrac{1}{2}) = 2^5 + \tfrac{1}{2^5}$$

$$u_5 = (2^5 + \tfrac{1}{2^5})\{(2^3 + \tfrac{1}{2^3})^2 - 2\} - (2 + \tfrac{1}{2}) = 2^{11} + \tfrac{1}{2^{11}}$$

ทำให้คาดเดาว่า

$$u_n = 2^{a_n} + 2^{-a_n}, \; a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$$

ซึ่งเราจะพิสูจน์ดังนี้

ขั้นแรกสังเกตว่า a_n เป็นจำนวนนับ ทั้งนี้เพราะ

$$2^n - (-1)^n \equiv (3-1)^n - (-1)^n \equiv 3k + (-1)^n - (-1)^n \equiv 0 \pmod 3$$

และประพจน์ที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริง สำหรับ n = 1, 2, 3, 4, 5 เมื่อใช้สมมุติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (2^{a_n} + 2^{-a_n})\{(2^{a_{n-1}} + 2^{-a_{n-1}})^2 - 2\} - (2 + \tfrac{1}{2}) \\ &= (2^{2a_n - 1} + 2^{-2a_n - 1})(2^{a_{n-1}} + 2^{-a_{n-1}}) - (2 + \tfrac{1}{2}) \\ &= 2^{a_n + 2a_{n-1}} + 2^{-a_n - 2a_{n-1}} + 2^{2a_{n-1} - a_n} + 2^{a_n - 2a_{n-1}} - 2 - 2^{-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น เราเพียงต้องพิจารณาระบบสมการ

$$a_n + 2a_{n-1} = a_{n+1}, \quad 2a_{n-1} - a_n = (-1)^n$$

ซึ่งตรวจสอบได้โดยง่ายว่าระบบนี้เป็นจริง

ดังนั้น จึงได้ว่า

$$u_n = 2^{\left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)} + 2^{-\frac{2^n - (-1)^n}{3}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

เพราะฉะนั้น

$$[u_n] = 2^{\left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)} \quad \text{ตามต้องการ}$$

ตัวอย่าง 3.3.5 (USAMO 1997) ให้ $p_1, p_2, p_3, \ldots$ เป็นจำนวนเฉพาะเรียงจากน้อยไปมาก และให้ $x_0 \in (0, 1)$ สำหรับจำนวนนับ k นิยาม

$$x_k := \begin{cases} 0 & , x_{k-1} = 0 \\ \left\{\dfrac{p_k}{x_{k-1}}\right\} & , x_{k-1} \neq 0 \end{cases},$$

เมื่อ $\{x\}$ แทนภาคเศษส่วนของ x (ซึ่งมีนิยามเป็น $\{x\} = x - [x]$ เมื่อ $[x]$ คือจำนวนเต็มค่ามากสุดที่ $\leq x$)
จงหา พร้อมพิสูจน์ ทุก $x_0 \in (0, 1)$ ที่ทำให้ลำดับ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ ในที่สุดแล้วเป็น 0 ทั้งหมด

วิธีทำ เราจะแสดงว่า ลำดับกลายเป็น 0 ในที่สุด ก็ต่อเมื่อ x_0 เป็นจำนวนตรรกยะ
ขั้นแรก เราจะพิสูจน์ว่า เมื่อ $k \geq 1$ ทุกพจน์ตรรกยะ x_k มีพจน์ก่อนหน้า x_{k-1} เป็นจำนวนตรรกยะเช่นกัน

สมมุติว่า x_k เป็นจำนวนตรรกยะ ถ้า $x_k = 0$ แล้ว $x_{k-1} = 0$ หรือไม่แล้ว $\dfrac{p_k}{x_{k-1}}$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม ได้ว่า x_{k-1} เป็นจำนวนตรรกยะ

ถ้า x_k เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เป็น 0 แล้วจากความสัมพันธ์

$$x_k = \left\{\frac{p_k}{x_{k-1}}\right\} = \frac{p_k}{x_{k-1}} - \left[\frac{p_k}{x_{k-1}}\right]$$

ได้ว่า x_{k-1} เป็นจำนวนตรรกยะ

จากการที่ทุกพจน์ตรรกยะ x_k, $k \geq 1$, มีพจน์นำหน้าเป็นจำนวนตรรกยะ โดยการอุปนัย ได้ว่า ถ้า x_k เป็นจำนวน ตรรกยะ สำหรับบาง k แล้ว x_0 ต้องเป็นจำนวนตรรกยะ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าลำดับกลายเป็น 0 ในที่สุด แล้ว x_0 ต้องเป็นจำนวนตรรกยะ

การพิสูจน์ในทิศตรงข้าม สังเกตว่า ถ้า $x_{k-1} = \frac{m}{n}$ เป็นจำนวนตรรกยะ $\in (0,1]$ โดยที่ $m > 0$ แล้ว $x_k = \frac{r}{m}$ เมื่อ r เป็นเศษเหลือ จากการหาร np_k ด้วย m

ดังนั้น ตัวส่วนของแต่ละพจน์ที่ไม่เป็น 0 มีค่าลดลงจากตัวส่วนของพจน์ก่อนหน้า โดยเฉพาะอย่างยิ่ง จำนวนของพจน์ไม่เป็น 0 ในลำดับจะไม่เกินค่าตัวส่วนของ x_0

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไป (ซึ่งรู้จักกันในนาม ทฤษฎีบทของบีตี้ (Beatty)) แสดงถึงความสัมพันธ์ลึกซึ้งระหว่าง จำนวนจริงอตรรกยะ ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม และการแบ่งกั้นเซตของจำนวนนับออกเป็นภาคจำนวนเต็มของจำนวนอตรรกยะ มีโจทย์สมการเชิงฟังก์ชันและโจทย์การเล่นเกมจำนวนไม่น้อย ที่สามารถแก้ได้ หรือ ทำความเข้าใจได้ดีขึ้น เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทนี้

ทฤษฎีบทของบีตี้ ให้ α และ β เป็นจำนวนอตรรกยะบวกที่มีสมบัติว่า $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$ แล้ว

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=1}^{\infty}[n\alpha] \bigcup_{m=1}^{\infty}[m\beta]$$

พิสูจน์ สังเกตว่า $\alpha \neq \beta$ ไม่เช่นนั้นแล้วจะได้ว่า $\alpha = \beta = 2$ ซึ่งไม่ใช่จำนวนอตรรกยะ
โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติว่า $\alpha > \beta > 0$

ดังนั้น $\frac{1}{\alpha}$ และ $\frac{1}{\beta}$ ต้องมีค่าน้อยกว่า 1 ทำให้ α และ β ต้องมีค่ามากกว่า 1
และจาก

$$1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{2}{\beta}$$

ได้ว่า $\beta < 2$ และจาก

$$1 = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} > \frac{2}{\alpha}$$

ได้ว่า $\alpha > 2$

ในการพิสูจน์ทฤษฎีนี้ เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า

1. $[n\alpha] \neq [k\alpha]$ และ $[n\beta] \neq [k\beta]$ สำหรับทุกจำนวนนับ n, k ที่ $n \neq k$
2. $[n\alpha] \neq [m\beta]$ สำหรับทุกจำนวน m, n
3. จำนวนของพหุคูณบวกของ α และ β ที่ $< n$ คือ $n-1$ กล่าวคือ

$$\left[\frac{n}{\alpha}\right]+\left[\frac{n}{\beta}\right]=n-1$$

พิสูจน์ 1. ให้ n, k เป็นจำนวนนับ โดยไม่เสียนัยทั่วไปให้ $n > k$

สมมุติว่า $[n\alpha] = [k\alpha]$

เนื่องจาก

$$n\alpha = [n\alpha] + r_1,\ 0 < r_1 < 1 \text{ และ } k\alpha = [k\alpha] + r_2,\ 0 < r_2 < 1$$

จะได้ว่า

$$0 < (n-k)\alpha = r_1 - r_2 < 1$$

แต่ $n - k \geq 1$ และ $\alpha > 1$ ทำให้ได้ว่า

$$1 < (n-k)\alpha < 1$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี β พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน ◆

พิสูจน์ 2. สมมุติว่า $[n\alpha] = [m\beta]$

ดังนั้น $n\alpha \neq m\beta$ เพราะไม่เช่นนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{m}{n}$$

แทนค่ากลับได้

$$1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{m}{n\alpha} = \left(1+\frac{m}{n}\right)\alpha$$

แสดงว่า α เป็นจำนวนตรรกยะซึ่งเป็นไปไม่ได้

ให้

$$n\alpha = [n\alpha] + r_1,\ 0 < r_1 < 1 \quad \text{และ}$$
$$m\beta = [m\beta] + s_1,\ 0 < s_1 < 1$$

พิจารณา $[n\alpha] = [m\beta]$

ดังนั้น จะมีจำนวนนับ t ที่ $t < n\alpha < t+1$ และ $t < m\beta < t+1$

กล่าวคือ

$$\frac{n}{t+1} < \frac{1}{\alpha} < \frac{n}{t} \text{ และ } \frac{m}{t+1} < \frac{1}{\beta} < \frac{m}{t}$$

ได้

$$\frac{n+m}{t+1} < 1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{n+m}{t}$$

สรุปว่า $t < n+m < t+1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
ดังนั้น

$$[n\alpha] \neq [m\beta]$$ ♦

พิสูจน์ 3. เนื่องจาก

$$n-2 = \left(\frac{n}{\alpha}-1\right) + \left(\frac{n}{\beta}-1\right) < \left[\frac{n}{\alpha}\right] + \left[\frac{n}{\beta}\right] < \frac{n}{\alpha} + \frac{n}{\beta} = n$$

ดังนั้น

$$\left[\frac{n}{\alpha}\right] + \left[\frac{n}{\beta}\right] = n-1$$ ♦

ตัวอย่างต่อไปนี้แสดงการประยุกต์ทฤษฎีบทของบีตี้

ตัวอย่าง 3.3.6 (IMO 1978) ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนจำนวนนับที่มีสมบัติว่า

1. $f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$, $g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$
2. $F \cap G = \varnothing$ และ $F \cup G = \mathbb{N}$ เมื่อ $F = \{ f(n) \mid n \in \mathbb{N} \}$, $G = \{g(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ และ
3. $g(n) = f(f(n)) + 1$ ทุกจำนวนนับ n ที่ $n \geq 1$

จงหาค่าของ f(240)

วิธีทำ (วิธีที่ 1 วิธีที่ไม่ใช้ทฤษฎีบทของบีตี้)

จาก $g(1) = f(f(1)) + 1 > 1$ จึงได้

$$f(1) = 1 \text{ และ } g(1) = 2$$

เราจะแสดงว่า ถ้า $f(n) = k$ แล้ว

(1). $f(k) = k + n - 1$

(2). $g(n) = k+n$

(3). $f(k+1) = k + n + 1$

เนื่องจากเซต $\{f(1),f(2),\ldots,f(k)\}$ และ $\{g(1),g(2),\ldots,f(n)\}$ เป็นเซตต่างสมาชิกกันที่ประกอบกันเป็นจำนวนนับทั้งหมดตั้งแต่ 1 ถึง g(n) (เพราะ $g(n) = f(f(n)) + 1 = f(k) + 1$) เมื่อนับจำนวนสมาชิกในเซตทั้งสองได้ว่า

$$g(n) = k + n = f(n) + n$$

แสดงว่า (2) เป็นจริง
ซึ่งแสดงว่า (1) เป็นจริงด้วยเพราะ $k + n = g(n) = f(k) + 1$

จาก g(n) – 1 = f(f(n)) แสดงว่า g(n) – 1 เป็นสมาชิกของ F
แสดงว่าสมาชิกที่อยู่ถัดกันสองจำนวนจะเป็นสมาชิกของ G พร้อมกันไม่ได้
เนื่องจาก k + n ∈ G จึงให้ว่า k + n – 1 และ k + n + 1 เป็นสมาชิกของ F จึงเป็นสมาชิกของ F ที่อยู่ต่อจากกัน โดย (1) จึงได้ว่า

$$f(k + 1) = k + n + 1$$

แสดงว่า (3) เป็นจริง

เมื่อใช้ (1),(2),(3) และ f(1) = 1, g(1) = 2 ได้ว่า

f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 6, f(6) = 9, f(9) = 14,
f(14) = 22, f(22) = 35, f(35) = 56, f(56) = 90, f(90) = 145,
f(145) = 234, f(234) = 378, ...

แสดงว่า f(240) ไม่อยู่ในลำดับนี้ สังเกตด้วยว่า (3) ให้ค่าที่สูงขึ้น เช่นจาก f(145) = 234 ได้ f(235) = 380
เมื่อใช้ (3) กับ f(56) = 90 และจำนวนที่ตามมาได้

$$f(91) = 147,\ f(148) = 239 \text{ และ } f(240) = 388$$

วิธีทำ (**วิธีที่ 2** ใช้ทฤษฎีบทของบีตี้)

เราคาดว่าจะมีจำนวนจริง α และ β ที่ทำให้ $F= \{[n\alpha] \mid n \in \mathbb{N}\}$ และ $G = \{[n\beta] \mid n \in \mathbb{N}\}$
สังเกตว่า g(n) = f(n) + n ทุกจำนวนนับ n ซึ่งพิสูจน์ได้โดยให้ n เป็นจำนวนนับ สมมุติว่า f(n) = k
จากที่ g(n) = f(f(n)) + 1 จะได้ว่า

$$F_1= \{f(1),f(2),\ldots,f(k)\} \text{ และ } G_1=\{g(1),g(2),\ldots,g(n)\}$$

เป็นเซตที่

$$F_1 \cap G_1 = \phi \text{ และ } F \cup G = \{1,2,\ldots,g(n)\}$$

โดยเหตุผลเช่นกันกับวิธีที่ 1 ได้ว่า

$$g(n) = k + n = f(n) + n$$

ต่อไปจะทำการหาจำนวนจริง α และ β ถ้าให้ f(n) = [nα] และ g(n) = [nβ] จะได้ว่า

$$[n\beta] = g(n) = f(n) + n = [n\alpha] + n = [n\alpha + n]$$

ซึ่งเป็นจริงทุกจำนวนนับ n ก็ต่อเมื่อ $n\beta = n\alpha + n$ นั่นคือ $\beta = \alpha + 1$

จาก $1 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ได้ $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ เราจึงเลือก α ที่เป็นค่าบวกคือ $\alpha = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ และได้ $\beta = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$
ดังนั้น $f(240) = [240\alpha] = [240\{1/2\ (1+\sqrt{5})\}] = [120 + 120\sqrt{5}] = 120 + 268 = 388$

มีข้อสังเกตเพิ่มเติมที่เกี่ยวข้องระหว่างจำนวนอตรรกยะกับความหนาแน่นของภาคเศษส่วนของจุดบนเส้นจำนวนที่เกี่ยวข้องและน่าสนใจดังนี้คือ

"สำหรับจำนวนอตรรกยะ α ใดๆ ถ้าให้ $a_n = \{n\alpha \bmod 1\} \in [0,1)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ใดๆ แล้วจะได้ว่าเซต $\{a_n: n\in \mathbb{N}\}$ จะหนาแน่นใน [0,1]"

พิสูจน์ เราจะต้องแสดงว่าสำหรับจำนวนจริง b ในช่วง [0,1] และทุกจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะต้องมีสมาชิก a_k ใน $\{a_n: n\in \mathbb{N}\}$ ที่ $|a_k - b| < \varepsilon$ ในที่นี้จะอาศัยหลักของอาคีมีเดียน

ให้ M เป็นจำนวนนับที่โตมากพอ จากหลักการรังนกพิราบ (Pigeonhole Principle) ได้ว่าจะมีจำนวนนับ $p,q \in \{1,2, \ldots, M+1\}$ ที่ a_p และ a_q อยู่ในช่วงย่อย $[\frac{i}{M}, \frac{i+1}{M})$ เดียวกันบางจำนวนนับ i ที่ $0 \le i \le M-1$

สมมุติว่า $p < q$ แล้วจะได้ว่า $(q-p)\alpha$ จะสมภาคมอดูโล 1 (congruent modulo 1) กับจำนวนจริง r ที่ $|r| < \frac{1}{M}$ เนื่องจาก α เป็นจำนวนอตรรกยะ ได้ว่า $r \neq 0$ ถ้า $b \in [\frac{j}{M}, \frac{j+1}{M})$ แล้ว

$$|j(q-p)\alpha \pmod 1 - b| = |jr - b| \le \frac{1}{M} \le \varepsilon$$

ซึ่งได้ $a_j(q-p)$ ตามต้องการ ♦

แบบฝึกหัด

1. จงหา $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$h(h(n)) + h(n+1) = n + 2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

2. จงพิสูจน์ว่า เมื่อ n แปรไปเหนือเซตของจำนวนนับ แล้วฟังก์ชัน

$$f(n) := [n + \sqrt{\tfrac{n}{3}} + \tfrac{1}{2}]$$

จะแปรไปเหนือจำนวนนับทั้งหมด ยกเว้นจำนวนที่อยู่ในลำดับ $a_n = 3n^2 - 2n$

3. จงพิสูจน์ว่า เมื่อ n แปรไปเหนือเซตของจำนวนนับ แล้วฟังก์ชัน

$$f(n) := [n + \sqrt{3n} + \tfrac{1}{2}]$$

จะแปรไปเหนือจำนวนนับทั้งหมด ยกเว้นจำนวนที่อยู่ในลำดับ $a_n = [(n^2 + 2n)/3]$

4. (AMOC 93) ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ มีนิยามเป็น

$$f(n) = [2\sqrt{n}] - [\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}]$$

จงหาค่าของ n ทั้งหมดที่ ทำให้ $f(n) = 1$

5. ให้ r เป็นรากบวกของสมการ

$$x^2 - 1989x - 1 = 0$$

จงพิสูจน์ว่าสมการ

$$[\, m + 1989r\,[rn]\,] = 1989n + (1989^2 + 1)[rn]$$

มีราก n เป็นจำนวนอนันต์

6. เมื่อ m เป็นจำนวนนับ นิยามฟังก์ชัน f(m) เป็นกำลังสูงสุดของ 2 ที่หาร m! ได้ลงตัว จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนนับ m เป็นจำนวนอนันต์ที่ทำให้

$$m - f(m) = 1989$$

7. (Putnam 1983) จงพิสูจน์หรือหาตัวอย่างค้านว่า มีจำนวนจริงบวก u ที่ทำให้

$[u^n] - n$ เป็นจำนวนเต็มคู่ สำหรับทุกจำนวนนับ n

8. (Putnam 1983) ให้ $f(n) = n + [\sqrt{n}\,]$ จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนนับ m ลำดับ

$$m,\ f(m),\ f(f(m)),\ f(f(f(m))),\ldots$$

บรรจุอย่างน้อยจำนวนเต็มที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์จำนวนหนึ่ง

3.4 โดเมนเป็นเซตของจำนวนเต็ม

เมื่อโดเมนของฟังก์ชันคำตอบเป็นเซตของจำนวนเต็ม สมบัติที่เอ่ยถึงในกรณีเซตของจำนวนนับ มีความแตกต่างออกไปบ้าง ดังนี้

- สมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ สมบัติไตรวิภาค ยังคงเป็นจริง
- สมบัติการแยกตัวประกอบได้หนึ่งเดียวเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ ถ้าจะใช้กับจำนวนเต็มลบแนวทางหนึ่งคือให้ใช้กับจำนวนนับ แล้วคูณด้วย - 1
- สมบัติการใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ โดยปรกติแล้ว ทำไม่ได้เหนือเซตของจำนวนเต็ม เว้นเสียแต่ว่ามีข้อกำหนดเพิ่มเติม หรือ มีการจัดรูป หรือ การปรับแต่งให้เหมาะสมในโจทย์บางข้อ ซึ่งต้องพิจารณาเฉพาะรายไป
- สมบัติการจัดอันดับดี ไม่เป็นจริง เพราะไม่มีจำนวนเต็มใดที่มีค่าน้อยสุด
- สมบัติการมีขั้นตอนวิธีของการหาร ปรับเปลี่ยนเป็น ให้ n, k ($\neq 0$) เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น เขียนได้ว่า

$$n = ak + r \text{ เมื่อ } a \in \mathbb{Z},\ 0 \leq r \leq |k| - 1$$

- สมบัติการเขียนได้ในรูปเลขฐาน เช่นกันกับสมบัติการแยกตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะ ถ้าจะใช้จำนวนเต็มลบ แนวทางหนึ่ง คือให้ใช้กับจำนวนนับ แล้วคูณด้วย -1

อย่างไรก็ตาม วิธีการแก้โจทย์ในกรณีนี้ ส่วนใหญ่แล้วคล้ายกับในกรณีโดเมนเป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง 3.4.1 (Putnam 1992) จงพิสูจน์ว่า $f(n) = 1 - n$ เป็นเพียงฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(f(n)) = n \qquad (n \in \mathbb{Z})$

(ii) $f(f(n + 2) + 2) = n \qquad (n \in \mathbb{Z})$

(iii) $f(0) = 1$

วิธีทำ ถ้า $f(n) = 1 - n$ แล้ว

$$f(f(n)) = f(1 - n) = 1 - (1 - n)) = n$$

ดังนั้น (i) เป็นจริง ในทำนองเดียวกัน

$$f(f(n + 2) + 2) = f((-n - 1) + 2) = f(1 - n) = n$$

ดังนั้น (ii) เป็นจริง ในขณะที่ (iii) เป็นจริงอย่างชัดเจน
เพราะฉะนั้น f สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดทั้งสามข้อ

ในทำนองกลับกัน สมมุติว่า f สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามที่กำหนดให้ โดย (iii), (i) ได้

$$f(0) = 1, f(1) = 0$$

โดย (ii)

$$f(f(f(n + 2) + 2)) = f(n)$$

เมื่อใช้ (i) ได้

$$f(n + 2) + 2 = f(n)$$

ซึ่งให้

$$f(n + 2) = f(n) - 2$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ได้ว่า $f(n) = 1 - n$ ตามต้องการ

ตัวอย่าง 3.4.2 (German MC) จงหา $f : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f((x + y)/3) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(y)\} \qquad (x, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร $x = z, y = 2z$ $(z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ในสมการเชิงฟังก์ชันให้

$$f(z) = \frac{1}{2}\{f(z) + f(2z)\}$$

ซึ่งชี้ว่า $f(2z) = f(z)$
ในทำนองเดียวกัน เปลี่ยนตัวแปร $x = y = 3z$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ให้ว่า

$$f(3z) = f(2z) = f(z)$$

เราจะพิสูจน์โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ว่า สำหรับ $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ เรามีว่า

"$f(kz) = f(z)$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}$"

กรณี $k = 1, 2, 3$ ได้แสดงข้างต้นว่าเป็นจริง

สมมุติว่าประพจน์นี้เป็นจริงสำหรับ k =1, 2, ... , K
เปลี่ยนตัวแปร x = 3Kz, y = 3z ให้ว่า

$$\frac{(x+y)}{3} = (K+1)z$$

โดยสมมุติฐานของการอุปนัยได้ว่า

$$f(x) = f(3Kz) = f(Kz) = f(z),\ f(y) = f(3z) = f(z)$$

เมื่อใช้ร่วมกับสมการเชิงฟังก์ชันให้

$$f((K+1)z) = \frac{1}{2}\{f(z) + f(z)\} = f(z)$$

กล่าวคือ ประพจน์เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ k
จากประพจน์ดังกล่าว สรุปได้ว่า เมื่อ z > 0 แล้ว

$$f(z) = f(1)$$

ในขณะที่ เมื่อ z < 0 แล้ว

$$f(z) = f(-1)$$

แทนค่า x = -3, y = 6 ซึ่งให้

$$\frac{x+y}{3} = 1$$

เมื่อใช้ร่วมกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(1) = \frac{1}{2}\{f(-3) + f(6)\} = \frac{1}{2}\{f(-1) + f(1)\}$$

ซึ่งแสดงว่า

$$f(-1) = f(1)$$

เพราะฉะนั้น f ต้องเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวเท่านั้น

ตัวอย่าง 3.4.3 (German MC) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) = f(x^2 + x + 1)$$

ก. เมื่อกำหนดเพิ่มเติมว่า f เป็นฟังก์ชันคู่ กล่าวคือ f(x) = f(-x)
ข. เมื่อกำหนดเพิ่มเติมว่า f เป็นฟังก์ชันคี่ กล่าวคือ f(x) = -f(-x)

วิธีทำ ก. เปลี่ยนตัวแปร x = -y – 1 ในสมการเชิงฟังก์ชันและใช้ความเป็นฟังก์ชันคู่ ได้

$$f(y+1) = f(-y-1) = f((-y-1)^2 + (-y-1) + 1) = f(y^2 + 2y + 1 - y - 1 + 1) = f(y^2 + y + 1) \quad (3.4.3.1)$$

เปลี่ยนตัวแปร x = y ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(y^2 + y + 1) = f(y) \quad (3.4.3.2)$$

สมการ (3.4.3.1) และ (3.4.3.2) ร่วมกันให้ว่า สำหรับทุก $y \in \mathbb{Z}$

$$f(y) = f(y^2 + y + 1) = f(y+1) \quad (3.4.3.3)$$

ให้ $f(0) = c \in \mathbb{R}$ จาก (3.4.3.3) เมื่อแทนค่า y = 0, 1, 2, ... ได้ว่า

f(x) = c สำหรับทุกจำนวนเต็มไม่ติดลบ x

และจากความเป็นฟังก์ชันคู่ ได้ว่า

$$f(x) = c \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{Z}$$

แสดงว่าฟังก์ชันคำตอบในกรณีนี้ คือ ฟังก์ชันค่าคงตัว

ข. **(วิธีที่หนึ่ง)** โดยวิธีเดียวกันกับในข้อ ก. และใช้ความเป็นฟังก์ชันคี่ได้ว่า

$$f(y) = f(-y - 1) = - f(y + 1) \qquad (3.4.3.4)$$

แทนค่า x = -1 ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(-1) = f(1)$$

เมื่อใช้ร่วมกับความเป็นฟังก์ชันคี่ ได้

$$f(-1) = -f(-1)$$

ซึ่งชี้ว่า f(-1) = 0 และทำให้ f(1) = 0

จากนี้ใช้การอุปนัย ร่วมกับสมการ (3.4.3.4) และความเป็นฟังก์ชันคี่ จะได้ว่า

$$f(x) = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{Z}$$

ข. **(วิธีที่สอง)** จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(x - 1) = f((x - 1)^2 + (x - 1) + 1) = f(x^2 - x + 1)$$

และ

$$f(-x) = f((-x)^2 + (-x) + 1) = f(x^2 - x + 1)$$

เมื่อใช้ร่วมกับความเป็นฟังก์ชันคี่ ให้ว่า

$$f(x) = - f(-x) = -f(x^2 - x + 1) = -f(x - 1)$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์นี้ซ้ำ จะได้

$$f(x) = - f(x - 1) = f(x - 2) \qquad (3.4.3.5)$$

ซึ่งแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคาบที่มีคาบเป็น 2

จากความเป็นฟังก์ชันคี่ได้ f(0) = 0 แทนค่า x = 1 ใน (3.4.3.5) ได้

$$f(1) = -f(0) = 0 = f(-1)$$

แสดงว่า ทุกค่าในหนึ่งคาบ เป็น 0

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{Z})$$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงหาฟังก์ชัน $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า

$$h(x + y) + h(xy) = h(x)h(y) + 1 \qquad (x, y \in \mathbb{Z})$$

วิธีทำ แทนค่า (x, y) = (0, 0) ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$(h(0))^2 - 2h(0) + 1 = 0$$

ซึ่งให้ว่า h(0) = 1

แทนค่า (x, y) = (1, -1) ลงในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$h(0) + h(-1) = h(1)h(-1) + 1$$

กล่าวคือ

$$h(-1)\{1 - h(1)\} = 0$$

ซึ่งให้ว่า

$$h(-1) = 0 \text{ หรือ } h(1) = 1$$

ถ้า $h(-1) = 0$ แทนค่า $(x, y) = (2, -1)$ และแทนค่า $(x, y) = (-2, 1)$ ลงในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$h(1) + h(-2) = 1,\ h(-2) = h(-2)h(1) + 1$$

ใช้ค่า $h(-2)$ จากสมการแรกแทนลงในสมการหลังได้

$$1 - h(1) = \{1 - h(1)\}h(1) + 1$$

ซึ่งคือ

$$(h(1))^2 - 2h(1) = 0$$

ซึ่งแสดงว่า

$$h(1) = 0 \text{ หรือ } h(1) = 2$$

จึงสรุปได้ว่า $h(1)$ มีค่าที่เป็นไปได้เพียงสามค่าได้แก่ 0, 1, 2

แทนค่า $y = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน และพิจารณาค่าที่เป็นไปได้ทั้งสามของ $h(1)$ พบว่าฟังก์ชันคำตอบที่เป็นไปได้ คือ

1) $h(n) = 1$ $(n \in \mathbb{Z})$ หรือ
2) $h(2n) = 1,\ h(2n+1) = 0$ $(n \in \mathbb{Z})$ หรือ
3) $h(n) = n + 1$ $(n \in \mathbb{Z})$

เมื่อตรวจคำตอบพบว่า ฟังก์ชันทั้งสามสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันจริง

ตัวอย่าง 3.4.5 พิจารณา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ที่มีสมบัติว่า สำหรับทุกจำนวนเต็ม x

$$f(92 + x) = f(92 - x)$$
$$f(19\cdot92 + x) = f(19\cdot92 - x) \qquad (19\cdot92 = 1748)$$
$$f(1992 + x) = f(1992 - x)$$

ถามว่า เป็นไปได้หรือไม่ ที่ว่า ทุกจำนวนเต็มบวกที่เป็นตัวหารของ 92 ปรากฏเป็นค่าของ f

วิธีทำ เราจะแสดงว่า เป็นไปไม่ได้

เราเริ่มด้วยข้อสังเกตที่ว่า สำหรับ a, b ที่เป็นจำนวนเต็มที่ต่างกัน ถ้า f สอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$f(a + x) = f(a - x),\ f(b + x) = f(b - x) \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

แล้ว f เป็นฟังก์ชันคาบ ที่มีคาบเป็น $t = 2(a - b)$ ซึ่งตรวจสอบได้ดังนี้

$$f(x + t) = f(a + (x + a - 2b)) = f(a - (x + a - 2b))$$

$$= f(-x+2b) \qquad = f(b-(x-b))$$
$$= f(b+(x-b)) \qquad = f(x)$$

แทนค่า a = 1992, b = 92 และ a = 1992, b = 19·92 ซึ่งให้ค่า t ที่สอดคล้องกันเป็น

$$t_1 = 8{\cdot}475 \text{ และ } t_2 = 8{\cdot}61$$

ตามลำดับ

เนื่องจากตัวหารร่วมมากของ t_1, t_2 คือ 8 จึงได้ว่า มีจำนวนเต็ม k_1, k_2 ที่ทำให้

$$8 = k_1t_1 + k_2t_2$$

เนื่องจาก ฟังก์ชัน f มีคาบเป็น t_1 และ t_2 ดังนั้น จะมีคาบเป็น $k_1t_1 + k_2t_2 = 8$ ด้วยเช่นกัน เพราะฉะนั้น ค่าของฟังก์ชันในช่วงของจำนวนที่อยู่ถัดกัน 8 จำนวน {88, 89,... ,94, 95} จะได้รับการเวียนซ้ำไปทั่วเซตของจำนวนเต็ม

เนื่องจาก f(91) = f(93), f(90) = f(94), f(89) = f(95) แสดงว่า มีอย่างมากเพียงห้าค่าของฟังก์ชันที่ต่างกัน ในขณะที่ 92 = $2^2{\cdot}23$ มีตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกถึงหกจำนวน แสดงว่า เป็นไปไม่ได้ที่ทุกตัวหารของ 92 จะปรากฏเป็นค่าของฟังก์ชัน f

ตัวอย่าง 3.4.6 ให้ $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \le a \le b$, $M := [\frac{a+b}{2}]$ นิยามฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ โดย

$$f(n) = \begin{cases} n+a, & n < M \\ n-b, & n \ge M \end{cases}$$

ให้ $f^1(n) := f(n)$, $f^{j+1}(n) := f(f^j(n))$, $j = 1, 2, \ldots$. จงหาจำนวนเต็มบวกค่าน้อยสุด k ที่ทำให้ $f^k(0) = 0$

วิธีทำ เราจะพิจารณาก่อนอื่น กรณีที่ (a, b) = 1

ให้ $S := \{n \in \mathbb{Z} ; M - b \le n \le M + a - 1\}$ ดังนั้น

$$f(S) \subseteq S \text{ และ } 0 \in S$$

สมมุติว่า $k \ge 1$ และ $f^k(0) = 0$

จาก f(m) = m + a หรือ f(m) = m – b เราได้ว่า k สามารถเขียนได้ในรูป

$$k = r + s \text{ โดยที่ } ra - sb = 0$$

จะเห็นว่า ra = sb กล่าวคือ b | ra และ a | sb

แต่เนื่องจาก a, b เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน จึงได้ว่า

$$b \mid r \text{ และ } a \mid s$$

นั่นคือ $b \le r$ และ $a \le s$ ซึ่งได้

$$k = r + s \ge a + b$$

ในทำนองกลับกัน ถ้า $f^k(0) = ra - sb$ โดยที่ $r + s = k = a + b$ แล้ว

$$f^k(0) = ra - sb = (a+b-s)a - sb = (a+b)(a-s)$$

จาก $f^{a+b}(0) \in S$ และจากการที่มีเพียงพหุคูณเดียวของ a + b ที่อยู่ใน S ซึ่งคือ 0 เราได้ว่า

$$f^{a+b}(0) = 0$$

สรุปได้ว่า ถ้า (a, b) = 1 แล้วจำนวนเต็มบวกค่าน้อยสุด k ที่ทำให้ $f^k(0) = 0$ คือ k = a + b

ในกรณีทั่วไป ขอละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับผู้อ่านตรวจสอบว่า จำนวนเต็มบวกค่าน้อยสุด คือ $k = \frac{a+b}{(a,b)}$

ตัวอย่าง 3.4.7 ให้ $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้

(a) $f(m + f(f(n))) = - f(f(m + 1)) - n \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$

(b) g เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และ $g(n) = g(f(n)) \quad (n \in \mathbb{Z})$

จงหาค่าของ f(1991) และหารูปทั่วไปของ g

วิธีทำ ให้ $f^2(n) := f(f(n))$ แทน m ด้วย $f^2(m)$ ใน (a) ได้

$$f(f^2(m) + f^2(n)) = - f^2(f^2(m) + 1) - n$$

สลับ m กับ n ได้

$$f(f^2(n) + f^2(m)) = - f^2(f^2(n) + 1) - m$$

เมื่อใช้ทั้งสองความสัมพันธ์หลังนี้พร้อมกันพบว่า

$$f^2(f^2(m) + 1) - f^2(f^2(n) + 1) = m - n$$

จาก (a) ได้ด้วยว่า

$$f^2(f^2(m) + 1) = f(f(f^2(m) + 1)) = f(-m - f^2(2))$$

ในทำนองเดียวกัน

$$f^2(f^2(n) + 1) = f(-n - f^2(2))$$

ให้ $f^2(2) := k$ ได้

$$f(-m - k) - f(-n - k) = m - n \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

เปลี่ยนตัวแปร m ด้วย $-m - k$ และ n ด้วย $-k$ ได้

$$f(m) - f(0) = -m - k + k = - m$$

ดังนั้น

$$f(m) = - m + f(0) \quad (m \in \mathbb{Z})$$

และ ได้ว่า

$$f(f(m)) = -f(m) + f(0) = m - f(0) + f(0) = m$$

ซึ่งแสดงว่า

$$f^2(m) = m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

เมื่อแทนเข้าไปใน (a) ได้

$$f(m + n) = -m - 1 - n \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

แทนค่า m = 0 ให้

$$f(n) = -n - 1 \quad (n \in \mathbb{Z})$$

เพราะฉะนั้น

$$f(1991) = -1992$$

จาก (b) ได้

$$g(n) = g(-n - 1) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

เนื่องจาก g เป็นพหุนาม ดังนั้น

$$g(x) = g(-x - 1) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

จากการที่พหุนามใน x สามารถเขียนได้เป็นพหุนามใน x + r สำหรับจำนวนจริง r เมื่อใช้ $r = \frac{1}{2}$ จะได้

$$g(x) = P(x + \tfrac{1}{2})$$

เปลี่ยนตัวแปร x เป็น –x – 1 ได้

$$g(-x - 1) = P(-x - \tfrac{1}{2})$$

ซึ่งให้ว่า

$$P(x + \tfrac{1}{2}) = P(-x - \tfrac{1}{2})$$

ดังนั้น g เป็นพหุนามใน $(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$ จึงเป็นพหุนามใน $x^2 + x$ ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$g(n) = a_0 + a_1 n(n + 1) + a_2 n^2(n + 1)^2 + \ldots + a_p n^p (n + 1)^p$$

โดยที่ทุก $a_i \in \mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 3.4.8 (AMOC 1989) จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(k + n) + f(k - n) = 2f(k)f(n) \qquad (k, n \in \mathbb{Z})$

(ii) มีจำนวนเต็ม N ที่มีสมบัติว่า $-N < f(n) < N$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

วิธีทำ แทนค่า k = n = 0 ใน (i) ได้

$$2f(0)\{f(0) - 1\} = 0$$

ดังนั้น f(0) = 0 หรือ 1

- **กรณี f(0) = 0:** แทนค่า n = 0 ใน (i) ได้

$$2f(k) = 2f(k)f(0)$$

ดังนั้น

$$f(k) = 0 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } k$$

- **กรณี f(0) = 1:** แทนค่า k = 0 ใน (i) ได้

$$f(n) + f(-n) = 2f(0)f(n)$$

ดังนั้น

$$f(n) = f(-n)$$

จึงเพียงพอที่จะหา f(n) เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
แทน k = n ใน (i) ได้

$$f(2n) + f(0) = 2\{f(n)\}^2$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(2n) = 2\{f(n)\}^2 - 1 \qquad (3.4.8.1)$$

แทน n = 1 ใน (i) ได้

$$f(k + 1) + f(k - 1) = 2f(k)f(1)$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(k + 1) = 2f(k)f(1) - f(k - 1) \qquad (3.4.8.2)$$

จาก (3.4.8.2) เห็นว่า ค่าของ f กำหนดได้ชัดเจน เมื่อเราทราบค่า f(1)
สมมุติว่า $f(1) \geq 2$ หรือ $f(1) \leq -2$

จาก (3.4.8.1), (3.4.8.2) ได้

$$f(2) = 2\{f(1)\}^2 - 1 \geq 7, \quad f(2^2) = 2\{f(2)\}^2 - 1 \geq 97$$

เราจะแสดงโดยการอุปนัยว่า

$$f(2^m) \geq m + 1 \ (m \in \mathbb{N})$$

ประพจน์นี้เป็นจริงเมื่อ m = 1 จากที่เพิ่งแสดงข้างต้น

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริง ณ r จาก (3.4.8.1) ได้

$$f(2^{r+1}) = 2\{f(r)\}^2 - 1 \geq 2(r + 1)^2 - 1 \geq (r + 1) + 1$$

ดังนั้นประพจน์เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนนับ m แสดงว่า $f(2^m)$ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตพร้อมกับ m ซึ่งขัดแย้งกับเงื่อนไข (ii) เพราะฉะนั้น จึงต้องได้ว่า

$$f(1) = 0, 1 \text{ หรือ } -1$$

- **ถ้า f(1) = 1 :** แล้ว จาก (3.4.8.2) ได้

$$f(k + 1) = 2f(k) - f(k - 1)$$

ซึ่งให้

$$f(2) = 2 - 1 = 1, f(3) = 2 - 1 = 1, \ldots,$$

กล่าวคือ

$$f(n) = 1 \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

- **ถ้า f(1) = -1 :** แล้ว จาก (3.4.8.2) ได้

$$f(k + 1) = -2f(k) - f(k - 1)$$

ซึ่งให้

$$f(2) = -2f(-1) - 1 = 1,\ f(3) = -2(1) - (-1) = -1,\ f(4) = -2(-1) - 1 = 1,\ \ldots$$

โดยการอุปนัย ได้ว่า

$$f(n) = (-1)^n$$

- **ถ้า f(1) = 0 :** แล้ว จาก (3.4.8.2) ได้

$$f(k + 1) = -f(k - 1)$$

ซึ่งให้

$$f(2) = -f(0) = -1,\ f(3) = -f(1) = 0,\ f(4) = -f(2) = 1,\ \ldots$$

กล่าวคือ

$$f(4m) = 1,\ f(4m + 1) = 0,\ f(4m + 2) = -1,\ f(4m + 3) = 0$$

แบบฝึกหัด

1. (South African MO 1998) จงหา $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$3f(x) - 2f(f(x)) = x \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

2. (Romanian MC 2001) พิจารณา $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m^2 + f(n)) = \{f(m)\}^2 + n \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

จงแสดงว่า (a) $f(0) = 0$ (b) $f(1)$ (c) $f(n) = n$ $(n \in \mathbb{Z})$

3. (Romanian MC 2001)

(a) ให้ $f, g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั้งคู่ จงแสดงว่า ไม่มีฟังก์ชันทั่วถึง $h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

$$h(x) = f(x)g(x) \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

(b) ให้ $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จงแสดงว่ามีฟังก์ชันทั่วถึงคู่หนึ่ง $g, h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ที่ทำให้

$$f(x) = g(x)h(x) \quad (x \in \mathbb{Z})$$

4. (South African MO 2002) ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนนับ และ $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ มีสมบัติว่า

$$f(x) = 1 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } x < 0$$

และ $f(x) = 1 - f(x - a_1)f(x - a_2)\ldots f(x - a_n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $x \geq 0$

จงแสดงว่า มีจำนวนนับ s, t ที่มีสมบัติว่า $f(x + t) = f(x)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $x > s$

5. (Albanian MO 2001) ให้ $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 1$ เมื่อ $x \in \mathbb{Z}$
จงหาฟังก์ชัน g ที่

$$(g(x))^2 \leq f(x) \leq (g(x) + 1)^2 \qquad \text{ทุก } x \in \mathbb{Z}$$

6. (AMOC Senior Contest 1997) ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนเต็มและนิยามโดย

$$f(0) = 1$$
$$f(n) = 0 \qquad \text{ถ้า } -5 \leq n \leq -1$$
$$f(n) = f(n-6) + n \qquad \text{สำหรับจำนวนเต็ม } n \text{ ที่เหลือ}$$

จงแสดงว่า

$$\frac{(n+1)(n+5)}{12} \leq f(n) \leq \frac{n^2 + 6n + 12}{12} \qquad \text{จริงทุกจำนวนเต็ม } n$$

7. จงพิจารณาว่ามีฟังก์ชัน $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ที่มีสมบัติว่า สำหรับ $k = 0,1,\ldots,1996$ และ ทุกจำนวนเต็ม m สมการ $f(x) + kx = m$ มี x ที่สอดคล้องอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ

8. จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m + n) + f(m)f(n) = f(mn + 1) \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

9. จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า

$$f(m + n) + f(mn) = f(m)f(n) + 1$$

10. จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า $f(0) = 1$ และ

$$f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

11. จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า $f(1) = 1$ และ

$$f(m + n)\{f(m) - f(n)\} = f(m - n)\{f(m) + f(n)\} \; (m, n \in \mathbb{Z})$$

12. จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันมีขอบเขต และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(m + n) + f(m - n) = 2f(m)f(n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

13. จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า

$$f(a^3 + b^3 + c^3) = \{f(a)\}^3 + \{f(b)\}^3 + \{f(c)\}^3 \qquad (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

14. จงหา $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า

$$f(m + n) + f(mn - 1) = f(m)f(n) + 2 \qquad (m, n \in \mathbb{Z})$$

บทที่ 4
สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง

ในบทที่ผ่านมา เราศึกษาการหาฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยของเซตของจำนวนเต็ม สมบัติที่ใช้เสมอสำหรับการแก้สมการเชิงฟังก์ชันเมื่อโดเมนเป็นจำนวนนับคือ สมบัติการใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ และ สมบัติการจัดอันดับดี แต่ในกรณีโดเมนเป็นจำนวนเต็มพบว่าใช้สมบัติการจัดอันดับดีไม่ได้ ยกตัวอย่างเช่น เซตของจำนวนติดลบทั้งหมดซึ่งเป็นเซตย่อยของจำนวนเต็มไม่มีสมาชิกค่าน้อยสุด แต่สมบัติการใช้การอุปนัยทางคณิตศาสตร์ยังคงใช้ได้ โดยที่ขั้นฐานอาจเริ่มที่จำนวนติดลบ(ที่ดรึง) ได้โดยไม่จำเป็นต้องเริ่มที่ศูนย์

ในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง หรือเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง (เช่น เซตของจำนวนดรรกยะ) สมบัติที่สามารถนำมาใช้ได้ มีบางส่วนเหมือนกับในกรณีเซตของจำนวนเต็ม ได้แก่

(ส1) สมบัติปิดภายใต้การบวกและการคูณ

(ส2) สมบัติไตรวิภาค กล่าวคือ จากจำนวนนับสองจำนวน สามารถจำแนกได้ว่าจำนวนทั้งสอง เท่ากัน หรือถ้าไม่เท่ากัน จำนวนใดมากกว่า หรือน้อยกว่าอีกจำนวนหนึ่งได้

ส่วนสมบัติอื่นซึ่งเป็นสมบัติเฉพาะของจำนวนเต็ม สามารถนำมาใช้ได้ในกรณีที่ตัวแปรที่พิจารณาแปรไปเหนือเซตของจำนวนเต็มเท่านั้น อย่างไรก็ตาม เหนือเซตย่อยที่หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง แนวคิดว่าด้วยความต่อเนื่องของฟังก์ชัน หรือแนวคิดว่าด้วยลิมิตของค่าฟังก์ชันเหนือลำดับที่ลู่เข้า ที่เอ่ยถึงในบทที่ 1 มีความหมาย และเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพสูง ซึ่งมักนิยมใช้อยู่เสมอ สังเกตด้วยว่าสมบัติที่ไม่มีในจำนวนเต็มแต่มีในจำนวนจริง ที่สำคัญอีกสมบัติหนึ่ง คือ การมีจำนวนจริงเป็นจำนวนอนันต์ ที่อยู่ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนที่แตกต่างกัน สิ่งนี้บางครั้งเรียกกันว่า สมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริง สมบัติอื่นๆ ที่อาจนำไปใช้ได้ เช่น การมีตัวผกผันของจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์กล่าวคือ ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์แล้วจะมี y ที่ทำให้ $xy = 1$ และ จำนวนจริงยกกำลังสองต้องมีค่าไม่ติดลบ เป็นต้น

4.1 โดเมนเป็นเซตของจำนวนตรรกยะ

เมื่อพิจารณาฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนตรรกยะ วิธีการทางทฤษฎีจำนวนยังสามารถใช้ได้กับตัวเศษ และตัวส่วนของตัวแปรที่เป็นจำนวนตรรกยะ อย่างไรก็ตาม แม้ว่าเซตของจำนวนตรรกยะจะหนาแน่นในเซตของจำนวนจริง แต่มีข้อแตกต่างที่สำคัญยิ่งข้อหนึ่งระหว่างเซตทั้งสอง ซึ่งคือ เซตของจำนวนตรรกยะเป็นเพียงเซตอนันต์ที่นับได้ (countable) ในขณะที่เซตของจำนวนจริงเป็นเซตอนันต์นับไม่ได้ (uncountable)

ตัวอย่าง 4.1.1 จงหา $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x + y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1 \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$$

วิธีทำ ให้ $f(x) = 1 + g(x)$ ดังนั้นสมการเชิงฟังก์ชันจัดรูปได้เป็น

$$g(x + y) + g(xy) = g(x) + g(y) + g(x)g(y) \qquad (4.1.1.1)$$

สังเกตว่า คำตอบหนึ่งของ (4.1.1.1) คือ

$$g(x) \equiv 0$$

สมมุติว่า ฟังก์ชัน g ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์

แทนค่า $x = y = 0$ ใน (4.1.1.1) ได้ $g(0) = 0$
ให้ $g(1) = c$ แทนค่า $y = 1$ ใน (4.1.1.1) ได้

$$g(x + 1) = c + cg(x) \qquad (4.1.1.2)$$

เปลี่ยนตัวแปร x เป็น $x + 1$ ใน (4.1.1.2) ได้

$$g(x + 2) = c + cg(x + 1) = c + c^2 + c^2g(x) \qquad (4.1.1.3)$$

แทนค่า $y = 2$ ใน (4.1.1.1) ได้

$$g(x + 2) = g(x) + g(2) + g(x)g(2) - g(2x) \qquad (4.1.1.4)$$

เมื่อเทียบค่าทางขวามือของ (4.1.1.3) และ (4.1.1.4) พร้อมทั้งใช้ ความจริงที่ว่า $g(2) = c + c^2$ (ซึ่งมาจาก (4.1.1.2) โดยการแทนค่า $x = 1$) พบว่า

$$g(2x) = (1 + c)g(x) \qquad (4.1.1.5)$$

ถ้า $c = 0$ หรือ -1 แล้วจาก (4.1.1.2) และ (4.1.1.5) ได้ว่า $g(x)$ จะเป็นฟังก์ชันศูนย์ ซึ่งไม่ใช่สิ่งที่พิจารณา
ดังนั้น $c \neq 0$ และ $c \neq -1$

แทนค่า $x = -1$ และ $x = -2$ ใน (4.1.1.2) ได้ว่า

$$g(-1) = -1 \quad \text{และ} \quad g(-2) = \frac{g(-1) - c}{c} = -\frac{1 + c}{c}$$

ในทำนองกลับกัน แทนค่า $x = -1$ ใน (4.1.1.5) ได้

$$g(-2) = (1 + c)g(-1) = -(1 + c)$$

ดังนั้น $c = 1$ ทำให้สามารถเขียน (4.1.1.2) เสียใหม่ได้เป็น

$$g(x + 1) = g(x) + 1$$

โดยการอุปนัยทางคณิตศาสตร์ แสดงได้ว่า

$$g(x + k) = g(x) + k \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (4.1.1.6)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อแทนค่า $x = 0$ พบว่า

$$g(k) = k \qquad (k \in \mathbb{Z}) \qquad (4.1.1.7)$$

เมื่อกลับไปแทนค่า $y = k \in \mathbb{Z}$ ใน (4.1.1.1) ได้ว่า

$$g(x + k) + g(kx) = g(x) + g(k) + g(x)g(k)$$

เมื่อใช้ร่วมกับ (4.1.1.6), (4.1.1.7) พบว่า

$$g(kx) = kg(x) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

เมื่อแทนค่า $x = \frac{m}{k}$ เป็นจำนวนตรรกยะใด ๆ ได้ว่า

$$g(m) = kg(m/k)$$

ซึ่งโดย (4.1.1.7) ให้ว่า

$$g(\tfrac{m}{k}) = \frac{g(m)}{k} = \frac{m}{k}$$

เพราะฉะนั้น

$$g(x) = x \qquad (x \in \mathbb{Q})$$

เมื่อกลับไปที่ฟังก์ชันดั้งเดิม พบว่า สมการเชิงฟังก์ชันมีคำตอบที่เป็นไปได้ คือ $f(x) = 1$ หรือ $f(x) = 1 + x$ ซึ่งตรวจคำตอบได้ว่าถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.1.2 (IMO 1990) ให้ $\mathbb{Q}^+$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะบวก จงสร้าง $f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ ที่มีสมบัติว่า

$$f(x \cdot f(y)) = \frac{f(x)}{y} \quad (x, y \in \mathbb{Q}^+)$$

วิธีทำ ถ้า $f(y_1) = f(y_2)$ แล้ว สมการเชิงฟังก์ชันให้ว่า

$$\frac{f(1)}{y_1} = f(f(y_1) = f(f(y_2) = \frac{f(2)}{y_2}$$

ดังนั้น $y_1 = y_2$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

แทนค่า $y = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(1) = 1$$

แทนค่า $x = 1$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(f(y)) = \frac{1}{y} \quad (y \in \mathbb{Q}^+)$$

เมื่อดำเนินการด้วย f กับความสัมพันธ์ล่าสุดนี้ ได้

$$f(\frac{1}{y}) = \frac{1}{f(y)} \qquad (y \in \mathbb{Q}^+)$$

เมื่อเปลี่ยนตัวแปร y = f(1/t) ในสมการเชิงฟังก์ชันและใช้ความสัมพันธ์ที่พบมาก่อนได้

$$f(xt) = f(x)f(t) \qquad (x, t \in \mathbb{Q}^+)$$

ในทำนองกลับกัน สามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า ฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันเดิม

(a) $f(xt) = f(x)f(t)$

(b) $f(f(x)) = \frac{1}{x}$ $\qquad (x, t \in \mathbb{Q}^+)$

ฟังก์ชัน $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข (a) สามารถสร้างได้ โดยการให้ค่าฟังก์ชัน เป็นใดๆ บนจำนวนเฉพาะ และขยายไปเหนือจำนวนนับโดยให้

$$f(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}) = f(p_1)^{n_1} f(p_2)^{n_2} \cdots f(p_k)^{n_k}$$

เมื่อ p_j แทนจำนวนเฉพาะตัวที่ j และ $n_j \in \mathbb{Z}$

ฟังก์ชันนี้จะสอดคล้องกับเงื่อนไข (b) ก็ต่อเมื่อ มันสอดคล้องกับเงื่อนไข (b) ณ แต่ละค่าของจำนวนเฉพาะ ดังนั้นทางที่เป็นไปได้ทางหนึ่งในการสร้างฟังก์ชันนี้ เช่น ให้

$$f(p_j) = \begin{cases} p_{j+1} & \text{ถ้า j เป็นจำนวนคี่} \\ (p_{j-1})^{-1} & \text{ถ้า j เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

จากนี้ขยายไปยังจำนวนตรรกยะบวกด้วยนิยามในลักษณะเดียวกัน จะได้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ ซึ่งสอดคล้องกับ

$$f(f(p)) = \frac{1}{p} \quad \text{สำหรับแต่ละจำนวนเฉพาะ p}$$

ดังนั้น ได้ตัวอย่างของฟังก์ชันที่ต้องการ

ตัวอย่าง 4.1.3 (Japanese MO 2002) จงหา $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ที่มีสมบัติว่า

1. $f(0) = 2, f(1) = 3$
2. $f(x+n) - f(x) = n(f(x+1) - f(x)) \qquad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N})$
3. $f(x) = f(\frac{1}{x}) \qquad (x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$

วิธีทำ เนื่องจากทุกจำนวนตรรกยะเขียนได้ในรูปเศษส่วน $\frac{q}{p}$ โดยที่ p และ q (>0) เป็นจำนวนเต็มที่เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน สร้าง $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ โดย

$$g(\frac{q}{p}) = pq + 2$$

เราจะแสดงว่า $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ที่สอดคล้องทั้งสามเงื่อนไขดังกล่าว คือฟังก์ชัน g

เห็นได้ชัดว่า g สอดคล้องกับเงื่อนไขข้อที่ 1 และ 3 นอกจากนี้

$$g(x+n) - g(x) = \{p(q+np)+2\} - (pq+2) = np^2$$

และ

$$n\{g(x+1) - g(x)\} = n[\{p(q+p)+2\} - (pq+2)] = np^2$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนตรรกยะ $\frac{q}{p}$ และทุกจำนวนนับ n

แสดงว่า g มีสมบัติ 2 ด้วย

ต่อไปเราจะพิสูจน์โดยอุปนัยบน p เพื่อจะแสดงว่า ถ้า f สอดคล้องเงื่อนไขทั้งสามข้อดังกล่าวแล้ว f = g

กรณี p = 1 กล่าวคือ $x = \frac{q}{1}$ จากสมบัติข้อ 2 เราได้ว่า

$$f(0+q) - f(0) = q(f(0+1) - f(0))$$

จากสมบัติข้อ 1 ได้

$$f(x) = f(q) = q+2$$

ดังนั้น

$$f(q) = g(q)$$

สมมติว่า $f(\frac{q}{p}) = g(\frac{q}{p})$ เมื่อ $p \leq k-1$ $(k \geq 2)$

ให้ p = k และให้ m, r เป็นผลหารและเศษเหลือของ q จากการหารด้วย k

นั่นคือ

$$q = mk + r \text{ เมื่อ } 1 \leq r \leq k-1$$

โดย k และ r เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน

จากสมบัติข้อ 3 และสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ว่า

$$f\left(\frac{r}{k}\right) = f\left(\frac{k}{r}\right) = kr + 2$$

และ

$$f\left(\frac{k-r}{-k}\right) = f\left(\frac{-k}{k-r}\right) = -k(k-r) + 2$$

สังเกตว่า –k และ k – r เป็นจำนวนที่เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน

จากสมบัติข้อ 2 เมื่อ $x = \frac{q}{p} = \frac{q}{k} = m+\frac{r}{k}$ ได้

$$f\left(\frac{k-r}{-k} + (m+1)\right) - f\left(\frac{k-r}{-k}\right) = (m+1)\left\{f\left(\frac{-r}{-k}\right) - f\left(\frac{k-r}{-k}\right)\right\}$$

กล่าวคือ

$$f(x) = \{-k(k-r)+2\} + (m+1)[(kr+2) - \{-k(k-r)+2\}] = kq + 2$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) = g(x) \text{ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ } x$$

ตัวอย่าง 4.1.4 (Hellenic MC 2003) จงหา $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) - x - y + xy$ $(x, y \in \mathbb{Q})$
2. $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x$ $(x \in \mathbb{Q})$
3. $f(1) + 1 > 0$

วิธีทำ ให้ $g(x) = f(x) + x$ $(x \in \mathbb{Q})$ ทำให้ได้ว่า g มีสมบัติต่อไปนี้

1. $g(x+y) = g(x)g(y)$ $(x, y \in \mathbb{Q})$
2. $g(x) = 2g(x+1)$ $(x \in \mathbb{Q})$
3. $g(1) > 0$

จากข้อ 1 ได้ว่าถ้า $x = y = 0$ แล้ว

$$g(0) = (g(0))^2 \iff g(0) = 1 \text{ หรือ } g(0) = 0$$

กรณี $g(0) = 0$ จากข้อ 2 ได้ว่า

$$g(1) = \tfrac{1}{2} g(0) = 0$$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อ 3
ดังนั้น

$$g(0) = 1 \text{ และ } g(1) = \tfrac{1}{2}$$

จากข้อ 1 ถ้า $x = y = \frac{t}{2}$ จะได้ว่า

$$g(t) = \left(g(\tfrac{t}{2})\right)^2 > 0$$

เพราะ $g(a) \neq 0$ สำหรับทุกจำนวนดรรกยะ a (ตามความเป็นจริงแล้ว ถ้ามีจำนวนตรรกยะ a ที่ $g(a) = 0$ จะทำให้ได้ว่า $g(x+a) = g(x)g(a) = 0$ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ $x+a$ ซึ่งทำให้ g เป็นฟังก์ชันศูนย์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $g(1) = 0$ ขัดแย้งกับข้อ 3)

แทน $x = y$ ในข้อ 1 ได้ว่า

$$g(2x) = \{g(x)\}^2$$

และโดยการอุปนัยได้ว่า

$$g(nx) = \{g(x)\}^n \quad (x \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}) \qquad (4.1.4.1)$$

ถ้าให้ $y = -x$ ในข้อ 1 นั้นจะได้

$$g(0) = g(x)g(-x)$$

ซึ่งสรุปได้เป็น

$$g(-x) = \frac{1}{g(x)} \qquad (x \in \mathbb{Q})$$

ทำให้ได้

$$g(-nx) = \frac{1}{g(nx)} = \frac{1}{(g(x))^n} = \{g(x)\}^{-n} \qquad (x \in \mathbb{Q},\ n \in \mathbb{N}) \qquad (4.1.4.2)$$

สรุปได้ว่าสมการ (4.1.4.1) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม

ให้ $x = \frac{m}{n}$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์และ n เป็นจำนวนนับ

ดังนั้น $n \cdot x = m \cdot 1$ จาก (4.1.4.1) และ (4.1.4.2) ได้

$$g(n \cdot x) = g(m \cdot 1) \iff \{g(x)\}^n = \{g(1)\}^m \iff g(x) = \{g(1)\}^{m/n}$$

เนื่องจาก $g(1) = \frac{1}{2}$ ได้

$$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad (x \in \mathbb{Q})$$

สรุปได้ว่า

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x$$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหา $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ $f(1) = 2$ และ

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$$

วิธีทำ แทนค่า $y = 1$ จะได้

$$f(x) = f(x)f(1) - f(x+1) + 1$$

ดังนั้น

$$f(x+1) = f(x) + 1 \quad (x \in \mathbb{Q})$$

โดยการอุปนัย ได้ว่า

$$f(x + n) = f(x) + n \quad (n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Q})$$

เนื่องจาก $f(1) = 2$ จึงได้

$$f(n) = n+1$$

แต่ละจำนวนตรรกยะ x สามารถเขียนให้อยู่ในรูป $\frac{m}{n}$ เมื่อ $m,n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

ดังนั้น

$$m + 1 = f(m) = f(nx) = f(x)f(n) - f(x+n) + 1 = f(x)\cdot(n+1) - f(x) - n + 1 = nf(x) - n + 1$$

นั่นคือ

$$f(x) = \frac{m}{n} + 1 = x + 1$$

สรุปได้ว่า

$$f(x) = x + 1 \quad (x \in \mathbb{Q})$$

ตัวอย่างต่อไปนี้น่าสนใจ เพราะเป็นโจทย์ของฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งสามารถหาคำตอบในรูปแจ่มชัดได้ เมื่อเขียนแทนจำนวนที่เกี่ยวข้องด้วยการเขียนแทนจำนวนจริงในรูปเลขฐานสอง

ตัวอย่าง 4.1.6 ให้ f: $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \to \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ f(0)=0, f(1)=1,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{f(2x)}{4} & ,0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{f(2x-1)}{4} & ,\frac{1}{2} \le x < 1 \end{cases}$$

ถ้า $a = 0.b_1b_2b_3\ldots.$ เป็นการเขียนจำนวนจริง a ในรูปฐานสอง แล้ว จงหา f(a)

วิธีทำ จากรูปแบบการเขียนจำนวนในรูปฐานสอง

$$a = 0.b_1b_2b_3\ldots. \neq 0$$

ทราบว่าแต่ละ b_i มีค่า 0 หรือ 1 เท่านั้น จึงแยกการพิจารณาเป็นสองกรณีที่เป็นไปได้

- **ถ้า $b_1 = 0$** แล้ว $0 < a < \frac{1}{2}$ และสมการเชิงฟังก์ชันให้

$$f(a) = ¼\, f(0.b_2b_3\ldots) = 0.00b_2b_3\ldots = 0.b_1b_1b_2b_3$$

- **ถ้า $b_1 = 1$** แล้ว $a \ge \frac{1}{2}$ และสมการเชิงฟังก์ชันให้

$$f(a) = 0.b_1b_1 + ¼\, f(0.b_2b_3\ldots) = 0.b_1b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$$

ไม่ว่าจะเป็นกรณีใดก็ตาม ได้ว่า

$$f(a) = f(0.b_1b_2b_3\ldots) = \ldots = 0.b_1b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$$

แบบฝึกหัด

1. จงหา $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

   (i) $f(x + 1) = f(x) + 1 \quad (x \in \mathbb{Q}^+)$

   (ii) $f(x^3) = \{f(x)\}^3 \quad (x \in \mathbb{Q}^+)$

2. จงหา $f : \mathbb{Q} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2} \qquad (x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\})$$

3. จงหา $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$$

4. จงหา $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

   (i) $f(x) + f(1/x) = 1 \quad (x \in \mathbb{Q}^+)$

   (ii) $f(1 + 2x) = \frac{1}{2} f(x) \quad (x \in \mathbb{Q}^+)$

5. (AMOC 1994) จงหา $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$$

6. (AMOC 1988) ให้ $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ มีสมบัติว่า

(i) $f(1988) \neq f(1987)$

(ii) $f(x + y) = f(x)f(y) - f(xy) + 1 \quad (x, y \in \mathbb{Q})$

จงแสดงว่า $f(- 1987/1988) = 1/1988$

7. จงหา $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{Q})$$

4.2 โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง หรือช่วง

โจทย์สมการเชิงฟังก์ชันที่พบมากที่สุด คือโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง หรือช่วงของจำนวนจริง (ที่ไม่ใช่ช่วงว่าง) ทั้งนี้ด้วยสาเหตุหลักที่ว่า เซตดังกล่าว มีสมบัติสำคัญหลายประการทั้งในตนเองและที่เกี่ยวข้องกับพฤติกรรมของฟังก์ชัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งฟังก์ชันต่อเนื่อง สมบัติที่รวบรวมต่อไปนี้ (ซึ่งทั้งหมดเป็นสมบัติที่ค่อนข้างคุ้นเคยกัน) ในชั้นนี้อนุญาตให้นำไปใช้อ้างอิงได้โดยไม่ต้องพิสูจน์ แม้ว่าการพิสูจน์ของบางสมบัติทำได้ไม่ง่ายนัก และมีความละเอียดอ่อน ซึ่งต้องระมัดระวัง ผู้อ่านที่สนใจอาจหาดูได้ในหนังสือว่าด้วยการวิเคราะห์เชิงจริง

(จ1) เซตของจำนวนจริงมีความบริบูรณ์ (กล่าวคือ ค่าลิมิตของลำดับของจำนวนจริง จะเป็นจำนวนจริงด้วย)

(จ2) จำนวนจริงทุกตัวเขียนได้ในรูปทศนิยม (หรือเทียบกับฐานที่เป็นจำนวนเต็มบวก > 1) โดยที่ทศนิยมดังกล่าวจะต้องรู้จบหรือเวียนซ้ำ ถ้าจำนวนจริงนั้นเป็นจำนวนตรรกยะ แต่เป็นทศนิยมไม่รู้จบ และไม่ซ้ำถ้าเป็นจำนวนอตรรกยะ

(จ3) ถ้า $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว f มีสมบัติค่าระหว่างกลาง และเรนจ์ของ f เป็นช่วง

(จ4) ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริงที่ต่อเนื่อง และเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง แล้ว f ต้องเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้

(จ5) ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริง ที่มีสมบัติเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ และทั่วถึง แล้ว f ต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

(จ6) ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริง ที่เพิ่มโดยแท้ และหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง แล้ว f ต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ตลอดจนฟังก์ชันผกผัน f^{-1} เป็นฟังก์ชันจริง ที่ต่อเนื่อง เพิ่มโดยแท้ และหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ด้วยเช่นกัน

(จ7) ถ้า $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว f มีขอบเขต และบรรลุค่าขอบเขตในช่วงปิดนี้

(จ8) ถ้า f เป็นฟังก์ชันจริง ที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง และมีสมบัติค่าระหว่างกลาง แล้ว f ต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

สมบัติต่าง ๆข้างต้นบางสมบัติ จะมีชื่อเฉพาะที่นิยามใช้ในการอ้างอิงดังนี้สมบัติ (จ1) บางครั้งเรียก สัจพจน์ความบริบูรณ์ของจำนวนจริง (Completeness Axiom) สมบัติ (จ3) คือทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Intermediate Value Theorem) และ สมบัติ (จ7) คือ ทฤษฎีบทว่าด้วยความมีขอบเขต (Boundedness Theorem) ในที่นี้จะขอกล่าวถึงโดยละเอียดเกี่ยวกับสมบัติ (จ2) เพิ่มเติมดังนี้คือ

ทฤษฎีบท ให้ r เป็นจำนวนจริงที่ $0 \leq r < 1$ และให้ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $b > 1$ ดังนั้นเขียนได้ว่า

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ c_n เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq c_n \leq b - 1$ ($n = 1,2,3,\ldots$) โดยมีข้อแม้ว่าทุกจำนวนนับ N ใดๆ จะมีจำนวนนับ $n \geq N$ ที่ $c_n \neq b - 1$

ก่อนจะพิสูจน์ทฤษฎีบท ขอทบทวนสูตรเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์เรขาคณิตที่กล่าวว่า

"สำหรับ a และ r ที่เป็นจำนวนจริงที่ $|r| < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$"

พิสูจน์ ให้ $c_1 = [br]$ ดังนั้น

$$0 \leq c_1 \leq b - 1$$

ให้ $r_1 = br - c_1 = br - [br]$ ดังนั้น

$$0 \leq r_1 < 1 \text{ และ } r = \frac{c_1}{b} + \frac{r_1}{b}r$$

จากนี้นิยาม c_k และ r_k แบบเวียนซ้ำสำหรับ $k = 2,3,\ldots$ โดยให้

$$c_k = [br_{k-1}] \text{ และ } r_k = br_{k-1} - c_k$$

เราตรวจได้เช่นข้างต้นว่า

$$0 \leq c_k \leq b - 1 \text{ และ } 0 \leq r_k < 1$$

ดังนั้น

$$r = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_n}{b^n} + \frac{r_n}{b^n}$$

เนื่องจาก $0 \leq r_n < 1$ จะได้ $0 \leq \frac{r_n}{b^n} < \frac{1}{b^n}$ และ $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{b^n} = 0$

จึงสรุปได้ว่า

$$r = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_n}{b^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}$$

ต่อไปจะแสดงว่าการเขียนแทนด้วยอนุกรมนี้เขียนได้แบบเดียวเท่านั้น สมมุติว่า เขียนได้สองแบบคือ

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n} \text{ และ } r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{b^n}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ c_n ,d_n เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq c_n \leq b - 1$ และ $0 \leq d_n \leq b - 1$ ($n = 1,2,3,\ldots$) และทุกจำนวนนับ N ใดๆ จะมีจำนวนนับ $m \geq N$ ที่ $c_m \neq b\text{-}1$ และ $k \geq N$ ที่ $d_k \neq b\text{-}1$

ให้ t เป็นเลขตัวชนีที่เล็กที่สุดที่ $c_t \neq d_t$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมุติว่า $c_t > d_t$

จาก $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n - d_n}{b^n} = \frac{c_t - d_t}{b^t} + \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{c_n - d_n}{b^n}$

ได้

$$\frac{c_t - d_t}{b^t} = \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{d_n - c_n}{b^n} \qquad (4.2.1)$$

เนื่องจาก $c_t > d_t$ ได้ว่า

$$\frac{c_t - d_t}{b^t} \geq \frac{1}{b^t} \qquad (4.2.2)$$

และ

$$\sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{d_n - c_n}{b^n} \leq \sum_{n=t+1}^{\infty} \frac{b-1}{b^n} = (b-1)\left(\frac{\frac{1}{b^{t+1}}}{1-\frac{1}{b}}\right) = \frac{1}{b^t} \qquad (4.2.3)$$

สังเกตได้ว่าอสมการ (4.2.3) จะกลายเป็นสมการก็ต่อเมื่อ $d_n - c_n = b - 1$ ทุกจำนวนนับ $n \geq t+1$ ซึ่งจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อ $d_n = b - 1$ และ $c_n = 0$ ทุกจำนวนนับ $n \geq t+1$ ซึ่งเหตุการณ์นี้เกิดขึ้นไม่ได้จากสมมุติฐานของทฤษฎีบทเอง ทำให้ได้ว่า อสมการ (4.2.3) เป็นอสมการแท้เพราะว่า (4.2.2) และ (4.2.3) ขัดแย้งกันเอง ทำให้เราสรุปได้ว่า การเขียน r แทนด้วยอนุกรมนี้เขียนได้แบบเดียวเท่านั้น ♦

การเขียนจำนวนจริงในรูปอนุกรม $r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{b^n}$ นี้จะเรียกว่า การเขียนในรูปฐาน b และใช้สัญลักษณ์คือ $(.c_1c_2c_3\ldots)_b$ โดยการเขียนจำนวนจริงในรูปอนุกรมนี้ ทำได้โดยสูตรเวียนซ้ำที่ให้ไว้ในทฤษฎีบทกล่าวคือ

$$c_k = [br_{k-1}] \text{ และ } r_k = br_{k-1} - [br_{k-1}]$$

เมื่อ $r_0 = r$ และ $k = 1,2,3,\ldots$

ตัวอย่าง จงเขียน $\frac{1}{6}$ ในรูปฐาน 8

วิธีทำ

$c_1 = [8 \cdot \frac{1}{6}] = 1$, $r_1 = 8 \cdot \frac{1}{6} - 1 = \frac{1}{3}$,

$c_2 = [8 \cdot \frac{1}{3}] = 2$, $r_2 = 8 \cdot \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{3}$,

$c_3 = [8 \cdot \frac{2}{3}] = 5$, $r_3 = 8 \cdot \frac{2}{3} - 5 = \frac{1}{3}$,

$c_4 = [8 \cdot \frac{1}{3}] = 2$, $r_4 = 8 \cdot \frac{1}{3} - 2 = \frac{2}{3}$,

$c_5 = [8 \cdot \frac{2}{3}] = 5$, $r_3 = 8 \cdot \frac{2}{3} - 5 = \frac{1}{3}$

ทำให้เราได้ว่า $\frac{1}{6} = (.12525\ldots)_8$

ต่อไปเราจะการเขียนจำนวนตรรกยะในรูปเลขฐาน b และแสดงได้ว่า จำนวนจริงจะเป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ จำนวนจริงนั้นเมื่อเขียนในรูปเลขฐาน b แล้วจะต้องเป็นแบบรู้จบ หรือเป็นคาบ

นิยาม จำนวนฐาน b $(.c_1c_2c_3\ldots)_b$ จะเรียกว่า **รู้จบ** ถ้ามีจำนวนนับ n ที่มีค่าหลัก

$$c_n = c_{n+1} = c_{n+2} = \ldots = 0$$

ตัวอย่างของจำนวนฐาน b ที่รู้จบเช่น

$\frac{1}{8}$ เขียนแบบฐานสิบคือ $(.125000\ldots)_{10} = (.125)_{10}$ และ

$\frac{4}{9}$ เขียนแบบฐาน 6 คือ $(.24000\ldots)_6 = (.24)_6$

ทฤษฎีบท จำนวนจริง a ที่ $0 \le a < 1$ เมื่อเขียนในฐาน b จะเป็นแบบรู้จบ ก็ต่อเมื่อ a เป็นจำนวนตรรกยะในรูป $a = \frac{r}{s}$ เมื่อ $0 \le r < s$ และทุกตัวประกอบเฉพาะของ s ย่อมหาร b ลงตัว

พิสูจน์ สมมุติว่า a เขียนในรูปฐาน b แบบรู้จบคือ

$$a = (.c_1c_2\ldots c_n)b$$

ดังนั้น

$$a = \frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_n}{b^n} = \frac{c_1b^{n-1} + c_2b^{n-2} + \cdots + c_n}{b^n}$$

ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะ โดยตัวประกอบเฉพาะของตัวส่วนหาร b ลงตัวเสมอ

ถ้าให้ a เป็นจำนวนจริงที่ $0 \le a < 1$ และเป็นจำนวนตรรกยะในรูป $a = \frac{r}{s}$ เมื่อ $0 \le r < s$ และทุกตัวประกอบเฉพาะของ s หาร b ลงตัว จะได้ว่ามีจำนวนนับ N ที่ s หาร b^N ลงตัว (กล่าวคือจำนวนนับ N ดังกล่าวนี้เป็นกำลังสูงสุดของบรรดากำลังของจำนวนตัวประกอบเฉพาะของ s
ดังนั้น

$$b^N a = b^N \frac{r}{s} = dr$$

เมื่อ $sd = b^N$ โดย d เป็นจำนวนนับเพราะ $s \mid b^N$

ต่อไปให้ $(d_md_{m-1}\ldots d_1d_0)_b$ เป็นการเขียนในฐาน b ของ dr ดังนั้น

$$\begin{aligned} a &= \frac{dr}{b^N} = \frac{d_mb^m + d_{m-1}b^{m-1} + \cdots + d_1b + d_0}{b^N} \\ &= d_mb^{m-N} + d_{m-1}b^{m-1-N} + \ldots + d_1b^{1-N} + a_0b^{-N} \\ &= (.00\ldots d_md_{m-1}\ldots d_1d_0)_b \end{aligned}$$

จึงได้ว่า a เขียนในรูปฐาน b ได้แบบรู้จบ ◆

มีข้อสังเกตว่า ทุกๆ จำนวนในฐาน b ที่เป็นแบบรู้จบสามารถเขียนได้ในรูปฐาน b ไม่รู้จบที่มีส่วนหาง มีค่าเท่ากับ b – 1 ทั้งหมด กล่าวคือ $(.c_1c_2...c_m) = (.c_1c_2...c_m - 1\ b-1\ b-1\ ...)$ ตัวอย่างเช่น $(.12)_{10} = (.11999...)_{10}$ ดังนั้นจึงต้องมีเงื่อนไขระบุว่าทุกจำนวนนับ N ใดๆจะต้องมีจำนวนนับ $n > N$ ที่ $c_n \neq b-1$ เพื่อให้การเขียนในรูปฐาน b ทำได้แบบเดียวเท่านั้น

เราจะเรียกจำนวนที่เขียนในฐาน b $(.c_1c_2c_3...)b$ ว่าเป็น***คาบ*** ถ้ามีจำนวนนับ N และ k ที่ $c_{n+k} = c_n$ ทุก $n \geq N$ ยกตัวอย่างเช่น

$$\frac{1}{3} = (.333...)_{10} \quad \frac{1}{6} = (.1666...)_{10} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{7} = (.142857142857142857...)_{10}$$

เรานิยมเขียนจำนวนในฐาน b แบบเป็นคาบในรูป $(.c_1c_2c_3...c_{N-1}\overline{c_N...c_{N+k-1}})$ จากตัวอย่างข้างต้นได้ว่า

$$\frac{1}{3} = (.\overline{3})_{10} \qquad \frac{1}{6} = (.1\overline{6}) \qquad \text{และ} \qquad \frac{1}{7} = (.\overline{142857})_{10}$$

จะเห็นว่า $\frac{1}{3}$ และ $\frac{1}{7}$ มีส่วนที่ซ้ำกันเป็นคาบตั้งแต่หลักหลังจุดทศนิยม แต่ $\frac{1}{6}$ มีเลขหลักที่เป็นชุดซ้ำกันเป็นคาบหลังจากเลขโดด 1 ไป เราจะเรียกชุดหลักตัวเลขก่อนหน้าชุดซ้ำว่า ***pre-period*** และส่วนซ้ำเรียกว่า ***period*** โดยทั่วไปแล้วนิยมที่จะใช้จำนวนหลักของ period ที่มีจำนวนน้อยที่สุด ยกตัวอย่างเช่น ทศนิยมฐาน 3 ของ $\frac{2}{45}$ คือ $(0.00\overline{1012})_3$ มี pre-period คือ $(00)_3$ และมี period คือ $(1012)_3$

ทฤษฎีบทต่อไปแสดงว่าจำนวนตรรกยะคือจำนวนที่เขียนเป็นจำนวนในฐาน b แบบรู้จบหรือแบบเป็นคาบ และบอกถึงจำนวนหลักของ pre-period และ period ของจำนวนตรรกยะเมื่อเขียนในรูปฐาน b

ทฤษฎีบท ให้ b เป็นจำนวนนับ แล้วจะได้ว่าจำนวนจริงใดๆที่เขียนในรูปฐาน b แบบเป็นคาบ จะเป็นจำนวนตรรกยะ ในทำนองกลับกัน จำนวนตรรกยะใดๆเมื่อเขียนในรูปฐาน b จะเขียนได้เป็นแบบรู้จบหรือแบบเป็นคาบเท่านั้น

นอกจากนี้ ถ้า $0 < q < 1$ และ $q = \frac{r}{s}$ เมื่อ r และ s เป็นจำนวนที่เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกันและ $s = TU$ โดยทุกตัวประกอบเฉพาะของ T หาร b ลงตัวและ ห.ร.ม.(U,b) = 1 แล้ว จำนวนหลักของ period ของ q เมื่อเขียนในรูปฐาน b คือ $\text{ord}_U b$ และ จำนวนหลักของ pre-period คือ N เมื่อ N คือจำนวนนับที่เล็กที่สุดที่ $T \mid b^N$

พิสูจน์ สมมุติว่า q เขียนในฐาน b เป็นแบบคาบ กล่าวคือ

$$\begin{aligned} q &= (.c_1c_2c_3...c_N\overline{c_{N+1}...c_{N+k}})_b \\ &= \left(\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_N}{b^N}\right) + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{b^j}\right)\left(\frac{c_{N+1}}{b^{N+1}} + \cdots + \frac{c_{N+k}}{b^{N+k}}\right) \\ &= \left(\frac{c_1}{b} + \frac{c_2}{b^2} + \cdots + \frac{c_N}{b^N}\right) + \left(\frac{b^k}{b^k - 1}\right)\left(\frac{c_{N+1}}{b^{N+1}} + \cdots + \frac{c_{N+k}}{b^{N+k}}\right) \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะ

ในทำนองกลับกัน ถ้า $0 < q < 1$ และ $q = \frac{r}{s}$ เมื่อ r และ s เป็นจำนวนที่เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกันและ $s = TU$ โดยทุกตัวประกอบเฉพาะของ T ต้องหาร b ลงตัว ห.ร.ม.(U,b) = 1 และให้ N คือจำนวนนับที่เล็กที่สุดที่ $T \mid b^N$

ดังนั้นจะมีจำนวนนับ a ที่ $aT = b^N$ และ

$$b^N q = b^N\left(\frac{r}{TU}\right) = \frac{ar}{U} \tag{4.2.4}$$

ซึ่งเขียนได้ว่า

$$\frac{ar}{U} = A + \frac{C}{U} \tag{4.2.5}$$

เมื่อ A และ C เป็นจำนวนนับที่

$$0 \le A < b^N, \qquad 0 \le C < U \qquad \text{และ} \qquad \text{ห.ร.ม.}(C,U) = 1$$

(อสมการของ A เกิดจาก $0 < b^N q = \frac{ar}{U} < b^N$ อันเป็นผลมาจากที่ $0 < q < 1$ และคูณด้วย b^N ส่วน ห.ร.ม.(C,U) = 1 นั้นได้มาจาก $b^N r = ATU+CT$ และ $(U,b) = (r,U) = (r,s) = 1$)

จากทฤษฎีบท A เขียนได้ในรูปเลขฐานฐาน b คือ $(a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0)_b$

ถ้า $U = 1$ แล้ว $C = 0$ และ $q = \frac{ar}{b^N} = \frac{A}{b^N} = \frac{(a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1)_b}{b^N}$ การเขียนในรูปฐาน b ย่อมเป็นแบบรู้จบ

ถ้า $U \neq 1$ แล้ว ให้ v เป็นกำลังต่ำสุดของ U ที่ทำให้ $b \equiv 1 \pmod U$ เขียนย่อๆว่า $\boldsymbol{v = ord_U\, b}$ จะได้ว่า

$$b^v \frac{C}{U} = \frac{(tU+1)C}{U} = tC + \frac{C}{U} \tag{4.2.6}$$

เมื่อ t เป็นจำนวนเต็ม (เพราะ $b^v \equiv 1 \pmod U$)

เมื่อ เขียน $\frac{C}{U}$ ในรูปฐาน b คือ $(.c_1c_2c_3\ldots)_b$ โดย

$c_k = [bz_{k-1}]$, $z_k = bz_{k-1} - [bz_{k-1}]$ และ $z_0 = \frac{C}{U}$ สำหรับ $k = 1,2,3,\ldots$ จะได้

$$b^v \frac{C}{U} = b^v\left(\frac{c_1}{b} + \frac{c_1}{b^2} + \cdots + \frac{c_v}{b^v} + \frac{z_v}{b^v}\right) \tag{4.2.7}$$

ดังนั้น

$$b^v \frac{C}{U} = (c_1 b^{v-1} + c_2 b^{v-2} + \ldots + c_v) + z_v \tag{4.2.8}$$

จาก (4.2.6),(4.2.8) และ $0 \le z_v < 1$ เราพบว่า

$$z_v = \frac{C}{U}$$

ผลที่ได้ตามมาคือ

$$z_v = z_0 = \frac{C}{U}$$

ทำให้เราสรุปได้ว่า

$$c_{k+v} = c_k \text{ ทุก } k = 1,2,3,\ldots$$

ดังนั้น $\frac{C}{U}$ จึงเขียนเป็นจำนวนในฐาน b แบบเป็นคาบคือ

$$\frac{C}{U} = (.\overline{c_1c_2\ldots c_v})_b$$

จาก (4.2.4),(4.2.5) และการเขียนฐาน b ของ A และ $\frac{C}{U}$ จะได้ว่า

$$b^N q = (a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0.\overline{c_1c_2\ldots c_v})_b \qquad (4.2.9)$$

หารทั้งสองข้างของ (4.2.9) ด้วย b^N (ซึ่งคือการเลื่อนจุดของ $b^N q$ ในรูปฐาน b ไปทางซ้าย N ตำแหน่ง) จะได้

$$q = (.000\ldots a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0 \overline{c_1c_2\ldots c_v})_b$$

ซึ่งจำนวนในฐาน b นี้จะมี pre-period คือ $(.000\ldots a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0)_b$ ที่มีจำนวนหลัก N หลักมี 0 จำนวน N - (n+1) ตัว และมี period ที่มีความยาว v

ต่อไปเราจะแสดงว่าเมื่อเขียน q ในฐาน b แล้ว จะมี pre-period ที่มีจำนวนหลัก N หลักและมี period ที่มีความยาว v กล่าวคือไม่สามารถจัดกลุ่มของหลักในฐาน b ใหม่ให้มีส่วนของ pre-period มีจำนวนหลักน้อยกว่า N หลัก หรือมี period ที่มีความยาวน้อยกว่า v โดยสมมุติว่า

$$\begin{aligned} q &= (.c_1c_2\ldots c_M\overline{c_{M+1}\ldots c_{M+k}})_b \\ &= \left(\frac{c_1}{b}+\frac{c_2}{b^2}+\cdots+\frac{c_M}{b^M}\right)+\left(\frac{b^k}{b^k-1}\right)\left(\frac{c_{M+1}}{b^{M+1}}+\cdots+\frac{c_{M+k}}{b^{M+k}}\right) \\ &= \frac{(c_1b^{M-1}+c_2b^{M-2}+\cdots+c_M)(b^k-1)+(c_{M+1}b^{k-1}+\cdots+c_{M+k})}{b^M(b^k-1)} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $q = \frac{r}{s}$ โดยที่ r และ s เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน เราได้ว่า $TU = s \mid b^M(b^k-1)$
ดังนั้น

$$T \mid b^M \text{ และ } U \mid (b^k-1)$$

ดังนั้นโดยนิยามของ N, $M \geq N$ และ $v \mid k$ สรุปได้ว่า pre-period จะมีจำนวนหลักน้อยกว่า N หลักและ period มีความยาวน้อยกว่า v ไม่ได้ ♦

เราสามารถใช้ทฤษฎีบทนี้ในการหาความยาวของpre-period และ period ได้ยกตัวอย่างเช่น ให้ $q = \frac{5}{28}$ เนื่องจาก $28 = 2^2 7$ ในการเขียนในฐาน 10, $T = 2^2$, $U = 7$ ได้ว่า ความยาวของpre-period คือ 2 และ period มีความยาว $\text{ord}_7 2 = 6$ โดยเห็นได้ว่าเป็นจริงเพราะ $\frac{5}{28} = (.\overline{17857142})$

มีข้อสังเกตว่าความยาว(ที่มีค่าน้อยสุด)ของทั้ง pre-period และ period ของจำนวนตรรกยะ $\frac{r}{s}$ ใดๆนั้น ขึ้นอยู่กับตัวส่วน s เท่านั้นไม่ขึ้นกับตัวเศษ r เลย และผลจากทฤษฎีบทดังกล่าวนี้ได้แสดงด้วยว่าจำนวนจริงที่ไม่สามารถเขียนเป็นทศนิยมแบบรู้จบหรือแบบเป็นคาบได้นั้นจะเป็นจำนวนอตรรกยะ ยกตัวอย่างเช่น q = .101001000100001... ซึ่งไม่สามารถเขียนให้เป็นทศนิยมแบบรู้จบหรือแม้กระทั่งแบบเป็นคาบได้เพราะ 0 จะมีจำนวนหลักเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ

ตัวอย่าง 4.2.1 (AMOC 1998) จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(-x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(ii) $f\left(\frac{1}{x+y}\right) = f(\frac{1}{x}) + f(\frac{1}{y}) + 2(xy - 1000)$ $(x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x + y \neq 0)$

วิธีทำ ให้ $h(x) := f(\frac{1}{x}) - x^2 - 2000$ เห็นชัดเจนว่า h(x) มีนิยามแจ่มชัดสำหรับทุก $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
จาก (i) ได้

$$h(-x) = h(x) \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

และจาก (ii)เมื่อ $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ และมีสมบัติว่า $x + y \neq 0$ จะได้ว่า

$$h(x + y) = h(x) + h(y)$$

พิจารณาจำนวนจริง $x \neq 0, y \neq 0, x + y \neq 0$ ได้ว่า

$$h(x) = h(x + y - y) = h(x + y) + h(-y)$$
$$= h(x) + h(y) + h(y) = h(x) + 2h(y)$$

ซึ่งให้ว่า

$$h(y) = 0 \quad \text{สำหรับทุก } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

กล่าวคือ

$$f(\frac{1}{x}) = x^2 + 2000$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 2000 \quad \text{สำหรับทุก } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ตัวอย่าง 4.2.2 (AMOC 1995) จงหา $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(xy) = f(x)f(\frac{3}{y}) + f(y)f(\frac{3}{x})$ $(x, y \in \mathbb{R}^+)$

(ii) $f(1) = \frac{1}{2}$

วิธีทำ แทนค่า $x = y = 1$ ใน (i) ได้

$$f(1) = 2f(1)f(3)$$

เมื่อใช้ (ii) ได้

$$f(3) = \frac{1}{2}$$

แทนค่า y = 1 ใน (i) และใช้ข้อมูลที่เพิ่งค้นพบได้

$$f(x) = f(x)\,f(3) + f(1)f(3/x) = \frac{1}{2}\{f(3/x) + f(x)\}$$

ซึ่งให้

$$f(x) = f(\frac{3}{x}) \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}^+$$

แทน y ด้วย $\frac{3}{x}$ ใน (i) และใช้ข้อมูลที่มีได้

$$\frac{1}{2} = f(3) = f(x\cdot\frac{3}{x}) = \{f(x)\}^2 + \{f(\frac{3}{x})\}^2 = 2\{f(x)\}^2$$

ดังนั้น

$$\{f(x)\}^2 = \frac{1}{4} \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}^+$$

แทนค่า $x = y = \sqrt{z}$ เมื่อ $z \in \mathbb{R}^+$ ใน (i) ได้

$$f(z) = f(\sqrt{z}\,\sqrt{z}) = f(\sqrt{z})f(3/\sqrt{z}) + f(\sqrt{z})f(3/\sqrt{z}) = 2\{f(\sqrt{z})\}^2 = \frac{1}{2}$$

แสดงว่า ฟังก์ชันคำตอบที่เป็นไปได้มีเพียง ฟังก์ชันค่าคงตัว $f(z) = \frac{1}{2}$ ซึ่งตรวจสอบได้ทันทีว่าเป็นคำตอบแท้จริง

ตัวอย่าง 4.2.3 (IMO 1992) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.3.1)$$

วิธีทำ ให้ $s = f(0)$ แทนค่า $x = 0$ ใน (4.2.3.1) ได้

$$f(f(y)) = y + s^2 \qquad (y \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.3.2)$$

แทนค่า $y = 0$ ใน (4.2.3.1) ได้

$$f(x^2 + s) = (f(x))^2 \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.3.3)$$

แทนค่า $x = 0$ ใน (4.2.3.3) ได้

$$f(s) = s^2 \qquad (4.2.3.4)$$

เมื่อบวก (4.2.3.3) กับ (4.2.3.4) เข้าด้วยกัน ได้

$$s^2 + f(x^2 + s) = (f(x))^2 + f(s)$$

เมื่อดำเนินการด้วย f ได้

$$f(s^2 + f(x^2 + s)) = f(\,(f(x))^2 + f(s)\,)$$

เมื่อประยุกต์ใช้ (4.2.3.1) กับทั้งสองข้างได้

$$x^2 + s + (f(s))^2 = s + (f(f(x)))^2$$

เมื่อใช้ (4.2.3.4) กับทางซ้ายมือ และใช้ (4.2.3.2) กับทางขวามือ ได้

$$x^2 + s + s^4 = s + (x + s^2)^2$$

ซึ่งแก้แล้วได้

$$s = 0 \qquad (4.2.3.5)$$

แทนค่า จาก (4.2.3.5) ลงใน (4.2.3.2), (4.2.3.3) พบว่า

$$f(f(y)) = y \qquad (y \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.3.6)$$

$$f(x^2) = (f(x))^2 \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.3.7)$$

สมการ (4.2.3.7) ชี้ว่า

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{เมื่อ } x \geq 0 \qquad (4.2.3.8)$$

ถ้ามีบาง x ที่ทำให้ $f(x) = 0$ แล้ว

$$0 = (f(x))^2 = f(x^2) = f(x^2 + f(x)) = x + (f(x))^2 = x$$

จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) > 0 \qquad \text{เมื่อ } x > 0 \qquad (4.2.3.9)$$

แทน y ด้วย f(y) ใน (4.2.3.1) และใช้ (4.2.3.7) ได้

$$f(x^2 + f(f(y))) = f(y) + f(x^2)$$

เมื่อใช้ (4.2.3.6) และแทน x^2 ด้วย x ได้ว่า

$$f(x + y) = f(y) + f(x) \qquad (x \geq 0, y \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.3.10)$$

ถ้า $x > y$ แล้ว $x - y > 0$ เมื่อใช้ (4.2.3.10) ร่วมกับ (4.2.3.9) ให้ว่า

$$f(x) = f((x - y) + y) = f(x - y) + f(y) > f(y)$$

ดังนั้น

$$f(x) > f(y) \qquad \text{เมื่อ } x > y \qquad (4.2.3.11)$$

ถ้า $f(x) > x$ แล้วโดย (4.2.3.6), (4.2.3.11)

$$x = f(f(x)) > f(x)$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(x) < x$ แล้ว $x < f(x)$ จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) = x \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ตัวอย่าง 4.2.4 ให้ f, g, h : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$f(g(0)) = h(f(0)) = 0$$

และสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + g(y)) = g(h(f(x))) + y \qquad (x, y \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.4.1)$$

จงพิสูจน์ว่า

$$h = f \text{ และ } g(x + y) = g(x) + g(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ แทนค่า x = 0 ใน (4.2.4.1) ได้

$$f(g(y)) = g(h(f(0))) + y = g(0) + y \qquad (y \in \mathbb{R})$$

แทนค่า y = 0 ในสมการล่าสุดนี้ ได้

$$g(0) = f(g(0)) = 0$$

ซึ่งแสดงด้วยว่า

$$f(g(y)) = y \quad (y \in \mathbb{R})$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ f เป็นฟังก์ชันผกผัน (จากทางซ้าย) ของ g

แทนค่า y = 0 ใน (4.2.4.1) ได้

$$f(x) = f(x + g(0)) = g(h(f(x)))$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จึงได้ว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ h เป็นฟังก์ชันผกผัน(จากทางขวา) ของ g

เนื่องจากฟังก์ชันผกผัน จากทางซ้าย และจากทางขวาของ g ต้องเท่ากัน ดังนั้น

$$g^{-1} = f = h$$

เมื่อใช้ร่วมกับ (4.2.4.1) ได้ว่า

$$f(x + g(y)) = f(x) + y$$

เปลี่ยนตัวแปร x = g(u) ในสมการท้ายนี้ แล้วดำเนินการด้วย g พบว่า

$$g(u) + g(y) = g(u + y) \qquad (u, y \in \mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 4.2.5 ให้ $\mathbb{R}^+$แทนเซตของจำนวนจริงบวก จงหา f : $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) = f(x^2 + y^2) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

วิธีทำ เลือกจำนวนจริงบวก a, b ที่มีสมบัติว่า $a \le b < 2a$ มาคู่หนึ่ง ให้ $x = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b-a}}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{2}}$

สังเกตว่า

$$x, y > 0, \quad x + y = \sqrt{2a}, \quad x^2 + y^2 = b$$

ดังนั้น

$$f(\sqrt{2a}) = f(b)$$

เมื่อดรึงค่า a แต่ปล่อยให้ b แปรไปเหนือ [a, 2a) เราพบว่า f มีค่าคงตัวตลอดช่วงนี้ สิ่งนี้เป็นจริงไม่ว่า a จะมีค่าเท่าใด เพราะฉะนั้น f ต้องมีค่าคงตัวตลอดทุกช่วงที่อยู่ในรูป [a, 2a) เนื่องจากช่วงในรูปดังกล่าวปกคลุมไปทั่วเส้นจำนวนจริง จึงได้ว่า f ต้องเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวทั่ว $\mathbb{R}^+$

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)\, y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ แทน $(x, y) = (x, x^2)$ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^2 f(x) \qquad (4.2.6.1)$$

แทน $(x, y) = (x, -f(x))$ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4(f(x))^2 \qquad (4.2.6.2)$$

เมื่อบวก (4.2.6.1), (4.2.6.2) เข้าด้วยกัน ได้

$$4f(x)\{f(x) - x^2\} = 0$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(x) = 0 \text{ หรือ } f(x) = x^2$$

เราจะแสดงว่า ฟังก์ชันคำตอบต้องเป็นฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งเท่านั้น จะมีส่วนประกอบเป็นฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งในบางเซตย่อยไม่ได้

สมมุติว่ามี $a \neq 0$ ที่มีสมบัติว่า $f(a) = 0$ แทนค่า $x = a$ ในสมการเชิงฟังก์ชันดั้งเดิม ได้

$$f(y) = f(a^2 - y)$$

ถ้า $y \neq \frac{a^2}{2}$ แล้ว

$$y^2 \neq (a^2 - y)^2$$

เนื่องจาก $f(x) = 0$ หรือ $f(x) = x^2$ เท่านั้นจึงให้ว่า

$$f(y) = f(a^2 - y) = 0 \text{ สำหรับทุก } y \neq \frac{a^2}{2}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$f(ka^2) = 0 \text{ สำหรับ } k \neq \frac{1}{2}$$

แทนค่า $x = 2a$ ในสมการฟังก์ชันได้

$$f(f(2a) + y) = f(4a^2 - y) + 4f(2a)\cdot y$$

แทน $y = \frac{7a^2}{2}$ ได้

$$f(f(2a) + \frac{7a^2}{2}) = f(4a^2 - \frac{7a^2}{2}) + 4f(2a)\cdot \frac{7a^2}{2}$$

จากข้างต้นมีค่าที่เป็นไปได้ของ $f(2a)$ คือ 0 และ $4a^2$

- ถ้า $f(2a) = 0$ แล้ว

$$0 = f(\frac{7a^2}{2}) = f(\frac{a^2}{2})$$

- ถ้า $f(2a) = 4a^2$ แล้ว

$$0 = f(4a^2 + \frac{7a^2}{2}) = f(\frac{a^2}{2}) + 4a^2 \cdot \frac{7a^2}{2}$$

ดังนั้น $f(\frac{a^2}{2}) = -14a^4$ นั่นคือ $-14a^4 = \frac{a^4}{4}$ ซึ่งขัดแย้ง
กล่าวคือ

$$f(\frac{a^2}{2}) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$f(x) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x หรือ $f(x) = x^2$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ซึ่งทั้งสองฟังก์ชัน ตรวจสอบได้ว่าเป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.2.7 จงหา $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) - f(y) = (y - x)f(xy) \quad (x, y > 1)$$

วิธีทำ แทนค่า $(x, y) = (t, 2), (t, 4), (2t, 2)$ เมื่อ $t > 1$ ตามลำดับในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$\begin{aligned} f(t) - f(2) &= (2 - t)f(2t), \\ f(t) - f(4) &= (4 - t)f(4t), \\ f(2t) - f(2) &= (2 - 2t)f(4t) \end{aligned}$$

ขจัด $f(t)$ โดยลบสมการที่สองจากสมการแรก แล้วแทนค่า $f(2t)$ จากสมการที่สาม ได้

$$f(4) + (t - 3)f(2) = t(2t - 5)f(4t) \quad (t > 1)$$

แทนค่า $t = \frac{5}{2}$ ได้ $f(4) = \frac{f(2)}{2}$
เมื่อแทนค่ากลับได้

$$(t - \frac{5}{2})f(2) = t(2t - 5)f(4t)$$

ดังนั้น

$$f(4t) = \frac{f(2)}{2t} \qquad (t > 1, t \neq \frac{5}{2})$$

ซึ่งจากสมการที่สองข้างต้น ได้

$$f(t) = f(4) + (4 - t)f(4t) = \frac{f(2)}{2} + (4 - t)\frac{f(2)}{2t} = \frac{2f(2)}{t}$$

สมการนี้เป็นจริงที่ $t = \frac{5}{2}$ ด้วย

จากการตรวจสอบโดยตรงเมื่อแทนค่า $x = \frac{5}{2}$, $y = 2$ และใช้ $f(5) = \frac{2f(2)}{5}$ ในสมการเชิงฟังก์ชันแรกเริ่ม เมื่อให้ $c = 2f(2)$ ได้ว่า

$$f(x) = \frac{c}{x} \quad (x > 1)$$

ซึ่งตรวจคำตอบได้ว่าถูกต้องสำหรับทุกค่าคงตัว c

ตัวอย่าง 4.2.8 (IMO 1994) จงหา $f : (-1, \infty) \to (-1, \infty)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x) \qquad (x, y \in (-1, \infty)$$

และมีสมบัติว่า $\frac{f(x)}{x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ในช่วง $(-1, 0)$ และในช่วง $(0, \infty)$

วิธีทำ จากเงื่อนไขส่วนท้ายได้ว่า สมการ $f(x) = x$ มีรากที่เป็นไปได้อย่างมากสามราก รากหนึ่งใน $(-1, 0)$ รากหนึ่งที่ 0 รากหนึ่งใน $(0, +\infty)$

สมมุติว่า $f(u) = u$ สำหรับบาง $u \in (-1, 0)$
แทนค่า $x = y = u$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$$

นอกจากนี้ $u^2 + 2u \in (-1, 0)$ ด้วยเช่นกัน
ดังนั้น

$$u^2 + 2u = u$$

ซึ่งให้ $u \notin (-1, 0)$ เป็นข้อขัดแย้ง

ถ้า $f(v) = v$ สำหรับบาง $v \in (0, +\infty)$ แล้วจะได้ข้อขัดแย้งในทำนองเดียวกัน

อย่างไรก็ตาม

$$f(x + (1 + x)f(x)) = x + (1 + x)f(x) \text{ สำหรับทุก } x \in (-1, \infty)$$

จากสิ่งที่พบข้างต้นจึงต้องได้ว่า $x + (1 + x)f(x) = 0$ ซึ่งให้

$$f(x) = -\frac{x}{1+x}$$

ต่อไปเราจะแสดงว่า ฟังก์ชันนี้มีสมบัติที่ต้องการ

ขั้นแรกเห็นชัดว่า $\frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{1+x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บน $(-1, \infty)$
นอกจากนี้ สำหรับทุก $x, y \in (-1, \infty)$ จากการแทนฟังก์ชัน เราได้ว่า

$$y + (1 + y)f(x) = y - \frac{x(1+y)}{1+x} = \frac{y-x}{1+x} \quad \text{และ} \quad f(x + (1 + x)f(y)) = f\left(\frac{x-y}{1+y}\right) = \frac{-\frac{x-y}{1+y}}{1+\frac{x-y}{1+y}} = \frac{y-x}{1+x}$$

ตัวอย่าง 4.2.9 (AMOC 1991) จงพิสูจน์ว่ามีฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ เพียงฟังก์ชันเดียวที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(x) = xf(\frac{1}{x})(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(ii) $f(x) + f(y) = 1 + f(x + y)$ สำหรับแต่ละคู่อันดับ (x, y) ของจำนวนจริงไม่เป็นศูนย์ ที่มีสมบัติว่า $x \neq -y$

วิธีทำ แทน $x = y$ ใน (ii) ได้

$$2f(x) = 1 + f(2x) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \qquad (4.2.9.1)$$

แทน $u = 2x$ ได้

$$2f(u/2) = 1 + f(u)$$

ดังนั้น สำหรับ $u \neq 0$ พบว่า

$$\frac{1+f(u)}{u} = \frac{2f(\frac{u}{2})}{u} = f(\frac{2}{u}) \qquad \text{(โดย (i))}$$

$$= 2f(\frac{1}{u}) - 1 \qquad \text{(โดย (4.2.9.1))}$$

$$= \frac{2f(u)}{u} - 1 \qquad \text{(โดย (i))}$$

ซึ่งแสดงว่า

$$f(u) = 1 + u \quad \text{สำหรับทุก } u \neq 0$$

เพราะฉะนั้น ถ้าโจทย์มีฟังก์ชันคำตอบ แล้วจะมีเพียงฟังก์ชันเดียวที่เป็นไปได้ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ ได้แก่

$$f(x) = 1 + x$$

ขั้นตอนสุดท้ายคือตรวจสอบว่าฟังก์ชัน นี้สอดคล้องตามเงื่อนไขของโจทย์จริง ซึ่งทำได้โดยง่าย จึงขอละไว้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 4.2.10 (AMOC 1990) ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันสองสมการต่อไปนี้

(i) $f(2x) = f(\sin(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2})) + f(\sin(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi y}{2}))$ $\qquad (x, y \in \mathbb{R})$

(ii) $f(x^2 - y^2) = (x + y) f(x - y) + (x - y) f(x + y)$ $\qquad (x, y \in \mathbb{R})$

จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชันคำตอบมีเพียงหนึ่งเดียว

วิธีทำ แทน $x = \frac{z}{2}$, $y = 0$ ใน (i) ได้

$$f(z) = 2 f(\sin(\frac{z}{4})) \qquad (4.2.10.1)$$

แทน $x = \frac{z}{2}$, $y = 2$ ใน (i) ได้

$$f(z) = 2 f(-\sin(\frac{z}{4})) \qquad (4.2.10.2)$$

จาก (4.2.10.1), (4.2.10.2) ได้ $f(-z) = 2 f(\sin(-\frac{z}{4})) = 2 f(-\sin(\frac{z}{4})) = f(z)$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคู่ แทนค่า x = 0 ใน (ii) ได้

$$f(-y) = y\,f(-y) - y\,f(y) = 0$$

เพราะฉะนั้น $f(z) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง $z \leq 0$
แต่ f เป็นฟังก์ชันคู่ จึงได้ว่า

$$f(z) = 0 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } z$$

ตัวอย่าง 4.2.11 (Czech-Slovak MO 2000) จงหา $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่มีสมบัติว่า

$$f(x^2 + f(y)) = (x-y)^2 f(x+y)$$

วิธีทำ สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันคำตอบที่ต้องการ สังเกตเห็นว่าทางซ้ายมือของสมการ f จะเป็นฟังก์ชันคู่เทียบกับตัวแปร x และทำให้ทางขวามือเป็นเช่นเดียวกัน

แทน x ด้วย –x ได้

$$(x-y)^2 f(x+y) = (-x-y)^2 f(-x+y)$$

นั่นคือ

$$(x-y)^2 f(x+y) = (x+y)^2 f(y-x)$$

ต่อไปให้ $x = \frac{1}{2}(t-1)$ และ $y = \frac{1}{2}(t+1)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

$$x+y = t \text{ และ } y-x = 1$$

ทำให้เราได้ว่า สำหรับจำนวนจริง t ใดๆ

$$f(t) = t^2 f(1)$$

นั่นคือ

$$f(x) = cx^2 \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

การหาค่า c ทำได้โดยการแทนค่าของ t ย้อนหลังไปหาสมการเชิงฟังก์ชันเดิมทำได้ดังนี้
จากสมการเชิงฟังก์ชัน

$$c(x^2+cy^2)^2 = (x-y)^2 c(x+y)^2$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$c(c+1)y^2(2x^2+(c-1)y^2) = 0$$

และสมการดังกล่าวเป็นจริงทุกจำนวนจริง x,y ได้ก็ต่อเมื่อ

$$c = 0 \text{ หรือ } c = -1$$

(หรือแทนค่า $x = y = 1$ จะได้ $c(c+1)^2 = 0$ ก็จะได้ว่า $c \in \{0,-1\}$

สรุปได้ว่า ฟังก์ชันคำตอบของสมการเชิงฟังก์ชันนี้คือ

$$f(x) = 0 \text{ หรือ } f(x) = -x^2$$

ตัวอย่าง 4.2.12 (IMO 1986) จงหา $f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0$ ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(xf(y))f(y) = f(x + y)$ $\quad (x, y \geq 0)$

(ii) $f(2) = 0$

(iii) $f(x) \neq 0$ $\quad (0 \leq x < 2)$

วิธีทำ แทนค่า $y = 2$ ได้

$$f(x + 2) = f(xf(2))f(2) = 0 \quad (x \geq 0)$$

แสดงว่า $f(x) = 0 \quad (x \geq 2)$

พิจารณา $x \geq 0, 0 \leq y < 2$

ถ้า $x + y \geq 2$ จากเงื่อนไข (i), (iii) ได้

$$0 = f(x + y) = f(xf(y))f(y)$$

ซึ่งชี้ว่า

$$f(xf(y)) = 0$$

แสดงว่า

$$xf(y) \geq 2$$

ในทำนองกลับกัน ถ้า $xf(y) \geq 2$ แล้ว (i) ให้

$$f(x + y) = 0$$

จึงได้ว่า $x + y \geq 2$

แสดงว่า สำหรับ $x \geq 0$ และ $0 \leq y < 2$ เงื่อนไข $x \geq 2 - y$ สมมูลกับ $x \geq \dfrac{2}{f(y)}$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน f คือ

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{2-y} & ,0 \leq y < 2 \\ 0 & ,y \geq 2 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4.2.13 (APMO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) มีจำนวนจริง s เพียงจำนวนจำกัดที่ทำให้ $f(s) = 0$

(ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y)) \quad (x, y \in \mathbb{R})$

วิธีทำ แทนค่า $x = 0$ ใน (i) ได้

$$f(y) = f(f(y)) \qquad (4.2.13.1)$$

แทนสมการหลังนี้ใน (ii) ได้

$$f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y) \qquad (4.2.13.2)$$

แทนค่า x = 1, y = 0 ใน (4.2.13.2) ได้

$$f(0) = 0$$

แทนค่า y = 0 ใน (4.2.13.2) ได้

$$f(x^4) = x^3 f(x) \qquad (4.2.13.3)$$

ทำให้ (4.2.13.2) กลายเป็น

$$f(x^4 + y) = f(x^4) + f(y) \qquad (4.2.13.4)$$

แทนค่า $x = a^{\frac{1}{4}}$, y = b (เมื่อ $a \geq 0$ และ b เป็นจำนวนจริง) ลงใน (4.2.13.4) ได้

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \qquad (a \geq 0;\ a, b \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.13.5)$$

จาก (4.2.13.3) ได้

$$f(-x) = \frac{f((-x)^4)}{(-x)^3} = \frac{-f(x)^4}{x^3} = -f(x) \qquad (x \neq 0)$$

ซึ่งเป็นจริง ณ x = 0 ด้วย (จาก (4.2.13.3) เช่นกัน) แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคี่

ต่อไปสมมุติ a < 0 จากความเป็นฟังก์ชันคี่ และ (4.2.13.5) ได้

$$f(a + b) = -f((-a) + (-b)) = -\{f(-a) + f(-b)\} = -\{-f(a) - f(b)\} = f(a) + f(b)$$

แสดงว่า (4.2.13.5) เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x, y

ถ้ามีจำนวนจริง $r \neq 0$ ที่ทำให้ f(r) = 0 แล้ว จากความเป็นฟังก์ชันคี่ จึงเป็นการเพียงพอที่จะพิจารณาเพียงกรณีที่ r> 0 สร้างลำดับ $x_0 = r$ และเมื่อ n > 0 ให้

$$x_{n+1} = (x_n^3 + 1)x_n$$

ดังนั้นทุก $x_n > 0$ และ $f(x_0) = 0$

สังเกตว่า ถ้า $f(x_n) = 0$ แล้ว

$$f(x_{n+1}) = f((x_n^3+1)x_n) = x_n^3 f(x_n) + f(x_n) = 0$$

ซึ่งชี้ว่า $f(x_n) = 0$ สำหรับทุก n

เนื่องจาก $x_{n+1} = (x_n^3 + 1)x_n > x_n$ เราจึงได้ลำดับเพิ่มโดยแท้ $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ ที่เป็นลำดับอนันต์และแต่ละพจน์เป็นรากของ f(x) ขัดแย้งกับเงื่อนไข (i) จึงต้องได้ว่า

$$f(x) \neq 0 \text{ เมื่อ } x \neq 0$$

ขั้นตอนสุดท้าย คือการแสดงว่า

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ให้ y := f(x) – x สมมุติว่า $y \neq 0$

ดังนั้น f(y) = f(f(x) – x) = f(f(x)) + f(-x) = f(x) – f(x) = 0 ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันคำตอบที่เป็นไปได้คือ f(x) = x ซึ่งตรวจสอบได้ว่าเป็นคำตอบที่แท้จริง

ตัวอย่าง 4.2.14 (IMO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\{f(x) + f(z)\}\{f(y) + f(t)\} = f(xy - zt) + f(xt + yz) \qquad (x, y, z, t \in \mathbb{R}) \quad (4.2.14.1)$$

วิธีทำ แทนค่า $x = z = a$, $y = t = b$ ใน (4.2.14.1) ได้

$$4f(a)f(b) = f(0) + f(2ab)$$

แทนค่า $x = z = 1$, $y = t = ab$ ใน (4.2.14.1) ได้

$$4f(1)f(ab) = f(0) + f(2ab)$$

เมื่อเปรียบเทียบสมการทั้งสองได้

$$f(a)f(b) = f(1)f(ab) \quad (4.2.14.2)$$

ถ้า $f(1) = 0$ แล้ว แทน $b = a$ ใน (4.2.14.2) ได้

$$f(a) = 0 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } a$$

ดังนั้น จากนี้ไป สมมุติว่า $f(1) \neq 0$ แทนค่า $x = t = a$, $y = z = b$ ใน (4.2.14.1) ได้

$$\{f(a) + f(b)\}^2 = f(0) + f(a^2 + b^2) \quad (4.2.14.3)$$

แทนค่า $x = z = 1$ ใน (4.2.14.1) ได้

$$2f(1)\{f(y) + f(t)\} = f(y - t) + f(y + t) \quad (4.2.14.4)$$

แทนค่า $x = y = z = 1$, $t = 0$ ใน (4.2.14.1) แล้วหารด้วย $f(1)$ ($\neq 0$) ได้

$$f(0) + f(1) = 1 \quad (4.2.14.5)$$

แทนค่า $x = y = z = t = 0$ ใน (4.2.14.1) ได้

$$4\{f(0)\}^2 = 2f(0)$$

ซึ่งให้ $f(0) = 0$ หรือ $\frac{1}{2}$

- กรณี $f(0) = \frac{1}{2}$: จาก (4.2.14.5) ได้

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

แทนค่า $y = 0$ ใน (4.2.14.4) ได้

$$f(0) + f(t) = f(-t) + f(t)$$

ซึ่งให้

$$f(x) = \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- กรณี $f(0) = 0$: จาก (4.2.14.5) ได้

$$f(1) = 1$$

สมการ (4.2.14.2) กลายเป็น

$$f(a)f(b) = f(ab) \quad (4.2.14.6)$$

ซึ่งให้

$$f(a^2) = \{f(a)\}^2$$

แสดงว่า

$$f(x) \geq 0 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \geq 0$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง สำหรับจำนวนจริง $s \geq t \geq 0$ ที่มีสมบัติว่า $s = t + \varepsilon$ เมื่อ $\varepsilon \geq 0$ แทนค่า $a = \sqrt{\varepsilon}$, $b = \sqrt{t}$ ลงใน (4.2.14.3) ได้

$$f(s) = f(t + \varepsilon) = \{f(\sqrt{\varepsilon}) + f(\sqrt{t})\}^2 \geq \{f(\sqrt{t})\}^2 = f(t)$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

แทนค่า $t = 1$ ใน (4.2.14.4) ได้

$$2\{f(y) + 1\} = f(y - 1) + f(y + 1)$$

เมื่อใช้ร่วมกับ $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ โดยการอุปนัยได้ว่า

$$f(y) = y^2 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } y \geq 0$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จาก (4.2.14.6)ได้ $f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n)f(\frac{1}{n})$

แสดงว่า

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2}$$

ถ้า $\frac{m}{n}$ เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้ว (4.2.14.6) ให้

$$f(\frac{m}{n}) = f(m)f(\frac{1}{n}) = \frac{m^2}{n^2}$$

สมมุติว่า $f(x) > x^2$ สำหรับบางจำนวนจริงบวก x แล้ว เราสามารถเลือกจำนวนตรรกยะ q ที่มีสมบัติว่า

$$x < q < \sqrt{f(x)}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงได้ว่า

$$f(x) \leq f(q) = q^2 < f(x)$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ในทำนองเดียวกัน $f(x) > x^2$ เป็นไปไม่ได้เช่นกัน

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = x^2 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \geq 0$$

แทนค่า $y = 0$ ใน (4.2.14.4) ได้ $f(t) = f(-t)$

แสดงว่า $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$

สรุปได้ว่า มีฟังก์ชันคำตอบที่เป็นไปได้สามแบบ คือ

1. $f(x) = 0$ $(x \in \mathbb{R})$
2. $f(x) = \frac{1}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$
3. $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$

ซึ่งตรวจสอบได้โดยตรงว่าทั้งสามเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.2.15 (Czech-Slovak MO 2000) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$x^2 + y^2 + 2f(xy) = f(x + y)\{f(x) + f(y)\} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ ก่อนอื่น เรารวบรวมข้อมูลที่ได้จากการแทนค่า หลาย ๆ แบบเพื่อความสะดวกในการอ้างอิงต่อไป ในที่นี้ a แทนจำนวนจริง

$x = 0, y = 0$: $$f(0) = \{f(0)\}^2 \qquad (4.2.15.1)$$

$x = 0, y = a$: $$a^2 + 2f(0) = f(a)\{f(a) + f(0)\} \qquad (4.2.15.2)$$

$x = a, y = a$: $$a^2 + f(a^2) = f(a)f(2a) \qquad (4.2.15.3)$$

$x = a, y = -a$: $$2a^2 + 2f(-a^2) = f(0)\{f(a) + f(-a)\} \qquad (4.2.15.4)$$

$x = 1, y = 1$: $$1 = f(1)\{f(2) - 1\} \qquad (4.2.15.5)$$

จาก (4.2.15.1) ได้ว่า f(0) เป็นรากของสมการ $t = t^2$ ซึ่งแสดงว่า

$$t = 0 \text{ หรือ } 1$$

- กรณี $f(0) = 0$: แทนสิ่งนี้ลงใน (4.2.15.2) ได้

$$a^2 = \{f(a)\}^2$$

ซึ่งให้

$$f(a) = a \text{ หรือ } -a \text{ สำหรับทุก } a \in \mathbb{R}$$

แทนค่า $f(0) = 0$ ใน (4.2.15.4) ได้

$$f(-a^2) = -a^2$$

ซึ่งแสดงว่า

$$f(x) = x \text{ สำหรับทุก } x \leq 0$$

ถ้ามีจำนวนจริง $a \neq 0$ ที่ทำให้ $f(a^2) \neq a^2$ แล้ว จากที่พบข้างต้นต้องได้

$$f(a^2) = -a^2$$

ซึ่ง (4.2.15.3) ให้ว่า

$$f(a)f(2a) = 0$$

แต่จากสิ่งที่พบเราได้ว่า

$$f(a)f(2a) = (\pm a)(\pm 2a) \neq 0$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง
ดังนั้น

$$f(x) = x \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } a \geq 0$$

แสดงว่า

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

- กรณี $f(0) = 1$: แทนสิ่งนี้ลงใน (4.2.15.2) ได้

$$\{f(a)\}^2 + f(a) - a^2 - 2 = 0$$

ซึ่งแก้ได้

$$f(a) = \frac{-1 \pm \sqrt{4a^2 + 9}}{2} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

แทนค่า a = 1 ให้

$$f(1) = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$ ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะ

แทนค่า a = 2 ให้

$$f(2) = 2 \text{ หรือ } -3$$ ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น

ผลคูณ $f(1)\{f(2) - 1\}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ซึ่งขัดแย้งกับ (4.2.15.5)

สรุปว่าฟังก์ชันคำตอบที่เป็นไปได้คือ

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

ซึ่งตรวจคำตอบได้ว่าถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.2.16 จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y)f(x - y) = \{f(x)f(y)\}^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ ก่อนอื่นสังเกตว่า ฟังก์ชันค่าคงตัว f(x) = 0, 1 หรือ -1 เป็นฟังก์ชันคำตอบ จากนี้ไปจึงจะไม่พิจารณาฟังก์ชันคำตอบทั้งสามนี้อีก นอกจากนี้สังเกตอีกด้วยว่าเพียงพอที่จะหาฟังก์ชันคำตอบที่มีค่าเป็นจำนวนจริงไม่ติดลบ ทั้งนี้เพราะจากสมการเชิงฟังก์ชัน เมื่อได้ฟังก์ชันคำตอบดังกล่าวแล้ว ฟังก์ชันที่มีค่าตรงข้ามกับฟังก์ชันดังกล่าว จะเป็นฟังก์ชันคำดอบด้วยเช่นกัน ดังนั้น เราจึงจะหาเพียงฟังก์ชันคำดอบที่มีเรนจ์เป็นจำนวนจริงไม่ติดลบ

แทนค่า y = 0 ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$\{f(x)\}^2 = \{f(x)f(0)\}^2$$

ซึ่งให้ f(0) = 1 แทนค่า x = 0 ได้

$$f(y)f(-y) = \{f(y)\}^2$$

ซึ่งให้ f(y) = f(-y) แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันคู่

แทน x = y ได้ $f(2x) = \{f(x)\}^4$

ซึ่งโดยการอุปนัยให้ว่า

$$f(nx) = \{f(x)\}^{n^2}$$

โดยวิธีการเดียวกันกับที่ใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการโคชี ความสัมพันธ์นี้ ขยายได้ไปสู่จำนวนตรรกยะ และโดยความต่อเนื่อง ขยายได้ไปสู่จำนวนจริง ทำให้ได้ว่า

$$f(x) = \{f(1)\}^{x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 4.2.17 จงหา $f : [1, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(x) \leq 2(1 + x)$ $(x \in [1, \infty))$

(ii) $xf(x + 1) = \{f(x)\}^2 - 1$ $(x \in [1, \infty))$

วิธีทำ โดยการตรวจพินิจ พบว่า $f(x) = x + 1$ เป็นฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันหนึ่ง เราจะแสดงว่าสิ่งนี้เป็นเพียงฟังก์ชันคำตอบเดียว จากสมการเชิงฟังก์ชัน และอสมการที่กำหนดให้ ได้

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 &= xf(x + 1) + 1 && \leq x\{2(x + 2)\} + 1 \\ &= 1 + 4x + 2x^2 && < 2(1 + 2x + x^2) \\ &= 2(1 + x)^2 \end{aligned}$$

แสดงว่า

$$f(x) < \sqrt{2}\,(x + 1)$$

เมื่อใช้อสมการนี้จะได้

$$\begin{aligned} \{f(x)\}^2 &= xf(x + 1) + 1 && < \sqrt{2}\,x(2 + x) + 1 \\ &= \sqrt{2}\,x^2 + 2\sqrt{2}\,x + 1 && < \sqrt{2}\,(x^2 + 2x + 1) \\ &= \sqrt{2}\,(x + 1)^2 \end{aligned}$$

ซึ่งให้อสมการใหม่ที่ดีขึ้น คือ

$$f(x) < 2^{\frac{1}{4}}(x + 1)$$

โดยการอุปนัย ได้ว่า

$$f(x) < 2^{\frac{1}{2^k}}(1 + x)$$

สำหรับทุกจำนวนนับ k และทุก $x \in [1, \infty)$

ดังนั้น

$$f(x) \leq 1 + x \quad (x \in [1, \infty))$$

สมมุติว่ามีจำนวนจริง $x_0 \in [1, \infty)$ ที่มีสมบัติว่า

$$f(x_0) < 1 + x_0$$

ให้ $f(x_0) = 1 + x_0 - r$ โดยที่ $0 < r \leq x_0$ เราได้ว่า

$$f(1 + x_0) = \frac{(f(x_0))^2 - 1}{x_0} = \frac{(1 + x_0 - r)^2 - 1}{x_0} = x_0 - 2r + 2 + \frac{r^2 - 2r}{x_0}$$

$$\leq x_0 - 2r + 2 + r - 2 = x_0 - r < x_0$$

เมื่อใช้อสมการที่เพิ่งได้รับนี้อีกครั้ง ได้

$$f(x_0 + 2) = \frac{(f(x_0+1))^2 - 1}{x_0 + 1} < \frac{x_0^2 - 1}{x_0 + 1} < x_0 - 1$$

เมื่อใช้ซ้ำอีก จะได้

$$f(x_0 + 3) = \frac{(f(x_0+2))^2 - 1}{x_0 + 2} < \frac{(x_0 - 1)^2 - 1}{x_0 + 2}$$

$$= \frac{x_0(x_0 - 2)}{x_0 + 2} < x_0 - 2$$

โดยการอุปนัย แสดงได้ว่า

$$f(x_0 + k) < x_0 - k + 1$$

เมื่อ k มีค่าโตมากพอ ได้ว่า

$$f(x_0 + k) < 1$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันคำตอบคือ

$$f(x) = 1 + x \qquad (x \in [1, \infty))$$

ซึ่งตรวจคำตอบได้โดยตรงว่าถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.2.18 ให้ $0 < a < 1$ และ $f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$f(0) = 0, f(1) = 1$$

และ

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1 - a)f(x) + af(y) \qquad (x, y \in [0, 1], x \leq y)$$

จงหาค่า $f(\frac{1}{7})$

วิธีทำ จากค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด 0,1 ที่กำหนดมาให้ โดยใช้สมการเชิงฟังก์ชันซ้ำ ๆ พบว่า ค่าของฟังก์ชัน ณ จุด 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, ... กล่าวคือ ณ จุดในรูป $\frac{k}{2^n}$ สามารถหาได้หนึ่งเดียว

เนื่องจากเซตของจำนวนตรรกยะในรูปดังกล่าวหนาแน่นในช่วง [0, 1] และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันหาได้หนึ่งเดียวทั่วทั้งช่วงดังกล่าว แสดงว่า มีฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งหมดของโจทย์เพียงฟังก์ชันเดียว

นอกจากนี้ ได้ด้วยว่า

$$f(x) = f(y) \text{ ได้เพียงเมื่อ } x = y$$

ทั้งนี้เพราะ ถ้า $f(x) = f(y)$ เมื่อ $x < y$ แล้วจากการแทนค่าในสมการเชิงฟังก์ชัน จะได้ว่า

$$f(z) = f(x) \text{ สำหรับทุก } z \in [x,y]$$

และโดยความต่อเนื่องได้ว่า เป็นจริง สำหรับทุก $z \in [0, 1]$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ จากความแตกต่างกันของค่าฟังก์ชันที่จุด 0, 1

ให้

$$g(x) := \frac{f\left(\frac{1}{8}+\frac{x}{8}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)} := Af(Bx + C) + D$$

เราพบว่า $g(0) = 0, g(1) = 1$ และ

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= A\cdot f\left(B\frac{x+y}{2}+C\right)+D \qquad = A\cdot f\left(\frac{Bx+C}{2}+\frac{By+C}{2}\right)+D \\ &= (1-a)A\cdot f(Bx+C)+(1-a)D+aA\cdot f(By+C)+aD \\ &= (1-a)g(x)+ag(y) \end{aligned}$$

ซึ่งแสดงว่า

$$g = f$$

ดังนั้น

$$f(\tfrac{1}{7}) = g(\tfrac{1}{7}) = \frac{f\left(\frac{1}{7}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right)-f\left(\frac{1}{8}\right)}$$

ดังนั้น

$$f(\tfrac{1}{7}) = \frac{f\left(\frac{1}{8}\right)}{1-f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{8}\right)}$$

สังเกตว่า

$$f(\tfrac{1}{2}) = a,\ f(\tfrac{1}{4}) = a^2,\ f(\tfrac{1}{8}) = a^3$$

เพราะฉะนั้น

$$f(\tfrac{1}{7}) = \frac{a^3}{1-a^2+a^3}$$

ตัวอย่าง 4.2.19 (Putnam 2000) ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(2x^2 - 1) = 2xf(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

จงแสดงว่า $f(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in [-1, 1]$

วิธีทำ สำหรับจำนวนจริง t ที่ไม่ใช่พหุคูณของ π ให้

$$g(t) := \frac{f(\cos t)}{\sin t}$$

ซึ่งให้ว่า

$$g(t + 2\pi) = g(t)$$

นอกจากนี้สมการเชิงฟังก์ชันให้ว่า เมื่อ t ไม่ใช่พหุคูณของ π แล้ว

$$g(2t) = \frac{f(2\cos^2 t - 1)}{2\sin t\cos t} = \frac{2\cos t \cdot f(\cos t)}{2\sin t\cos t} = g(t)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อ n, k เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$g(1 + \frac{n\pi}{2^{k-1}}) = g(2^k + 2n\pi) = g(2^k) = g(1)$$

ต่อไปจะแสดงว่าเซต $\{1 + \frac{n\pi}{2^{k-1}} ; n, k \in \mathbb{Z}\}$ หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง โดยให้ ε และ r เป็นจำนวนจริงใดๆ เราสามารถหาจำนวนนับ k ที่

$$\left|\frac{\pi}{r^k}\right| < \varepsilon$$

และมีจำนวนนับ n ที่

$$\frac{n\pi}{2^k} \le (r - 1) \le \frac{(n+1)\pi}{2^k}$$

สรุปได้คือ

$$\left|\frac{n\pi}{2^k} - (r - 1)\right| < \varepsilon$$

นั่นคือเซต $\{1 + \frac{n\pi}{2^{k-1}} ; n, k \in \mathbb{Z}\}$ หนาแน่นในเซตของจำนวนจริง

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย ณ จุดที่มันมีความหมาย ดังนั้น g ต้องเป็นฟังก์ชันค่าคงตัวตลอดโดเมนของมัน จาก g(-t) = -g(t) สำหรับทุกจำนวนจริง t ที่ไม่ใช่พหุคูณของ π ค่าคงตัวนี้ต้องเป็น 0 เพราะฉะนั้น

$$f(x) = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in (-1, 1)$$

แทนค่า x = 0 และ x = 1 ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(-1) = f(1) = 0$$

ตัวอย่าง 4.2.20 (Putnam 2002) ให้ $a, b \in (0, \frac{1}{2})$ และให้ g เป็นฟังก์ชันจริงที่ต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$g(g(x)) = ag(x) + bx \quad (x \in \mathbb{R})$$

จงพิสูจน์ว่า $g(x) = cx$ สำหรับบางค่าคงตัว $c \in \mathbb{R}$

วิธีทำ เราจะแสดงว่า มีฟังก์ชันคำตอบสองฟังก์ชันพอดี กล่าวคือ

$$g_1(x) = r_1x \text{ และ } g_2(x) = r_2x$$

เมื่อ r_1, r_2 เป็นรากทั้งสองของพหุนาม

$$x^2 - ax - b = (x - r_1)(x - r_2) \text{ โดยที่ } r_2 < 0 < r_1$$

ขั้นแรก จะแสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
ทั้งนี้ เพราะจาก $g(x) = g(y)$ ได้

$$g(g(x)) = g(g(y))$$

เมื่อใช้สมการเชิงฟังก์ชันได้

$$bx = by$$

ซึ่งชี้ว่า

$$x = y$$

ขั้นที่สอง สังเกตว่าจากการที่ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ที่เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ซึ่งชี้ว่า g เป็นฟังก์ชันไม่มีขอบเขตทั้งขอบเขตบน และล่าง ทั้งนี้เพราะไม่เช่นนั้น จะมีลำดับ (s_n) ที่มีสมบัติว่า

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} g(s_n) = B \neq \infty$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เนื่องจากทำให้ได้ว่า

$$g(B) - aB = \lim_{n\to\infty} \{g(g(s_n)) - ag(s_n)\} = \lim_{n\to\infty} bs_n = \pm\infty$$

ดังนั้น g มีฟังก์ชันผกผัน

ถ้า g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้ว

$$\text{sign } \{x - g(x)\} = \text{sign } \{g(x) - g(g(x))\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ถ้า g เป็นฟังก์ชันลด แล้ว

$$\text{sign } \{x - g(x)\} = -\text{ sign } \{g(x) - g(g(x))\} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ให้ $t \in \mathbb{R}$ ดังนั้นมีฟังก์ชันจริง $\alpha(t), \beta(t)$ เพียงอย่างละฟังก์ชันเดียวที่ทำให้

$$t = \alpha(t) + \beta(t) \quad \text{และ} \quad g(t) = r_1\alpha(t) + r_2\beta(t)$$

(ซึ่งตรวจสอบได้โดยการแก้ระบบสมการ พบว่า $\alpha(t) = \dfrac{r_2 t - g(t)}{r_2 - r_1}$, $\beta(t) = \dfrac{g(t) - r_1}{r_2 - r_1}$)

จาก
$$\begin{aligned} g(g(t)) &= ag(t) + bt \\ &= a\{ r_1\alpha(t) + r_2\beta(t)\} + b\{\alpha(t) + \beta(t)\} \\ &= \alpha(t)\{ ar_1 + b \} + \beta(t)\{ ar_2 + b \} \\ &= \alpha(t)r_1^2 + \beta(t)r_2^2 \end{aligned}$$

และ

$$g(g(t)) = r_1\alpha(g(t)) + r_2\beta(g(t))$$

ได้ว่า

$$\alpha(g(t)) = r_1\alpha(t) \text{ และ } \beta(g(t)) = r_2\beta(t)$$

เพราะฉะนั้น สำหรับทุกจำนวนจริง t และทุกจำนวนเต็มไม่ติดลบ n ได้ว่า

$$\alpha(g^n(t)) = r_1^n\alpha(t) \text{ และ } \beta(g^n(t)) = r_2^n\beta(t)$$

ให้ t_0 เป็นจำนวนจริงที่ตรึงจำนวนหนึ่ง และ n เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบใด ๆ
ให้ $t_n = g^n(t_0) = \alpha(t_0)r_1^n + \beta(t_0)r_2^n$
ดังนั้น

$$t_n - g(t_n) = \alpha(t_0)(1 - r_1)r_1^n + \beta(t_0)(1 - r_2)r_2^n$$

ถ้า $\alpha(t_0) \neq 0$ แล้ว สำหรับ n ที่มีค่าบวกสูงมากพอ ได้ว่า

$$\text{sign } (t_n - g(t_n)) = \text{sign } (\alpha(t_0)) = \text{sign } (g(t_n) - g(g(t_n))) \quad \left(\text{เพราะว่า } \left|\frac{r_1}{r_2}\right| > 1\right)$$

ในขณะที่ ถ้า $\beta(t_0) \neq 0$ แล้ว สำหรับ n ที่มีค่าลบสูงมากพอ ได้ว่า

$$\text{sign } (t_n - g(t_n)) = \text{sign } ((-1)^n\beta(t_0)) = -\text{ sign } (g(t_n) - g(g(t_n)))$$

เพราะฉะนั้น ถ้า g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้ว

$$\beta(t_0) = 0$$

ซึ่งให้ว่า

$$g(t_0) = r_1t_0$$

ในขณะที่ ถ้า g เป็นฟังก์ชันลด แล้ว

$$\alpha(t_0) = 0$$

ซึ่งให้ว่า

$$g(t_0) = r_2t_0$$

เนื่องจาก t_0 เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น ได้คำตอบตามที่กล่าวถึงทุกประการ

ตัวอย่าง 4.2.21 ให้ f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีโดเมนเป็น [0, 1] และสอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) $2f(x) + f(y) = 3f\left(\frac{2x + y}{3}\right) \quad (x, y \in [0, 1])$

จงพิสูจน์ว่า

$$f(x) = 0 \quad (x \in [0, 1])$$

วิธีทำ เราพิสูจน์โดยการอุปนัยบนจำนวนเต็ม n ว่า $f\left(\frac{m}{3^n}\right) = 0$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$ และทุกจำนวนเต็ม $0 \leq m \leq 3^n$

จากเงื่อนไข (i) ได้ว่า ประพจน์นี้เป็นจริง เมื่อ $n = 0$

สมมุติว่าประพจน์เป็นจริงเมื่อ $n = k - 1 \geq 0$ เราจะแสดงว่าเป็นจริง เมื่อ $n = k$

ถ้า $m \equiv 0 \pmod 3$ แล้ว

$$f\left(\frac{m}{3^k}\right) = f\left(\frac{\frac{m}{3}}{3^{k-1}}\right) = 0$$

โดยสมมุติฐานของการอุปนัย

ถ้า $m \equiv 1 \pmod 3$ แล้ว $1 \leq m \leq 3^k - 2$ และ

$$3 = 2f\left(\frac{\frac{m-1}{3}}{3^{k-1}}\right) + f\left(\frac{\frac{m+2}{3}}{3^{k-1}}\right) = 0 + 0 = 0$$

ดังนั้น $f\left(\frac{m}{3^k}\right) = 0$

ถ้า $m \equiv 2 \pmod 3$ แล้ว $2 \leq m \leq 3^k - 1$ และ

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right) = 2f\left(\frac{\frac{m+1}{3}}{3^{k-1}}\right) + f\left(\frac{\frac{m-2}{3}}{3^{k-1}}\right) = 0 + 0 = 0$$

ดังนั้น $f\left(\frac{m}{3^k}\right) = 0$

เป็นอันเสร็จสิ้นการพิสูจน์ประพจน์โดยการอุปนัย

เนื่องจากเซตของจำนวนตรรกยะในรูป $\frac{m}{3^k}$ มีความหนาแน่นในช่วง $[0,1]$และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงสรุปได้ว่า

$$f(x) = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in [0, 1]$$

ตัวอย่าง 4.2.22 (IMO 1999) จงหา $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ ให้ $A = \text{Im } f$, $c = f(0)$ แทนค่า $x = y = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(-c) = f(c) + c - 1$$

แสดงว่า $c \neq 0$

ขั้นแรกเราจะหาฟังก์ชันที่จำกัดโดเมนเป็น A โดยการแทน $x = f(y)$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \qquad (x \in A) \qquad (4.2.22.1)$$

เมื่อ $y = 0$ ได้

$$\{f(x-c) - f(x) ; x \in \mathbb{R}\} = \{cx + f(c) - 1 ; x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \text{ (เพราะว่า } c \neq 0)$$

ขั้นต่อไป คือการหาค่า $f(x)$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เลือก $y_1, y_2 \in A$ ที่มีสมบัติว่า $x = y_1 - y_2$ (ซึ่งทำได้จากสิ่งที่เพิ่งพิสูจน์) แล้วใช้ (4.2.22.1) ได้

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y_2) \\ &= f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 \\ &= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 \\ &= c - \frac{(y_1-y_2)^2}{2} \\ &= c - \frac{x^2}{2} \end{aligned} \qquad (4.2.22.2)$$

เมื่อเปรียบเทียบ (4.2.22.1) กับ (4.2.22.2) ได้

$$c = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 4.2.23 จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xy)\{f(x) - f(y)\} = (x - y)f(x)f(y) \quad (x,y \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.23.1)$$

วิธีทำ แทนค่า $y = 1$ ใน (4.2.23.1) ได้

$$(f(x))^2 = xf(x)f(1) \qquad (4.2.23.2)$$

ถ้า $f(1) = 0$ แล้ว

$$f(x) = 0 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ฟังก์ชันนี้สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน (4.2.23.1) จึงเป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้องฟังก์ชันหนึ่ง

ถ้า $f(1) \neq 0$ แล้วให้

$$f(1) = c \neq 0$$

สมการ (4.2.23.2) ให้ว่า

$$f(0) = 0$$

ให้ $G := \{x \in \mathbb{R} ; f(x) \neq 0\}$ โดย (4.2.23.2) ได้ว่า

$$f(x) = xf(1) \qquad (x \in G\}$$

แสดงว่า สมการ (4.2.23.1) มีคำตอบเป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูป

$$f(x) = \begin{cases} cx & , x \in G \\ 0 & , x \notin G \end{cases} \qquad (4.2.23.3)$$

เราเหลือเพียงหาโครงสร้างของเซต G สามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า ถ้า $x \neq y$ และทั้ง x กับ $y \in G$ แล้ว ฟังก์ชันที่นิยามโดย (4.2.23.3) สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน (4.2.23.1) ก็ต่อเมื่อ $xy \in G$ ในขณะที่ ถ้าทั้ง x และ $y \notin G$ แล้วฟังก์ชันสอดคล้องกับ (4.2.23.1) เช่นกัน โดยความสมมาตร จึงเหลือเพียงกรณีที่ต้องพิจารณาคือ $x \in G$, $y \notin G$ ในกรณีนี้ (4.2.23.1) ชี้ว่า

$$f(x)f(y) = 0$$

ซึ่งแสดงว่า

$$f(xy) = 0$$

ดังนั้น

$$\text{ถ้า } x \in G, y \notin G \text{ แล้ว } xy \notin G \qquad (4.2.23.4)$$

เพราะฉะนั้น เราพบความจริงต่อไปนี้เกี่ยวกับเซต G

(a) ถ้า $x \in G$ แล้ว $1/x \in G$ สิ่งนี้เป็นจริงเพราะไม่เช่นนั้น (4.2.23.4) จะบังคับให้ $1 \notin G$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ (เพราะเราสมมุติว่า $f(1) \neq 0$)

(b) ถ้า $x, y \in G$ แล้ว $xy \in G$ สิ่งนี้เป็นจริงเพราะโดย (a) ได้ $\frac{1}{x} \in G$ ดังนั้น ถ้า $xy \notin G$ แล้ว (4.2.23.4) ชี้ว่า

$$y = (xy)(\tfrac{1}{x}) \notin G$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

(c) ถ้า $x, y \in G$ แล้ว $\frac{x}{y} \in G$ สิ่งนี้เป็นจริงจาก (a), (b)

ดังนั้น G เป็นเซตที่บรรจุ 1 ไม่บรรจุ 0 และปิดภายใต้การคูณและการหาร เราสามารถตรวจสอบได้ไม่ยากว่าเซตดังกล่าว สอดคล้องกับเงื่อนไข (a) (เพราะ $1 \in G$)

นอกจากนี้ ถ้า G มีสมบัติปิดภายใต้การคูณและการหาร แล้ว $x \in G$, $y \notin G$ แล้ว $xy \notin G$ เพราะไม่เช่นนั้น

$$y = (xy)(\tfrac{1}{x}) \in G$$

เป็นข้อขัดแย้ง

สรุปได้ว่า สมบัติปิดภายใต้การคูณ และการหาร จำแนกเซต G ได้อย่างสมบูรณ์ และ ฟังก์ชันคำตอบคือ

$$f(x) = \begin{cases} cx & , x \in G \\ 0 & , x \notin G \end{cases}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว และ G เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ ที่มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ และการหาร (กล่าวคือเป็น กรุปย่อยของจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ที่ปิดภายใต้การคูณ)

สังเกตด้วยว่า ถ้า c = 0 จะได้กรณีฟังก์ชันศูนย์ที่พบมาก่อนในตอนแรก

ตัวอย่าง 4.2.24 ให้ $\mathbb{R}^+$ แทนเซตของจำนวนจริงบวก จงหา $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) = f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx})$ $\quad (x, y, z \in \mathbb{R}^+)$

(ii) $f(x) < f(y)$ $\quad (1 \leq x \leq y)$

วิธีทำ ขั้นแรกเราจะพิสูจน์ ประพจน์ต่อไปนี้ก่อน

"มีฟังก์ชัน $g : [1, \infty) \to [1, \infty)$ เพียงหนึ่งเดียว ที่มีสมบัติว่า $f(x) = g(x) + 1/g(x)$ "

แทนค่า x = y = z = 1 ใน (i) ได้

$$4f(1) = (f(1))^3$$

จาก f(1) > 0 ได้ว่า

$$f(1) = 2$$

พิจารณาฟังก์ชัน $A: [1, \infty) \to [1, \infty)$ โดยให้

$$A(x) = x + \frac{1}{x}$$

จาก (ii) f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ และ A เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จึงได้ว่าฟังก์ชัน g ดังกล่าว มีเพียงหนึ่งเดียว กล่าวคือประพจน์ที่ต้องการพิสูจน์ เป็นจริง

เนื่องจาก A เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ จึงได้ว่า g เป็นฟังก์ชันเพิ่มโตยแท้ด้วย จาก f(1) = 2 ได้

$$g(1) = 1$$

แทนค่า $(x, y, z) = (t, t, \frac{1}{t}), (t^2, 1, 1)$ ใน (i) ตามลำดับ ได้

$$f(t) = f(\frac{1}{t}),\ f(t^2) = (f(t))^2 - 2$$

แทนค่า $(x, y, z) = (\frac{s}{t}, \frac{t}{s}, st), (s^2, \frac{1}{s^2}, t^2)$ ใน (i) และใช้สมการที่เพิ่งค้นพบได้

$$f(st) + f(\frac{t}{s}) = f(s)f(t)$$

และ

$$f(st)f(\frac{t}{s}) = f(s^2) + f(t^2) = (f(s))^2 + (f(t))^2 - 4$$

ให้ $1 \leq x \leq y$ เราจะแสดงต่อไปว่า

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

เรามีว่า

$$f(xy)+ f(\frac{y}{x}) = f(x)f(y)$$
$$= \{g(x) + \frac{1}{g(x)}\}\{g(y) + \frac{1}{g(y)}\}$$
$$= \{g(x)g(y) + \frac{1}{g(x)g(y)}\} + \{\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{g(y)}{g(x)}\}$$

และ

$$f(xy)f(\frac{y}{x}) = \{g(x)+ \frac{1}{g(x)}\}^2+\{g(y) + \frac{1}{g(y)}\}^2-4$$
$$= \{g(x)g(y) + \frac{1}{g(x)g(y)}\}\{\frac{g(x)}{g(y)} + \frac{g(y)}{g(x)}\}$$

ซึ่งให้ว่า

$$\{f(xy), f(y/x)\} = \{g(x)g(y) + \frac{1}{g(x)g(y)}, \frac{g(x)}{g(y)} + \frac{g(y)}{g(x)}\}$$
$$= \{A(g(x)g(y)), A(\frac{g(y)}{g(x)})\}$$

เนื่องจาก

$$f(xy) = A(g(xy))$$

และ A เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จึงได้ว่า

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

หรือไม่ก็

$$g(xy) = \frac{g(y)}{g(x)}$$

จาก $xy \geq x,y$ และ g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม จึงได้ว่า

$$g(xy) = g(x)g(y)$$

ให้ $c > 1$ เป็นค่าคงตัว และสมมุติว่า $g(c) = c^r$
เนื่องจาก $g(c) > 1$ ได้ว่า

$$r > 0$$

โดยสมบัติเชิงการคูณของ g ได้ว่า

$$g(c^q) = c^{rq} \text{ สำหรับทุกจำนวนตรรกยะ } q \geq 0$$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ได้ว่า

$$g(c^t) = c^{tr} \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } t \geq 0$$

กล่าวคือ

$$g(x) = x^r \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \geq 1$$

จึงได้ว่า $f(x) = x^r + x^{-r}$ $(x \geq 1)$
และเนื่องจาก $f(t) = f(\frac{1}{t})$ จึงได้ด้วยว่า

$$f(x) = x^r + x^{-r} \text{ สำหรับ } 0 < x < 1 \text{ เช่นกัน}$$

ขั้นตอนสุดท้าย คือการตรวจสอบว่า สำหรับจำนวนจริง $r > 0$

ฟังก์ชัน $f(x) = x^r + x^{-r}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสองของโจทย์

เงื่อนไข (i) เป็นจริงเพราะ

$$\begin{aligned} f(\sqrt{xy})f(\sqrt{yz})f(\sqrt{zx}) &= \{(xy)^{\frac{r}{2}} + (xy)^{-\frac{r}{2}}\}\{(yz)^{\frac{r}{2}} + (yz)^{-\frac{r}{2}}\}\{(zx)^{\frac{r}{2}} + (zx)^{-\frac{r}{2}}\} \\ &= (xyz)^r + x^r + y^r + z^r + x^{-r} + y^{-r} + z^{-r} + (xyz)^{-r} \\ &= f(xyz) + f(x) + f(y) + f(z) \end{aligned}$$

เงื่อนไข (ii) เป็นจริงเพราะ $1 \leq x < y$ ชี้ว่า

$$f(y) - f(x) = (y^r - x^r)\{1 - \frac{1}{(xy)^r}\} > 0$$

ตัวอย่าง 4.2.25 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลดทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(0) = 0, f(1) = 1$

(ii) $f(a) + f(b) = f(a)f(b) + f(a + b - ab)$ สำหรับทุกจำนวนจริง a, b ที่มีสมบัติว่า $a < 1 < b$

วิธีทำ ให้ $g(x) := f(x + 1) - 1$ ได้ว่า g เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด $g(0) = 0, g(-1) = -1$
และโดยสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$g(-(a - 1)(b - 1)) = -g(a - 1)g(b - 1) \quad \text{เมื่อ } a < 1 < b$$

ซึ่งให้ว่า

$$g(-xy) = -g(x)g(y) \quad \text{เมื่อ } x < 0 < y$$

หรือ

$$g(yz) = -g(y)g(-z) \quad \text{เมื่อ } y, z > 0$$

ในทำนองกลับกัน ถ้า g สอดคล้องกับเงื่อนไขดังกล่าว แล้ว f จะสอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์

- กรณีที่หนึ่ง $g(1) = 0$ ซึ่งให้

$$g(z) = 0 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } z > 0$$

ให้ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลดใดๆ ที่มีสมบัติว่า

$$g(-1) = -1, g(x) = 0 \quad \text{สำหรับทุก } x \geq 0$$

จะได้ว่า g สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องการ

- กรณีที่สอง $g(1) > 0$ แทนค่า $y = 1$ ได้

$$g(-z) = -\frac{g(z)}{g(1)} \quad (z > 0) \qquad (4.2.25.1)$$

ซึ่งให้ว่า

$$g(yz) = \frac{g(y)g(z)}{g(1)} \qquad (y, z > 0)$$

ให้ $h(x) := \frac{g(x)}{g(1)}$ ได้ว่า

h เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด $h(0) = 0$, $h(1) = 1$ และ $h(xy) = h(x)h(y)$

ซึ่งให้ว่า

$h(x^q) = h(x)^q$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x > 0$ และ ทุกจำนวนตรรกยะ q

เนื่องจาก h เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด ดังนั้นจะมีจำนวนจริงไม่ติดลบ k ที่มีสมบัติว่า

$h(x) = x^k$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x > 0$

ให้ $g(1) = c > 0$ เราได้ว่า

$g(x) = cx^k$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x > 0$

นอกจากนี้ (4.2.25.1) ชี้ว่า $g(-x) = -x^k$ สำหรับทุก $x > 0$ จึงได้ว่า

$$g(x) = \begin{cases} cx^k & ,x > 0 \\ 0 & ,x = 0 \\ -(-x)^k & ,x < 0 \end{cases}$$

แสดงว่า g เป็นฟังก์ชันค่าไม่ลด $g(0) = 0$, $g(-1) = -1$ และ $g(-xy) = -g(x)g(y)$ เมื่อ $x < 0 < y$ เพราะฉะนั้น g สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องการ

จากนี้หาฟังก์ชันคำตอบ f ทั้งหมด ได้โดยการแทนค่ากลับ

$$f(x) = g(x - 1) + 1$$

ในกรณีที่หนึ่ง ได้ฟังก์ชันค่าไม่ลด f โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,x > 1 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

ในกรณีที่สอง ได้

$$f(x) = \begin{cases} c(x-1)^k + 1 & ,x > 1 \\ 1 & ,x = 1 \\ -(1-x)^k + 1 & ,x < 1 \end{cases}$$

เมื่อ $c > 0$, $k \geq 0$

ตัวอย่าง 4.2.26 จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$3f(2x + 1) = f(x) + 5x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

วิธีทำ จากการตรวจพินิจพบว่า $f(x) = x - \frac{3}{2}$ เป็นฟังก์ชันคำตอบฟังก์ชันหนึ่ง เราจะแสดงว่ามันเป็นเพียงคำตอบเดียวที่เป็นไปได้

ให้ $g(x) := f(x) - (x - \frac{3}{2})$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันจริงที่ต่อเนื่องด้วยเช่นกัน

ให้ R เป็นจำนวนจริงบวกที่ตรึงค่าหนึ่ง

เนื่องจาก g ต่อเนื่องในช่วงปิด [-R, R] โดยทฤษฎีบทว่าด้วยความต่อเนื่องในช่วงปิดจึงได้ว่า g ต้องมีขอบเขตในช่วงนี้ ให้

$$|g(x)| \leq M \text{ สำหรับทุก } x \in [-R,R]$$

จากสมการเชิงฟังก์ชันได้ว่า

$$3g(2x + 1) = g(x)$$

ซึ่งให้ว่า

$$|g(2x+1)| \leq \frac{M}{3} \text{ สำหรับทุก } x \in [-R, R]$$

สังเกตด้วยว่า

$$\text{เซต } \{2x + 1; x \in [-R, R]\} \supseteq \text{ช่วง } [-R, R]$$

ทำให้ได้ว่า

$$|g(x)| \leq \frac{M}{3} \text{ สำหรับทุก } x \in [-R, R]$$

เมื่อทำเช่นนี้ เราพบว่า เราได้ลดค่าขอบเขตจาก M ลงมาเป็น $\frac{M}{3}$

เมื่อดำเนินการเช่นนี้ซ้ำ พบว่าค่าขอบเขตลดลงเป็น $\frac{M}{3^2}, \frac{M}{3^3}, \ldots$

ทำให้ได้ว่า

$$g(x) = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in [-R, R]$$

เนื่องจาก R เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงสรุปได้ว่า g(x) ต้องเป็นฟังก์ชันศูนย์ ซึ่งให้

$$f(x) = x - \frac{3}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

ตัวอย่างในลำดับต่อไป ใช้แนวคิดของ จุดดรึง ซึ่งคือจุดที่ของฟังก์ชันมีค่าเท่ากับค่าของจุดนั้น แนวคิดนี้สามารถใช้ช่วยในการแก้สมการเชิงฟังก์ชันจำนวนมาก โดยเฉพาะอย่างยิ่งสมการเชิงฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับการทำซ้ำ (iteration) ของฟังก์ชัน

ตัวอย่าง 4.2.27 (IMO 1983) จงหา $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(xf(y)) = yf(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+)$

(ii) $f(x) \to 0 \qquad (x \to \infty)$

วิธีทำ ให้ $x_0 \in \mathbb{R}^+$, $y_0 := \frac{1}{f(x_0)} \in \mathbb{R}^+$ จากสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(x_0 f(y_0)) = 1$$

แสดงว่า

$$1 \in \text{เรนจ์ของ } f$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถแสดงได้ว่า ทุกจำนวนจริงบวกอยู่ในเรนจ์ของ f ซึ่งชี้ว่า มีจำนวนจริงบวก y ที่ทำให้

$$f(y) = 1$$

เมื่อใช้สิ่งนี้พร้อมกับแทนค่า x = 1 ลงใน (i) พบว่า

$$f(1\cdot 1) = f(1) = yf(1)$$

เนื่องจาก f(1) > 0 สิ่งนี้ให้ว่า

$$y = 1 \text{ และ } f(1) = 1$$

แทน y = x ใน (i) ได้

$$f(xf(x)) = xf(x) \quad (x \in \mathbb{R}^+) \tag{4.2.27.1}$$

แสดงว่า xf(x) เป็นจุดตรึง (fixed point) ของฟังก์ชัน f

นอกจากนี้ ถ้า a, b เป็นจุดตรึงของ f (กล่าวคือ f(a) = a, f(b) = b) แล้ว แทนค่า x = a, y = b ลงใน (i) ได้

$$f(ab) = ba$$

แสดงว่า ab เป็นจุดตรึงของ f ด้วยเช่นกัน

กล่าวคือ เซตของจุดตรึงของฟังก์ชัน f มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า a เป็นจุดตรึงจุดหนึ่ง แล้วทุกกำลังที่เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบของ a จะเป็นจุดตรึงด้วย แต่จาก (ii) $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ บังคับว่า ไม่มีจุดตรึงที่มีค่า > 1 เนื่องจาก xf(x) เป็นจุดตรึง จึงได้ว่า $xf(x) \leq 1$ ซึ่งชี้ว่า

$$f(x) \leq \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+) \tag{4.2.27.2}$$

ให้ a = zf(z) ได้ว่า

$$f(a) = a$$

แทนค่า $x = \frac{1}{a}$, y = a ลงใน (i) ได้

$$f\left(\frac{f(a)}{a}\right) = f(1) = 1 = af\left(\frac{1}{a}\right), \quad f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a}, \quad f\left(\frac{1}{zf(z)}\right) = \frac{1}{zf(z)}$$

แสดงว่า

$$\frac{1}{xf(x)} \text{ เป็นจุดตรึงของ f สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}^+$$

ดังนั้น $\frac{1}{xf(x)} \leq 1$ กล่าวคือ

$$f(x) \geq \frac{1}{x}$$

ซึ่งเมื่อใช้ร่วมกับ (4.2.27.2) ทำให้สรุปได้ว่า

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

ตัวอย่าง 4.2.28 ให้ g เป็นฟังก์ชันจริงที่มีจุดตรึงสองจุดพอดี คือ a, b และ $g\circ g$ เป็นฟังก์ชันจริงที่มีจุดตรึงสี่จุดพอดี คือ a, b, c, d จงพิสูจน์ว่า ไม่มีฟังก์ชันจริง f ที่มีสมบัติว่า $g = f\circ f$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์ก่อนว่า $g(c) = d,\ g(d) = c$

ให้ $g(c) = y$ ดังนั้น

$$c = g(g(c)) = g(y)$$

ซึ่งให้ว่า

$$g(g(y)) = g(c) = y$$

แสดงว่า y เป็นจุดตรึงของ $g \circ g$

ถ้า $y = a$ แล้ว $a = g(a) = g(y) = c$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $y = b$ จะได้ว่า $b = c$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

และถ้า $y = c$ แล้ว $c = g(y) = g(c)$ แสดงว่า c ต้องเป็น a หรือ b ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นกัน

ดังนั้น ต้องได้

$$g(c) = y = d$$

โดยข้อโต้แย้งทำนองเดียวกัน ได้

$$g(d) = c$$

สมมุติ (เพื่อหาข้อขัดแย้ง) ว่ามีฟังก์ชันจริง f ที่ทำให้

$$g(x) = f(f(x)) \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ดังนั้น

$$f(g(x)) = g(f(x)) \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ให้ $x_0 \in \{a, b\}$ ได้

$$f(x_0) = f(g(x_0)) = g(f(x_0))$$

แสดงว่า $f(x_0)$ เป็นจุดตรึงของ g ซึ่งให้ว่า

$$f(x_0) \in \{a, b\}$$

ในทำนองเดียวกัน สามารถแสดงได้ว่า

$$\text{ถ้า } x_1 \in \{a, b, c, d\} \text{ แล้ว } f(x_1) \in \{a, b, c, d\}$$

พิจารณา $f(c)$ ซึ่งเราทราบว่า $\in \{a, b, c, d\}$

ถ้า $f(c) = a$ แล้ว $f(a) = f(f(c)) = g(c) = d$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ f ส่ง $\{a, b\}$ ไปยัง $\{a, b\}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(c) = b$ แล้วจะได้ $f(b) = d$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $f(c) = c$ แล้ว $c = f(c) = f(f(c)) = g(c) = d$ ขัดแย้งกับการที่ $c \neq d$

ถ้า $f(c) = d$ แล้ว $f(d) = f(f(c)) = g(c) = d$ ซึ่งให้ว่า $g(d) = f(f(d)) = f(d) = d$ ขัดแย้งกับสิ่งที่พบข้างต้นว่า $g(d) = c$

เพราะฉะนั้น $f(c)$ ไม่สามารถเป็นสมาชิกของ $\{a, b, c, d\}$ ได้

สรุปได้ว่า ไม่มีฟังก์ชันจริง f ที่มีสมบัติว่า $g = f \circ f$ ดามต้องการ

ตัวอย่าง 4.2.29 (APMO 1989) จงหาฟังก์ชันจริง f(x) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) f(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

(ii) $f(x) + g(x) = 2x \quad (x \in \mathbb{R})$ เมื่อ $g(x) = f^{-1}(x)$

วิธีทำ จากการตรวจพินิจ พบว่า

$$f(x) = x + d \text{ เมื่อ } d \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

เป็นฟังก์ชันคำตอบ เราจะแสดงว่าฟังก์ชันนี้เป็นเพียงฟังก์ชันคำตอบเดียวที่เป็นไปได้

ให้ $S_d := \{x \in \mathbb{R} ; f(x) - x = d\}$

ขั้นแรก คือการพิสูจน์ว่า ถ้า $x \in S_d$ แล้ว $x + d \in S_d$ ด้วยเช่นกัน

ให้ $x \in S_d$ ดังนั้น

$$f(x) = x + d$$

จากนิยามของฟังก์ชันผกผัน ได้

$$g(x + d) = x$$

จากสมบัติข้อ (ii) ได้

$$f(x + d) + g(x + d) = 2x + 2d$$

กล่าวคือ

$$f(x + d) = x + 2d$$

แสดงว่า

$$x + d \in S_d \text{ ตามต้องการ}$$

ขั้นที่สอง สมมุติว่า $S_d \neq \varnothing$ เราจะแสดงว่า

$$S_{d'} = \varnothing \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } d' < d$$

ให้ $x \in S_d$ พิจารณาจำนวนจริง $y > x$

เราจะแสดงว่า $y \notin S_{d'}$ โดยการพิสูจน์ประพจน์ที่ว่า

สำหรับทุกจำนวนเต็ม k ซึ่งทำให้ $x + (k - 1)(d - d') \leq y < x + k(d - d')$ แล้วจะได้ว่า $y \notin S_{d'}$

กรณี $k = 1$ จาก $x \leq y < x + (d - d')$ โดยความเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ได้

$$f(y) \geq f(x) = x + d$$

ถ้า $y \in S_{d'}$ แล้ว

$$y + d' = f(y) \geq x + d \text{ หรือ } y \geq x + (d - d')$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง จึงได้ว่า $y \notin S_{d'}$

สมมุติเพื่อการอุปนัยว่าประพจน์เป็นจริง ณ $k \geq 1$

จาก $x + k(d - d') \leq y < x + (k + 1)(d - d')$ ได้

$$x + d + (k - 1)(d - d') \leq y + d' < x + d + k(d - d')$$

แต่ $x + d \in S_d$ โดยสมมุติฐานของการอุปนัย ได้ว่า

$$y + d' \notin S_{d'}$$

ซึ่งโดยผลของขั้นแรกได้

$$y \notin S_{d'}$$

สรุปสิ่งที่พบได้ว่า ถ้า $x \in S_d$ และ $y > x$ แล้ว

$$y \notin S_{d'} \text{ สำหรับทุก } d' < d$$

จากนี้เราจะแสดงว่า $S_{d'} = \varnothing$

ถ้าสิ่งนี้ไม่จริงจากข้อสรุปที่เพิ่งพบ จะมีจำนวนจริง $z \leq x$ ที่มีสมบัติว่า

$$z \in S_{d'}$$

โดยใช้ผลของขั้นแรก ซ้ำ ๆ ได้ว่า

$$z + d', z + 2d', \ldots, z + md', \ldots \text{ ทุกจำนวน} \in S_{d'}$$

เมื่อเลือกจำนวนนับ m สูงมากพอ จะได้ว่า

$$z + md' > x$$

ซึ่งใช้ร่วมกับ $z \in S_{d'}$ ได้ข้อขัดแย้งกับสิ่งที่เพิ่งได้รับ

เพราะฉะนั้น เราพบว่า

$$\text{ถ้า } S_d \neq \varnothing \text{ แล้ว } S_{d'} = \varnothing \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } d' < d$$

กล่าวคือ ไม่มีจำนวนจริง d ที่แตกต่างกันสองจำนวน ที่มีสมบัติว่า S_d เป็นเซตว่างพร้อมกัน ซึ่งกล่าวอีกนัยหนึ่งได้ว่า ถ้ามีบางจำนวนจริง $x \in S_d$ แล้ว ทุกจำนวนจริง $x \in S_d$ ด้วย ซึ่งแสดงว่า

$$f(x) - x = d \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ตัวอย่าง 4.2.30 (Korean MO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x - y) = f(x) + xy + f(y)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x และทุก $y \in \{f(x) ; x \in \mathbb{R}\}$

วิธีทำ ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว c แล้ว

$$c = f(x - c) = f(x) + cx + f(c) = cx + 2c \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ซึ่งให้ว่า $c = 0$ กล่าวคือ

$$f(x) \equiv 0$$

สมมุติว่า f(x) ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว ดังนั้น มีจำนวนจริง a, b โดยที่

$$f(a) = b \neq 0$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(x - b) = f(x) + bx + f(b)$$

กล่าวคือ

$$f(x - b) - f(x) = bx + f(b)$$

เพราะฉะนั้น

$$\{f(x - b) - f(x) ; x \in \mathbb{R}\} = \{bx + f(b) ; x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \qquad (4.2.30.1)$$

สังเกตว่า ถ้า $b \in \mathbb{R} = \{f(x) ; x \in \mathbb{R}\}$ แล้ว

$$f(b - b) = f(b) + b^2 + f(b)$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(b) = \frac{1}{2}\{-b^2 + f(0)\} \qquad (4.2.30.2)$$

จาก (4.2.30.1) ได้ว่า สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะมีจำนวนจริง y_1, y_2 ที่มีสมบัติว่า

$$x = y_1 - y_2$$

ซึ่งจาก (4.2.30.2) ให้

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y_1 - y_2) \\ &= f(y_1) + y_1y_2 + f(y_2) \\ &= \frac{1}{2}\{-y_1^2 + f(0)\} + \frac{1}{2}\{-y_2^2 + f(0)\} + y_1y_2 \\ &= -\frac{1}{2}(y_1 - y_2)^2 + f(0) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + f(0) \end{aligned}$$

เนื่องจาก

$$f(-b) = f(0 - b) = f(0) + 0.b + f(b) = f(0) + f(b) \text{ เมื่อ } b \in \mathbb{R}$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{2}(-b)^2 + f(0) = -\frac{1}{2}b^2 + 2f(0)$$

ซึ่งให้ว่า $f(0) = 0$

สรุปได้ว่า

$$f(x) \equiv 0 \text{ หรือ } f(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

ตัวอย่าง 4.2.31 (Croatian MC 2002) จงหา $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\{f(x)\}^{f(y)} = f(x^y) \qquad (x, y > 0)$$

วิธีทำ โดยการตรวจพินิจ พบว่า ฟังก์ชัน $f(x) = 1$ และ $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันคำตอบที่ถูกต้องคู่หนึ่ง จากนี้ไป สมมุติว่า มีจำนวนจริง $a > 0$ ที่มีสมบัติว่า $f(a) \neq 1$ จากสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$\{f(a)\}^{f(xy)} = f(a^{xy}) = f((a^x)^y) = \{f(a^x)\}^{f(y)} = \{f(a)\}^{f(x)f(y)}$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(xy) = f(x)f(y) \qquad (x, y > 0) \qquad (4.2.31.1)$$

นอกจากนี้ เรายังมีว่า

$$\{f(a)\}^{f(x+y)} = f(a^{x+y}) = f(a^x a^y) = f(a^x)f(a^y) = \{f(a)\}^{f(x)}\{f(a)\}^{f(y)} = \{f(a)\}^{f(x)+f(y)}$$

เมื่อใช้ร่วมกับ $f(a) \neq 1$ ให้ว่า

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y > 0) \qquad (4.2.31.2)$$

จาก (4.2.31.1) ได้

$$f(1) = f(1 \cdot 1) = \{f(1)\}^2$$

แสดงว่า

$$f(1) = 1$$

จาก (4.2.31.2) ได้

$$f(n) = f(1 + \ldots + 1) = f(1) + \ldots + f(1) = n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

$$f(\tfrac{m}{n})\cdot n = f(\tfrac{m}{n})\, f(n) = f(\tfrac{m}{n}\cdot n) = f(m) = m$$

ซึ่งให้

$$f(\tfrac{m}{n}) = \tfrac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

ถ้ามีจำนวนจริง $x > 0$ ที่มีสมบัติว่า $f(x) < x$ แล้ว จะมีจำนวนตรรกยะบวก $\frac{m}{n}$ ที่มีสมบัติว่า

$$f(x) < \tfrac{m}{n} < x$$

ดังนั้น

$$f(x) = f\left(\frac{m}{n} + \left(x - \frac{m}{n}\right)\right) = f(\tfrac{m}{n}) + f(x - \tfrac{m}{n}) > f(\tfrac{m}{n}) = \tfrac{m}{n}$$

ซึ่งขัดแย้งกัน

ในทำนองเดียวกัน

$$f(x) > x$$

นำไปสู่ข้อขัดแย้งเช่นกัน

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = x$$

สรุปได้ว่า ฟังก์ชันคำตอบมีเพียงสองฟังก์ชัน ได้แก่

$$f(x) = 1 \text{ และ } f(x) = x$$

ตัวอย่าง 4.2.32 (IMO 1968) ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + a) = \tfrac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

เมื่อ a เป็นค่าคงตัวบวก

(i) จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ

(ii) ถ้า $a = 1$ จงหาตัวอย่างของฟังก์ชันซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันดังกล่าว

วิธีทำ (i) จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(x + a) \geq \tfrac{1}{2} \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ดังนั้น

$$f(x) \geq \tfrac{1}{2} \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ให้ $g(x) := f(x) - \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$$g(x) \geq 0 \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

และสมการเชิงฟังก์ชันเปลี่ยนรูปเป็น

$$g(x + a) = \sqrt{\frac{1}{4} - \{g(x)\}^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

เมื่อยกกำลังสอง ได้

$$\{g(x + a)\}^2 = \frac{1}{4} - \{g(x)\}^2 \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.32.1)$$

ซึ่งให้ด้วยว่า

$$\{g(x + 2a)\}^2 = \frac{1}{4} - \{g(x + a)\}^2 = \{g(x)\}^2$$

จากการที่ $g(x) \geq 0$ จึงได้ว่า

$$g(x + 2a) = g(x)$$

ซึ่งให้ว่า

$$f(x + 2a) - \frac{1}{2} = f(x) - \frac{1}{2}$$

กล่าวคือ

$$f(x + 2a) = f(x) \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ ที่มีคาบเป็น 2a

(ii) ให้ $h(x) := 4\{g(x)\}^2 - \frac{1}{2}$ ดังนั้นสมการ (4.2.32.1) กลายเป็น

$$h(x + a) = -h(x) \qquad (4.2.32.2)$$

ในทำนองกลับกัน

ถ้า $h(x) \geq \frac{1}{2}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน (4.2.32.2) แล้ว g(x) จะสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน (4.2.32.1)

ตัวอย่างของกรณี a = 1 เช่น $h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2}) - \frac{1}{2}$ ซึ่งให้ว่า

$$g(x) = \frac{1}{2}\left|\sin(\frac{\pi x}{2})\right|,$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\left|\sin(\frac{\pi x}{2})\right| + \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 4.2.33 (APMO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) มี $s \in \mathbb{R}$ เพียงจำนวนจำกัดที่ทำให้ f(s) = 0 และ

(ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y)) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

วิธีทำ แทนค่า (x, y) = (1, 0) ในสมการเชิงฟังก์ชัน (ii) ได้

$$f(f(0)) = 0$$

แทนค่า x = 0 ใน (ii) ได้

$$f(y) = f(f(y)) \qquad (4.2.33.1)$$

ดังนั้น

$$f(0) = f(f(0)) = 0$$

และเมื่อแทน (4.2.33.1) ใน (ii) สมการเชิงฟังก์ชันกลายเป็น

$$f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

แทนค่า $y = 0$ ในสมการท้ายนี้ ได้

$$f(x^4) = x^3 f(x) \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (4.2.33.2)$$

ดังนั้น

$$f(x^4 + y) = f(x^4) + f(y) \qquad (4.2.33.3)$$

เราจะแสดงว่า f มีสมบัติเชิงการบวก กล่าวคือ

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \quad \text{สำหรับทุก } a, b \in \mathbb{R}$$

สมมุติว่า $a \geq 0, b \in \mathbb{R}$ จาก (4.2.33.3) ได้

$$f(a + b) = f((a^{\frac{1}{4}})^4 + b) = f((a^{\frac{1}{4}})^4) + f(b) = f(a) + f(b)$$

ลำดับต่อไปสังเกตว่า f เป็นฟังก์ชันคี่ ทั้งนี้เพราะ จาก (4.2.33.2)

$$f(-x) = \frac{f(x^4)}{(-x)^3} = \frac{x^3 f(x)}{(-x)^3} = -f(x) \quad (x \neq 0)$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันคี่ สำหรับ $a < 0, b \in \mathbb{R}$ เราได้ว่า

$$f(a + b) = -f((-a) + (-b)) = -(f(-a) + f(-b)) = -\{-f(a) - f(b)\} = f(a) + f(b)$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า f มีสมบัติเชิงการบวก

ต่อไปจะแสดงว่า $\{s \in \mathbb{R} ; f(s) = 0\} = \{0\}$

เราพบแล้วว่า

$$f(0) = 0$$

สมมุติว่ามีจำนวนจริงไม่เป็นศูนย์ h ที่ทำให้

$$f(h) = 0$$

ดังนั้น เมื่อใช้สมบัติเชิงการบวก และการอุปนัย ได้ว่า

$$f(nh) = 0$$

กล่าวคือ $nh \in \{s \in \mathbb{R} ; f(s) = 0\}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n
สิ่งนี้เป็นข้อขัดแย้งกับเงื่อนไข (i)

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

สมมุติว่า $f(a) = f(b)$ สำหรับบาง $a, b \in \mathbb{R}$
ดังนั้น

$$f(b) = f(a) = f(a - b + b) = f(a - b) + f(b)$$

กล่าวคือ

$$f(a - b) = 0$$

ซึ่งชี้ว่า

$$a - b \in \{s \in \mathbb{R} ; f(s) = 0\} = \{0\}$$

แสดงว่า

$$a = b$$

จาก (4.2.33.1) และความเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง สรุปได้ว่า

$$f(x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

แบบฝึกหัด

1. (Belarus MO 1994) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$x f(x) = [x] f(\{x\}) + \{x\} f([x])$$

เมื่อ $[x]$ แทนภาคจำนวนเต็มของ x และ $\{x\} = x - [x]$

2. (USAMO 2002) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

3. (South African MO 1996) จงหาฟังก์ชันจริงทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + 3f(1 - x) = 2x^2 + x - 5/2$$

4. (AMOC 1991) จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(x) = xf(1/x) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

(ii) $f(x) + f(y) = 1 + f(x + y) \qquad (x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \neq y)$

5. (South African MO) จงพิสูจน์ว่า ไม่มี $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(1 + f(x)) = 1 - x \qquad (x \in \mathbb{R})$

(ii) $f(f(x)) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$

6. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xf(x) + f(y)) = \{f(x)\}^2 + y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

7. (Bulgarain MC 1997) จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) = f(x^2 + \tfrac{1}{4}) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

8. จงหาทุกฟังก์ชันจริงที่ต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

9. (Romanian MC 1992) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2 - y^2) + f(2xy) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

10. (Romanian MC 2003) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติต่อไปนี้

(a) $f(x) = x^2$ สำหรับทุก $x \in [0, 1)$

(b) $f(x + 1) = f(x) + x$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$

11. (Romanian MC 2003) ให้ a เป็นจำนวนจริง และให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x)f(y) + f(x) + f(y) = f(xy) + a \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

(i) ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง แล้วจงหาค่า a, f(-1), f(0) และ f(1)

(ii) จงหาฟังก์ชัน f ดังกล่าวทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง หนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

12. (Romanian MC 1998) จงหา $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติต่อไปนี้ มีฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $f(x + y) = f(x)u(y) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$

13. (AMOC 1997) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ

$$|f(x + h) - f(x)| \leq h^2 \qquad (x, h \in \mathbb{R})$$

14. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

(ii) $f(xy) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

15. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{f(x)-f(y)} \qquad (x, y \in \mathbb{R}; x \neq y)$$

16. จงหา $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\frac{f(x)-g(y)}{x-y} = h\left(\frac{x+y}{2}\right) \qquad (x, y \in \mathbb{R}; x \neq y)$$

17. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right) = \frac{\{f(x)\}^2+\{f(y)\}^2}{2f(x)f(y)} \qquad (x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

18. จงหา $f : \mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}_0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 + y^2) = \{f(x)\}^2 + \{f(y)\}^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R}_0)$$

19. (Iranian MO 1996-1997) จงหา $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ที่เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(f(x) + f(y)) = f(f(x + f(y)) + f(y + f(x))) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

20. จงหา $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่มีสมบัติว่า มีฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) = f(x)h(y) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

21. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) = f(y) + f(y) + f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

22. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\{1 + f(x)f(y)\}f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

23. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + yf(x)) = f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

24. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่งถึง และเพิ่มโดยแท้ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

25. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการการทำซ้ำของฟังก์ชัน (ซึ่งเรียกกันว่า สมบัติของ ***Darboux***)

$$f^n(x) = -x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

26. ให้ $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(2x - \frac{f(x)}{r}\right) = rx \quad (x \in \mathbb{R})$$

27. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

28. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ไม่ใช่ฟังก์ชันศูนย์ และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x)f(y) = f(x - y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

29. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = 2\{f(x) + f(y)\} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

30. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) - f(x - y) = 2f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

31. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

32. จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f^2(x) = f(x + y)f(x - y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

33. จงหา $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ฟังก์ชันหนึ่ง ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บน $\mathbb{R}^+$

(ii) $f(x) > -\frac{1}{x} \qquad (x > 0)$

(iii) $f(x)\,f(f(x) + 1/x) = 1 \quad (x > 0)$

34. (German MC) จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + 3) + f(-\frac{9}{x}) = \frac{(1-m)(x^2+3x-9)}{9m(x+3)} + \frac{2}{m}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $m \neq 0$ และทุกจำนวนจริง $x \neq 0, 3$

35. (Korean MO 2000) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\{f(x) + f(y)\} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

36. (AMOC 1993) ให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(xy) = xf(y) + yf(x)$

(ii) $f(x + y) = f(x^{1993}) + f(y^{1993})$

จงหาค่าของ $f(\sqrt{5753})$

37. (AMOC 1992) จงหา $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$498x - f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{2x}{3x-2}\right) \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{2}{3}\})$$

38. (AMOC 1985) จงหา $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

(i) $f(xy) = f(x)f(3/y) + f(y)f(3/y) \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+)$

(ii) $f(1) = \frac{1}{2}$

39. (Czech-Slovak MO 2002) จงหา $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(xf(y)) = f(xy) + x \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

40. (Belarus MO) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

41. (Bulgarian MC 1997) จงหาฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) = f(x^2 + \tfrac{1}{4}) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

42. ให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ที่ต่อเนื่อง และมีจุดตรึง x_0 และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(2x - f(x)) = x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x$

43. (South African MO 2000) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

44. (Slovenian MO 1998) จงหา $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + xf(1 - x) = x^2 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

4.3 สมการเชิงฟังก์ชันที่มีคำตอบเป็นพหุนาม

สมการเชิงฟังก์ชันที่มีคำตอบเป็นพหุนามจริง เป็นกรณีพิเศษของ สมการเชิงฟังก์ชันที่มีโดเมน และ เรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริง และตัวฟังก์ชันคำตอบมีสมบัติเพิ่มเติมที่สะดวกหลายประการ เป็นต้นว่า พหุนามเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง พหุนามมีรูปแบบเป็นผลบวกจำกัดของพจน์ที่ประกอบด้วยค่าคงตัวคูณด้วยกำลังที่เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบของตัวแปร พหุนามมีรากเพียงจำนวนจำกัด ซึ่งทำให้พหุนามสามารถแยกตัวประกอบเป็นได้หนึ่งเดียวเมื่อทราบรากของพหุนาม สิ่งเหล่านี้ทำให้การแก้สมการเชิงฟังก์ชันที่มีคำตอบเป็นพหุนาม ในหลักการแล้ว ทำได้เสมอ อย่างน้อยโดยการแทนพหุนามแล้วเทียบกำลังของตัวแปร และสัมประสิทธิ์

ตัวอย่าง 4.3.1 (AMOC 2000) จงหาพหุนามจริง f ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$(x - 27)f(3x) = 27(x - 1)f(x) \qquad (4.3.1.1)$$

วิธีทำ แทนค่า x = 27 ได้ f(27) = 0 แทนค่า x = 1 ได้

$$f(3) = 0$$

ดังนั้น

$$f(x) = (x - 27)(x - 3)q(x)$$

เมื่อ q(x) เป็นพหุนามเช่นกัน
แทนสิ่งนี้กลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$(x - 27)(3x - 3)(3x - 27)q(3x) = 27(x - 1)(x - 3)(x - 27)q(x)$$

เมื่อ $x \neq 1, 27$ หารตลอดด้วยตัวประกอบที่สอดคล้องกัน ได้

$$(x - 9)q(3x) = 3(x - 3)q(x) \qquad (4.3.1.2)$$

แทนค่า x = 3 ได้

$$q(9) = 0$$

ซึ่งให้ว่า

$$q(x) = (x - 9)g(x)$$

โดยที่ g(x) เป็นพหุนาม
แทนกลับใน (4.3.1.2) ได้

$$(x - 9)(3x - 9)g(3x) = 3(x - 3)(x - 9)g(x)$$

กล่าวคือ

$$g(3x) = g(x) \quad \text{เมื่อ } x \neq 1, 3, 9, 27$$

แทนค่า x = 2 แล้วใช้ความสัมพันธ์ที่ได้รับ ซ้ำ ๆ พบว่า

$$g(2) = g(6) = g(18) = \ldots = g(2\times 3^k) \quad \text{สำหรับทุก } k \in \mathbb{N}_0$$

ซึ่งชี้ว่า สมการ g(x) = g(2) ต้องมีรากเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งเป็นไปไม่ได้สำหรับพหุนาม
เพราะฉะนั้น g(x) ต้องเป็นพหุนามค่าคงตัว ให้เป็น a
ดังนั้น

$$q(x) = a(x - 9),\ f(x) = a(x - 3)(x - 9)(x - 27)$$

ซึ่งตรวจสอบได้โดยการแทนกลับได้ว่าเป็นพหุนามคำตอบที่แท้จริง

ตัวอย่าง 4.3.2 (Iranian MO 2001-2002) จงหาพหุนามจริง p(x) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$p(2p(x)) = 2p(p(x)) + 2\{p(x)\}^2$$

วิธีทำ ให้ $p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$
สังเกตว่า พจน์นำของ $p(2p(x)),\ 2p(p(x)),\ 2\{p(x)\}^2$ คือ

$$2^n (a_n)^{n+1} x^{n^2}\ ,\ 2(a_n)^{n+1} x^{n^2}\ ,\ 2a_n^2 x^{2n}$$ ตามลำดับ

ถ้า $n \geq 3$ แล้ว

$$n^2 > 2n$$

ดังนั้น

$$2^n(a_n)^{n+1} = 2(a_n)^{n+1}$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะ $a_n \neq 0$
ดังนั้น

$$0 \leq n \leq 2$$

จึงแยกการพิจารณาออกเป็นสามกรณี

- **n = 0:** เรามีว่า $p(x) = a \in \mathbb{R}$ เป็นพหุนามค่าคงตัว เมื่อแทนกลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$a = 0 \text{ หรือ } -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $p(x) \equiv 0$ หรือ $-\frac{1}{2}$

- **n = 1:** เรามีว่า $p(x) = ax + b$ เมื่อแทนกลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า $n = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
- **n = 2:** เรามีว่า $p(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อแทนกลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$a = 1, c = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$p(x) = x^2 + bx$$

เมื่อตรวจคำตอบแล้ว สรุปได้ว่า พหุนามคำตอบคือ

$$p(x) \equiv -\frac{1}{2} \quad \text{หรือ} \quad p(x) \equiv 0 \quad \text{หรือ} \quad p(x) = x^2 + bx \quad (b \in \mathbb{R})$$

ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x^2) = P(x)P(x - 1)$$

วิธีทำ ถ้า a เป็นรากของ $P(x)$ แล้ว ได้ว่า

$$P(a^2) = P(a)P(a - 1) = 0$$

โดยข้อโต้แย้งนี้ซ้ำ ๆ ได้ว่า

$$0 = P(a) = P(a^2) = P(a^4) = \ldots$$

เนื่องจาก $P(x)$ ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว และ $P(x)$ มีรากได้เพียงจำนวนจำกัด ดังนั้น จะต้องมีสองจำนวนในลำดับ

$$a, a^2, a^4, \ldots$$

ที่เป็นค่าเดียวกัน ซึ่งให้ว่า a ต้องเป็นรากของ 1 กล่าวคือ

$$|a| = 1$$

จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ด้วยว่า

$$0 = P((a + 1)^2) = P((a + 1)^4) = P((a + 1)^8) = \ldots$$

โดยข้อโต้แย้งเช่นข้างต้น ได้ว่า

$$|a + 1| = 1 \text{ (แสดงว่า } a \neq 1)$$

เมื่อใช้ร่วมกับข้อมูลที่ได้รับมาก่อน พบว่า

$$(a + 1)(\bar{a} + 1) = (a + 1)(\frac{1}{a} + 1) = 1$$

ซึ่งให้ว่า

$$a^2 + a + 1 = 0$$

กล่าวคือ

$$a = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

เนื่องจาก $P(x)$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง จึงได้ว่าไม่เพียงแต่ $x - a$ เท่านั้น แต่ $x - \bar{a}$ ต่างก็เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ดังนั้น

$$(x - a)(x - \bar{a}) = x^2 + x + 1$$

เป็นตัวประกอบด้วยเช่นกัน
แสดงว่าทุกตัวประกอบจริง ต้องอยู่ในรูปแบบนี้เท่านั้น ซึ่งทำให้

$$P(1) \neq 0$$

และดังนั้น

$$P(0) = 1$$

เพราะฉะนั้น พหุนามคำตอบที่เป็นไปได้มีรูปแบบเป็น

$$P(x) = (x^2 + x + 1)^n \quad (n \in \mathbb{N}) \text{ เท่านั้น}$$

เมื่อตรวจคำตอบ พบว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.3.4 (German MC) ให้ $A \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, 2 \leq n \leq 19$ จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(P(P(x))) = Ax^n + 19x + 99$$

วิธีทำ ให้ $m = \deg P(x)$

ดังนั้น

$$\deg P(P(x)) = m^2, \deg P(P(P(x))) = m^3$$

โดยการเทียบดีกรีของพหุนามได้ว่า ถ้า $A \neq 0$ และ $n \neq 8$ แล้ว สมการนี้ไม่มีคำตอบเป็นพหุนาม
ดังนั้น

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

โดยที่ $a \neq 0, m = 2, A \neq 0$
หรือ

$$P(x) = bx + c$$

โดยที่ $a = 0, m = 1, A = 0$

สังเกตว่าในกรณีแรก

$$P(P(x)) = a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + \dots$$
$$P(P(P(x))) = a(a^3x^4 + 2a^2bx^3 + \dots)^2 + b(a^3x^4 + 2a^2bx^3 + \dots) + c = a^7x^8 + 4a^6bx^7 + \dots$$

เมื่อ $m = 2$, $a \neq 0$, $A \neq 0$ แล้ว $4a^6b = 0$ ได้ $b = 0$

ซึ่งให้

$$P(x) = ax^2 + c$$

แสดงว่า $P(P(P(x)))$ มีเพียงกำลังของ x ที่เป็นคู่
ขัดแย้งกับสมการเชิงฟังก์ชัน แสดงว่าสมการไม่มีคำตอบเป็นพหุนามในกรณีนี้

ในกรณีหลัง $m = 1$, $a = 0$, $A = 0$, $P(x) = bx + c$
ดังนั้น

$$P(P(P(x))) = b^3x + b^2c + bc + c = 19x + 99$$

แสดงว่า $b^3 = 19$ กล่าวคือ

$$b = (19)^{\frac{1}{3}} \text{ และ } \frac{c(b^3 - 1)}{b - 1} = 99$$

กล่าวคือ

$$c = \frac{11(19^{\frac{1}{3}} - 1)}{2}$$

ในกรณีนี้มีคำตอบ

$$P(x) = (19)^{\frac{1}{3}}x + \frac{11(19^{\frac{1}{3}} - 1)}{2}$$

ซึ่งตรวจคำตอบแล้วพบว่าถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.3.5 (Czech-Slovak MO 2001) จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\{P(x)\}^2 + P(-x) = P(x^2) + P(x)$$

วิธีทำ ถ้า $P(x) = a$ เป็นพหุนามค่าคงตัว ที่เป็นคำตอบ แล้ว จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$a^2 + a = a + a$$

แสดงว่า

$$a = 0 \text{ หรือ } 1$$

จากการแทนค่า พบว่าพหุนามค่าคงตัว

$$P(x) = 0 \text{ และ } P(x) = 1$$

ทั้งคู่เป็นพหุนามคำตอบที่แท้จริง

จากนี้ไปพิจารณากรณีพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว ให้ $n = \deg P > 0$

ดังนั้น

$$P(x) = ax^n + Q(x)$$

โดยที่ $a \neq 0$ และ Q เป็นพหุนามที่มี $\deg Q \leq n - 1$

จากสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$(ax^n + Q(x))^2 + a(-x)^n + Q(-x) = ax^{2n} + Q(x^2) + ax^n + Q(x) \qquad (4.3.5.1)$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์กำลังสูงสุด x^{2n} ได้

$$a^2 = a$$

ซึ่งให้ว่า

$$a = 1 \text{ (เพราะ } a \neq 0)$$

แทนค่า $a = 1$ กลับไปใน (4.3.5.1) ได้

$$2x^nQ(x) + \{Q(x)\}^2 - Q(x^2) = \{1 - (-1)^n\}x^n + Q(x) - Q(-x) \qquad (4.3.5.2)$$

ถ้า $\deg Q = k < n$ แล้ว นิพจน์ทางซ้ายมือของ (4.3.5.2) เป็นพหุนามที่มีดีกรี $n + k$ ในขณะที่นิพจน์ทางขวามือของ (4.3.5.2) เป็นพหุนามที่มีดีกรีอย่างมาก n ซึ่งเป็นไปได้ เพียงเมื่อ $k = 0$

กล่าวคือ Q เป็นพหุนามค่าคงตัว ให้เป็น $Q(x) = b$ เมื่อแทนกลับไปใน (4.3.5.2) ได้

$$2bx^n + b^2 - b = \{1 - (-1)^n\}x^n$$

ความสัมพันธ์นี้ต้องเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งเป็นไปได้ ก็ต่อเมื่อ

$$2b = 1 - (-1)^n \text{ และ } b^2 - b = 0$$

ในกรณีที่ n เป็นคู่ ได้ $b = 0$ ซึ่งให้

$$P(x) = x^n$$

ในกรณีที่ n เป็นคี่ ได้ $b = 1$ ซึ่งให้

$$P(x) = x^n + 1$$

เมื่อตรวจคำตอบแล้ว สรุปได้ว่า พหุนามคำตอบที่เป็นไปได้คือ

(1) พหุนามค่าคงตัว 0, 1

(2) พหุนามพจน์เดียวกำลังคู่ $x^2, x^4, x^6, \ldots$ และ

(3) พหุนามสองพจน์กำลังคี่ $x + 1, x^3 + 1, x^5 + 1, \ldots$

ตัวอย่าง 4.3.6 (Czech-Slovak MO 2002) จงหาพหุนามจริง P(x) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$(x + 1)P(x - 1) + (x - 1)P(x + 1) = 2xP(x)$$

วิธีทำ เขียนพหุนามเรียงกำลังจากมากไปน้อยเป็น

$$P(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + dx^{n-3} + \ldots, \quad a \neq 0$$

ดังนั้น

$$P(x - 1) = a(x - 1)^n + b(x - 1)^{n-1} + c(x - 1)^{n-2} + d(x - 1)^{n-3} + \ldots$$

$$= a\{x^n - \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} - \binom{n}{3}x^{n-3} + \dots\} + b\{x^{n-1} - \binom{n-1}{1}x^{n-2} + \binom{n-1}{2}x^{n-2} - \dots\}$$

$$+ c\{x^{n-2} - \binom{n-2}{1}x^{n-3} + \dots\} + d\{x^{n-3} + \dots\} + \dots$$

$$= ax^n + \{-\binom{n}{1}a+b\}x^{n-1} + \{\binom{n}{2}a - \binom{n-1}{1}b + c\}x^{n-2} + \{-\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b - \binom{n-2}{1}c+d\}x^{n-3} + \dots$$

ในทำนองเดียวกัน

$$P(x+1) = ax^n + \{\binom{n}{1}a + b\}x^{n-1} + \{\binom{n}{2}a + \binom{n-1}{1}b + c\}x^{n-2} + \{\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b + \binom{n-2}{1}c + d\}x^{n-3} + \dots$$

พิจารณานิพจน์ทางซ้ายมือของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$(x+1)P(x-1) + (x-1)P(x+1)$$

$$= xP(x-1) + P(x-1) + xP(x+1) - P(x+1)$$

$$= ax^{n+1} + \{-\binom{n}{1}a + b\}x^n + \{\binom{n}{2}a - \binom{n-1}{1}b + c\}x^{n-1} + \{-\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b - \binom{n-2}{1}c + d\}x^{n-2} + \dots$$

$$+ ax^n + \{-\binom{n}{1}a + b\}x^{n-1} + \{\binom{n}{2}a - \binom{n-1}{1}b + c\}x^{n-2} + \dots$$

$$+ ax^{n+1} + \{\binom{n}{1}a + b\}x^n + \{\binom{n}{2}a + \binom{n-1}{1}b + c\}x^{n-1} + \{-\binom{n}{3}a + \binom{n-1}{2}b - \binom{n-2}{1}c + d\}x^{n-2} + \dots$$

$$- ax^n - \{-\binom{n}{1}a + b\}x^{n-1} - \{\binom{n}{2}a + \binom{n-1}{1}b + c\}x^{n-2} - \dots$$

$$= 2ax^{n+1} + 2bx^n + \{2\binom{n}{2}a - 2 \quad a + 2c\}x^{n-1} + \{2 \quad b - 2 \quad b + 2d\}x^{n-2} + \dots$$

และนิพจน์ทางขวามือของสมการเชิงฟังก์ชันคือ

$$2xP(x) = 2ax^{n+1} + 2bx^n + 2cx^{n-1} + 2dx^{n-2} + \dots$$

เมื่อเปรียบเทียบนิพจน์จากสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่าสองพจน์แรกที่มีกำลังสูงสุดเหมือนกัน ส่วนพจน์ที่สาม และสี่ ให้ว่า

$$2\binom{n}{2}a - 2\binom{n}{1}a + 2c = 2c$$

และ

$$2\binom{n-1}{2}b - 2\binom{n-1}{1}b + 2d = 2d$$

กล่าวคือ

$$n(n-3)a = 0 \quad \text{และ} \quad (n-1)(n-4)b = 0 \quad \text{เมื่อ } n > 3$$

สมการแรกให้ว่า $a = 0$
ดังนั้น เราสามารถจำกัดการพิจารณา ลงได้เป็น $n = 3$
สมการแรกเป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง a ในขณะที่สมการหลังชี้ว่า $b = 0$
ดังนั้น พหุนามที่ต้องการอยู่ในรูป
$P(x) = ax^3 + cx + d$
เมื่อแทนกลับในสมการ

$$P(-1) - P(1) = 0.P(0)$$

(ซึ่งมาจากการแทนค่า $x = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชัน) ได้

$$(-a - c + d) - (a + c + d) = 0$$

กล่าวคือ

$$c = -a$$

ดังนั้น พหุนามคำตอบอยู่ในรูป

$$P(x) = ax^3 - ax + d \quad (a, d \in \mathbb{R})$$

ซึ่งตรวจคำตอบได้ว่าถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.3.7 จงหาพหุนามจริง P(x) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$xP(x-1) = (x-26)P(x)$$

วิธีทำ ให้ $n = \deg P(x)$ จากสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า $x \mid P(x) := P_n(x)$
แสดงว่า

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x)$$

เมื่อ $P_{n-1}(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n - 1$
ดังนั้น

$$P(x-1) := P_n(x-1) = (x-1)P_{n-1}(x-1)$$

ทำให้ได้ว่า

$$x(x-1)P_{n-1}(x-1) = xP(x-1) = (x-26)P(x)$$

ดังนั้น

$$(x-1) \mid P(x) \text{ ด้วยเช่นกัน}$$

ซึ่งให้ว่า

$$P_n(x) = x(x-1)P_{n-2}(x)$$

ดังนั้น

$$P(x-1) = (x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1)$$

ซึ่งให้ว่า

$$x(x-1)(x-2)P_{n-2}(x-1) = (x-26)P_n(x) = (x-26)x(x-1)P_{n-2}(x)$$

ความสัมพันธ์ท้ายนี้ชี้ว่า

$$(x-2) \mid P_n(x) \text{ ด้วยเช่นกัน}$$

ได้ว่า

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)P_{n-3}(x)$$

เมื่อแทนกลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า

$$(x-3) \mid P(x) \text{ อีกเช่นกัน}$$

กล่าวคือ

$$P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)P_{n-4}(x)$$

เมื่อดำเนินการในทำนองเดียวกันนี้ต่อไป พบว่า

$$P(x) := P_n(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-25)P_{n-26}(x)$$

เมื่อแทนกลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน ให้ว่า

$$x(x-1)(x-2)\ldots(x-26)P_{n-26}(x-1) = (x-26)x(x-1)\ldots(x-25)P_{n-26}(x)$$

แสดงว่า $P_{n-26}(x) = Q(x)$เป็นพหุนามดีกรี n - 26 ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$Q(x-1) = Q(x) \qquad (4.62)$$

ถ้า $Q(x) = Q_0(x) = c$ เป็นพหุนามค่าคงตัว กล่าวคือ ถ้า Q(x) เป็นพหุนามดีกรี 0 แล้ว ความสัมพันธ์ (4.62) เป็นจริง เราจะแสดงว่าสิ่งนี้เป็นเพียงทางเดียวที่เป็นไปได้

ถ้า $Q(x) := Q_k(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k$, $k \geq 1$, $a_0 \neq 0$ แล้ว (4.62) ให้ว่า

$$a_0(x-1)^k + a_1(x-1)^{k-1} + \ldots = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ x^{k-1} ได้

$$-ka_0 + a_1 = a_1$$

ซึ่งให้

$$a_0 = 0$$

ขัดแย้งกับเงื่อนไขที่กำหนด

ดังนั้น k = 0 ทำให้ได้

$$Q(x) = c$$

เพราะฉะนั้น

$$P(x) = cx(x-1)(x-2)\ldots(x-25)$$

เป็นพหุนามดีกรี 26

ตัวอย่าง 4.3.8 ให้ f, g เป็นพหุนามที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x + g(y)) = 3x + y + 4 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

จงหาค่าของ $g(8 + f(3))$

วิธีทำ แทนค่า $y = 0$ ได้

$$f(x + g(0)) = 3x + 4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

เปลี่ยนตัวแปร x ด้วย $x - g(0)$ ได้

$$f(x) = 3(x - g(0)) + 4 = 3x - 3g(0) + 4$$

เมื่อแทนกลับในสมการเชิงฟังก์ชันแรกเริ่ม ได้

$$3(x + g(y)) - 3g(0) + 4 = 3x + y + 4$$

ซึ่งให้ว่า

$$g(y) = \frac{y}{3} + g(0)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} g(8 + f(3)) &= g(8 + 3\cdot 3 - 3g(0) + 4) \\ &= g(21 - 3g(0)) \\ &= \frac{21-3g(0)}{3} + g(0) \\ &= 7 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.3.9 (Moldova MO 1996) ให้ f(x), g(x) เป็นพหุนามกำลังสองที่แตกต่างกันคู่หนึ่ง ที่มีสัมประสิทธิ์นำเป็น 1 และสอดคล้องกับสมการ

$$f(-12) + f(2000) + f(4000) = g(-12) + g(2000) + g(4000)$$

จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้สมการเชิงฟังก์ชัน $f(x) = g(x)$ เป็นจริง

วิธีทำ ให้ $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ จากสมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดให้ ได้ว่า

$$1996a + b = 1996c + d \qquad (4.3.9.1)$$

เนื่องจากพหุนาม f(x), g(x) แตกต่างกัน ดังนั้น

$$a \neq c \text{ หรือ } b \neq d$$

แต่จาก (4.3.9.1) ได้ว่า

$$a \neq c \text{ และ } b \neq d \text{ ทั้งคู่ต้องเป็นจริงพร้อมกัน}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อพิจารณาร่วมกับ (4.3.9.1) พบว่า f

$$(x) = g(x) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = 1996 \text{ เท่านั้น}$$

ตัวอย่าง 4.3.10 (AMOC 1985) จงหาพหุนามจริง f(x) ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x)f(x+1) = f(x^2+x+1) \qquad (4.3.10.1)$$

วิธีทำ ถ้า f(x) เป็นพหุนามค่าคงตัว แล้วโดยการแทนค่าพบว่า f(x) ต้องเป็น

$$0 \text{ หรือ } 1$$

จากนี้ไปสมมุติว่า f(x) ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว

ให้ x_0 เป็นรากจริงของ f(x) ดังนั้นจากสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า

$$x_1 = x_0^2 + x_0 + 1$$

เป็นรากจริงอีกรากหนึ่งของ f(x) เช่นกัน
โดยการอุปนัย ได้ว่า

$$\text{ถ้า } x_n \text{ เป็นราก แล้ว } x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1 \text{ เป็นรากด้วยเช่นกัน}$$

เนื่องจาก $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + 1 > 0$
ดังนั้น ลำดับ $x_0, x_1, \ldots$ เป็นลำดับของรากจริงที่มีค่าเพิ่มโดยแท้ ซึ่งเป็นไปไม่ได้
ดังนั้น

$$f(x) = 0 \text{ ไม่มีราก}$$

แสดงว่า deg f(x) ต้องเป็นคู่

เมื่อเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์นำในสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า สัมประสิทธิ์นำต้องเป็น 1 เมื่อลองแทน

$$f(x) = x^2 + c \qquad (4.3.10.2)$$

ลงใน (4.3.10.1) ได้

$$(x^2+c)\{(x+1)^2+c\} = (x^2+x+1)^2 + c$$

กล่าวคือ

$$x^4 + 2x^3 + (2c+1)x^2 + 2cx + c(c+1) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 + c$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ พบว่า

$$c = 1$$

ซึ่งให้

$$f(x) = x^2 + 1$$

เมื่อลองแทน

$$f(x) = x^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f \qquad (4.3.10.3)$$

ลงใน (4.3.10.1) แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ พบว่า

$$c = 0,\ d = 2,\ e = 0,\ f = 1$$

ซึ่งให้

$$f(x) = (x^2+1)^2$$

90หรือลองแทน $f(x) = (x^2 + 1)^n$ ลงใน (4.3.10.1) ได้ว่า ค่าทางซ้ายมือคือ

$$(x^2 + 1)^n\{(x + 1)^2 + 1\}^n = (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2)^n$$

และค่าทางขวามือคือ

$$\{(x^2 + x + 1)^2 + 1\}^n = (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2)^n$$

ซึ่งเท่ากับค่าทางซ้ายมือ

เราจะแสดงว่า เหล่านี้คือคำตอบพหุนามที่เป็นไปได้เท่านั้น

พิจารณา พหุนาม

$$g(x) = f(x) - (x^2 + 1)^n$$

เมื่อ deg f = 2n

ถ้า g(x) เป็นพหุนามศูนย์ แล้วไม่มีอะไรต้องพิสูจน์อีก

สมมุติว่า g(x) ไม่ใช่พหุนามศูนย์ ให้ deg g(x) = s < 2n จาก (4.3.10.1) ได้

$$[\, g(x) + (x^2+1)^n \,][\, g(x+1) + \{(x+1)^2+1\}^n \,] = g(x^2 + x + 1) + ((x^2 + x + 1)^2 +1)^n$$

$$(x^2 + 1)^n g(x + 1) + \{(x + 1)^2 + 1\}g(x) = g(x^2 + x + 1) - g(x)g(x + 1) \qquad (4.3.10.4)$$

เมื่อเปรียบเทียบดีกรีใน (4.3.10.4) พบว่า ดีกรีทางซ้ายมือ = 2n + s ในขณะที่ ดีกรีทางขวามือ = 2s ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น

$$g(x) \equiv 0 \text{ และ } f(x) = (x^2 + 1)^n$$

เมื่อตรวจคำตอบ ได้ว่า พหุนามคำตอบ ได้แก่

$$0,\ 1,\ (x^2 + 1)^n$$

โดยที่ n เป็นจำนวนนับ

ตัวอย่าง 4.3.11 (Canadian MO 1975) จงหาพหุนามจริง P(x) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(P(x)) = \{P(x)\}^k \text{ เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

วิธีทำ เราทราบว่า พหุนามใด ๆ P(x) จะต้องเป็นพหุนามค่าคงตัว หรือไม่ก็มีค่าแตกต่างกันได้เป็นอนันต์ค่า

ถ้า P(x) เป็นพหุนามค่าคงตัว c แล้ว จากสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$c = c^k \text{ ซึ่งให้ว่า } c = 0 \text{ หรือ } 1$$

ถ้า P(x) ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว แล้ว จะมีจำนวนจริง y ที่แตกต่างกันเป็นจำนวนอนันต์ ซึ่งโดยสมการเชิงฟังก์ชันสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$P(y) = y^k$$

ดังนั้น $P(x) - x^k$ เป็นพหุนามจริงที่มีรากเป็นจำนวนอนันต์

ดังนั้น ต้องเป็นพหุนามศูนย์ ซึ่งให้ว่า

$$P(x) \equiv x^k$$

เมื่อตรวจคำตอบ แล้ว สรุปได้ว่า P(x) ต้องเป็นพหุนามค่าคงตัว 0 หรือ 1 หรือ $P(x) = x^k$

สมการเชิงฟังก์ชันที่มีวิธีคิดคล้ายกับสมการเชิงฟังก์ชันที่มีคำตอบเป็นพหุนาม คือสมการเชิงฟังก์ชันที่ทราบว่ามีคำตอบเป็นฟังก์ชันตรรกยะ ทั้งนี้เพราะ ฟังก์ชันตรรกยะ คือเศษส่วนของพหุนาม สิ่งที่ต้องระวังเพิ่มเติม คือ โดเมนของฟังก์ชันคำตอบจะต้องไม่รวมจุดที่ทำให้พหุนามที่เป็นตัวส่วนมีค่าเป็น 0

ตัวอย่าง 4.3.12 (Japanese MO 1995) จงหาฟังก์ชันตรรกยะ f(x) และจำนวนจริง a ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$\{f(x)\}^2 - a = f(x^2)$$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ โดยที่เราสามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า h(x) และ g(x) เป็นพหุนามที่มีสมบัติว่า ห.ร.ม. (h(x), g(x)) = 1 และ g(x) เป็นพหุนามโมนิก (กล่าวคือ มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีดีกรีสูงสุดเป็น 1)

จากสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$\frac{\{h(x)\}^2 - a\{g(x)\}^2}{\{g(x)\}^2} = \frac{h(x^2)}{g(x^2)}$$

โดยที่เศษส่วนทั้งสองข้างเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

ดังนั้น

$$g(x^2) = \{g(x)\}^2$$

ให้ $g(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_r x^r + c_k x^k$ โดยที่ $c_k \neq 0$ และ $c_i = 0$ เมื่อ $k < i < r$ หรือ $i < k$

จาก $g(x^2) = \{g(x)\}^2$ ได้

$$c_k^2 = c_k \text{ และ } c_k c_r = 0$$

ดังนั้น

$$c_k = 1,\ c_r = 0$$

ซึ่งชี้ว่า

$$g(x) \text{ เป็นโมโนเมียล (เอกนาม)} = x^n$$

เมื่อแทนกลับไปในสมการเชิงฟังก์ชัน พบว่า

$$\{h(x)\}^2 - ax^{2n} = h(x^2)$$

- **ถ้า a = 0** แล้ว โดยข้อโต้แย้งเช่นในกรณีของ g(x) ได้ว่า

$$h(x) = x^m$$

แต่เนื่องจาก ห.ร.ม. (h(x), g(x)) = 1

ดังนั้น ในกรณีนี้

$$f(x) = x^j \text{ หรือ } h(x) = \frac{1}{x^j} \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

- **ถ้า $a \neq 0$** แล้ว สมมุติ $h(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0$

แทนพหุนามใน $\{h(x)\}^2 - ax^{2n} = h(x^2)$ แล้วเทียบดีกรี และสัมประสิทธิ์ พบว่า

$$(a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0)^2 - ax^{2n} = (a_kx^{2k} + a_{k-1}x^{2(k-1)}+...+a_1x^2+a_0)^2$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ $a_{k-1},a_{k-2},...,a_1 = 0$ และ $a_0 = 1$ (เพราะ $(h(x),g(x)) = 1$ และได้ $a = 2$

นั่นคือ

$$h(x) = x^{2n} + 1 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

สรุปว่า คำตอบคือ

$$(f(x), a) = (x^j, 0), (1/x^j, 0) \text{ หรือ } (x^j + 1/x^j, 2) \quad (j \in \mathbb{N}_0)$$

ตัวอย่าง 4.3.13 (IMO 1976) นิยามลำดับของพหุนาม $(P_n(x))_{n \geq 1}$ ดังนี้

$$P_1(x) = x^2 - 2 \quad \text{และ} \quad P_n(x) = P_1(P_{n-1}(x)) \quad (k = 2, 3, ...)$$

จงแสดงว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ รากของสมการ $P_n(x) = x$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน

วิธีทำ ให้ $x = 2 (\cos t)$

ดังนั้น

$$P_1(x) = 2\cos(2t), \quad P_2(x) = P_1(P(x)) = 2\cos(2^2t)$$

และโดยการอุปนัยได้ว่า

$$P_n(x) = P_n(2\cos t) = 2\cos(2^nt)$$

สมการ $P_n(x) = x$ สมมูลกับสมการ

$$2\cos(2^nt) = 2\cos(t)$$

ซึ่งสมมูลกับสมการ

$$\sin\{\frac{(2^n+1)t}{2}\}\sin\{\frac{(2^n-1)t}{2}\} = 0$$

สมการท้ายนี้มีคำตอบเป็น

$$t = \frac{2k\pi}{2^n+1} \quad \text{และ} \quad t = \frac{2j\pi}{2^n-1} \quad \text{เมื่อ } k, j \in \mathbb{Z}$$

เนื่องจากฟังก์ชันโคไซน์ เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ จึงเป็นการเพียงพอที่จะหาคำตอบที่อยู่ในช่วง $[0, \pi]$ คำตอบเหล่านี้เป็นคำตอบที่มีสมบัติว่า

$$0 \leq k \leq 2^{n-1} \text{ และ } 0 < j \leq 2^{n-1} - 1$$

ดังนั้น เราได้ค่าของ t เป็น

$$t = 0,\ \frac{2\pi}{2^n+1},\ \frac{4\pi}{2^n+1},\ldots,\ \frac{2^n\pi}{2^n+1},\ \frac{2\pi}{2^n-1},\ldots,\ \frac{(2^n-2)\pi}{2^n-1} \qquad (4.3.13.1)$$

รากเหล่านี้แตกต่างกัน เพราะถ้า

$$\frac{2k}{2^n+1} = \frac{2j}{2^n-1}$$

แล้ว

$$\frac{k}{j} = \frac{2^n+1}{2^n-1}$$

กล่าวคือ

$$\frac{k+j}{j} = \frac{2^{n+1}}{2^n-1}$$

ซึ่งชี้ว่า

$$(2^n - 1)(k + j) = 2^{n+1}j$$

แต่เนื่องจาก $2^n - 1$ และ 2^{n+1} เฉพาะสัมพัทธ์ต่อกัน จึงได้ว่า

$$2^{n+1} \mid (k + j)$$

เป็นข้อขัดแย้ง เพราะ $k \le 2^{n-1}$, $j \le 2^{n-1} - 1$ ซึ่งให้ว่า

$$k + j < 2^{n+1}$$

สรุปได้ว่า คำตอบของสมการ $P_n(x) = x$ คือ

$$x = 2\cdot\cos t$$

เมื่อ t มีค่าเป็นจำนวนที่แตกต่างกัน 2^n จำนวน ดังแสดงในลำดับ (4.3.13.1)

ตัวอย่าง 4.3.14 (APMO 1991) เราเรียกจุดในระนาบพิกัดฉาก ว่าเป็นจุด**ผสม** ถ้าพิกัดหนึ่งเป็นจำนวนตรรกยะ และอีกพิกัดหนึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะ จงหาพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงทั้งหมด ที่มีสมบัติว่า กราฟของพหุนามนี้ไม่ผ่านจุดผสมเลย

วิธีทำ สังเกตว่า พหุนามที่มีสมบัติตามเงื่อนไขของโจทย์ จะต้องส่งจำนวนตรรกยะไปยังจำนวนตรรกยะ และส่งจำนวนอตรรกยะไปยังจำนวนอตรรกยะ

ให้ P(x) เป็นพหุนามดีกรี n ที่มีสมบัติดังกล่าว ให้ $r_0, r_1,\ldots, r_n$ เป็นจำนวนตรรกยะที่แตกต่างกัน
พิจารณาพหุนาม

$$G(x) = c_0(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_n) + c_1(x - r_0)(x - r_2)\ldots(x - r_n) +\ldots$$

$$+ c_i(x - r_0)\ldots(x - r_{i-1})(x - r_{i+1})\ldots(x - r_n) +\ldots+ c_n(x - r_0)(x - r_1)\ldots(x - r_{n-1}) \qquad (4.3.14.1)$$

เมื่อ $c_0, c_1,\ldots, c_n$ เป็นจำนวนจริง

สมมุติว่า

$$G(r_i) = P(r_i) \quad (i = 0, 1,\ldots, n)$$

เนื่องจาก

$$G(r_i) = c_i(r_i - r_0)\ldots(r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1})\ldots(r_i - r_n)$$

ดังนั้น

$$c_i = \frac{G(r_i)}{(r_i - r_0)\ldots(r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1})} = \frac{P(r_i)}{(r_i - r_0)\ldots(r_i - r_{i-1})(r_i - r_{i+1})} \qquad (4.3.14.2)$$

ซึ่งแสดงว่า ทุก c_i $(i = 0, 1,\ldots,n)$ เป็นจำนวนตรรกยะ
ทำให้ได้ว่าทุกสัมประสิทธิ์ของ $G(x)$ เป็นจำนวนตรรกยะ

สังเกตว่าพหุนาม $G(x)$ ดังที่นิยามใน (4.3.14.1) พร้อมด้วยสัมประสิทธิ์ $c_0, c_1,\ldots, c_n$ ที่สอดคล้องกับ (4.3.14.2) มีค่าเหมือน $P(x)$ ณ $n + 1$ จุด และพหุนามทั้งสองมีดีกรีเป็น n

ดังนั้น

$$P(x) = G(x) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ซึ่งให้ด้วยว่าสัมประสิทธิ์ของ $P(x)$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ลำดับต่อไปสังเกตว่า ทุกพหุนามดีกรีหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะ สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ ในขณะที่พหุนามดีกรี 0 ไม่สอดคล้อง เราจะพิสูจน์ว่ามีเพียงพหุนามกำลังหนึ่งที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะเท่านั้นที่เป็นคำตอบของโจทย์

ให้ $P(x) = a_0 + a_1x +\ldots+ a_nx^n$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะ และมีดีกรี $n \geq 2$ และสอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ เราสามารถสมมุติได้ว่า สัมประสิทธิ์ของ $P(x)$ เป็นจำนวนเต็ม ทั้งนี้เพราะ เซตคำตอบของสมการ $P(x) = r$ และของสมการ $aP(x) = ar$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็ม เป็นเซตเดียวกัน

ให้ $G(x) = a_n^{n-1}P(\frac{x}{a_n})$ ดังนั้น $G(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมีสัมประสิทธิ์นำเป็น 1
นอกจากนี้

สมการ $P(x) = r$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $G(x) = a_n^{n-1}r$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ

ดังนั้น เราสามารถสมมุติได้โดยไม่เสียนัยทั่วไปว่า $P(x)$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และมีสัมประสิทธิ์นำเป็น 1
ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่มีค่าสูงมากพอ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$p > \max\{P(1) - P(0), x_1, x_2,\ldots, x_k\}$$

เมื่อ $x_1, x_2,\ldots, x_k$ เป็นรากทั้งหมดของ $P(x) - P(0) - x = 0$

ให้ $q = p + P(0) \in \mathbb{Z}$ และพิจารณานิพจน์

$$P(x) - q = P(x) - P(0) - p$$

ดังนั้น

$$P(1) - q = P(1) - P(0) - p < 0$$

ในขณะที่

$$P(p) - q = P(p) - P(0) - p > 0$$

(โดยนิยามของ p และการที่ P(x) มีสัมประสิทธิ์นำเป็น 1 ซึ่งแสดงว่า P(x) มีค่าเป็นบวก เมื่อ x มีค่าสูงมากพอ)

เนื่องจาก P(x) - q เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น มันจึงต้องมีรากจริง r รากหนึ่งที่อยู่ระหว่าง 1 และ p
โดยทฤษฎีบทว่าด้วยรากตรรกยะ ถ้าพหุนาม

$$P(x) - q = P(x) - P(0) - p = -p + a_1x + \ldots + x^n$$

มีรากที่เป็นจำนวนตรรกยะบวก แล้วรากเหล่านี้จะต้องเป็น

1 หรือ p เท่านั้น

เพราะฉะนั้น r ต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 4.3.15 (USAMO 1975) ถ้า P(x) เป็นพหุนามดีกรี n ที่มีสมบัติว่า

$$P(k) = \frac{k}{k+1} \quad \text{เมื่อ } k = 0,1,2,\ldots,n$$

จงหา P(n + 1)

วิธีทำ ให้ $Q(x) = (x + 1)P(x) - x$
เนื่องจาก Q(x) เป็นพหุนามดีกรี n + 1 และเป็นศูนย์ เมื่อ x = 0, 1, 2,..., n
จึงได้ว่า

$$Q(x) = (x + 1)P(x) - x = Ax(x - 1)(x - 2)\ldots(x - n)$$

เมื่อ A เป็นค่าคงตัว ที่หาได้โดยการแทนค่า เช่น x = -1
กล่าวคือ

$$1 = A(-1)^{n+1}(n + 1)!$$

ดังนั้น

$$P(x) = \frac{1}{x+1}\left(x + \frac{(-1)^{n+1}x(x-1)\ldots(x-n)}{(n+1)!}\right)$$

เพราะฉะนั้น

$$P(n + 1) = 1 \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคี่} \quad \text{หรือ} \quad \frac{n}{n+2} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นคู่}$$

ตัวอย่าง 4.3.16 (USAMO 1997) จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ จะมีพหุนาม Q ที่มีสัมประสิทธิ์มาจากเซต {0, 1,..., 9} เพียงหนึ่งเดียว ที่มีสมบัติว่า Q(-2) = Q(-5) = n

วิธีทำ ก่อนอื่นสมมุติว่า มีพหุนาม Q เช่นว่านี้ เราจะแสดงว่ามีเพียงหนึ่งเดียว

ให้ $P(x) = (x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$

โดยการตั้งหาร และสมบัติที่โจทย์กำหนดมา ได้ว่า

$$Q(x) = P(x)R(x) + n$$

เมื่อ $R(x) = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots$ เป็นพหุนาม

ดังนั้นโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ $r_0, r_1, r_2, \ldots$ เป็นจำนวนเต็มที่มีสมบัติว่า

$$10r_0 + n \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad 10r_k + 7r_{k-1} + r_{k-2} \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \quad r_{-1} := 0 \qquad (4.3.16.1)$$

สำหรับแต่ละ k เงื่อนไข (4.3.16.1) กำหนดค่า r_k อย่างหนึ่งเดียว เมื่อทราบค่า r_j ทั้งหมดที่ $j < k$

ดังนั้น R จึงมีเพียงหนึ่งเดียว ซึ่งชี้ว่า Q มีเพียงหนึ่งเดียวเช่นกัน

การมีอยู่จริงของ Q จะตามมาหากแสดงได้ว่า จากลำดับ $\{r_k\}$ ที่กำหนดได้หนึ่งเดียว

โดยเงื่อนไข (4.3.16.1) จะมีบางจำนวนเต็ม N ที่มีสมบัติว่า

$$r_k = 0 \text{ สำหรับทุก } k \geq N$$

สังเกตว่า $\{r_k\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต ทั้งนี้เพราะ ถ้า $r_i \leq M$ สำหรับ $i = k - 1, k - 2$ แล้ว

$$r_k \geq -\frac{7r_{k-1}}{10} - \frac{r_{k-2}}{10} \geq -\frac{4M}{5}$$

ในขณะที่ ถ้า $r_i \geq L$ สำหรับ $i = k - 1, k - 2$ แล้ว

$$r_k \leq -\frac{7r_{k-1}}{10} - \frac{r_{k-2}}{10} + \leq -\frac{4L}{10} + \frac{9}{10}$$

เนื่องจากลำดับ $\{r_k\}$ มีขอบเขต ให้

$$L_k := \min\{r_k, r_{k+1}, \ldots\} \quad \text{และ} \quad M_k := \max\{r_k, r_{k+1}, \ldots\}$$

เห็นได้ชัดเจนว่า

$$L_k \leq L_{k+1}, M_k \geq M_{k+1} \quad \text{และ } L_k \leq M_k \text{ สำหรับทุก } k$$

ดังนั้นลำดับค่าไม่ลด $\{L_k\}$ จะต้องหยุดเพิ่มในที่สุด และในทำนองเดียวกัน ลำดับค่าไม่เพิ่ม $\{M_k\}$ จะต้องหยุดลดในที่สุด กล่าวคือ จะต้องมี L, M, N ที่ทำให้

$$L_k = L, M_k = M \text{ สำหรับทุก } k \geq N$$

เห็นได้ชัดเจนว่า

$$L \leq M \text{ และ } M \geq 0 \qquad (4.3.16.2)$$

(เพราะไม่มีสามพจน์ถัดกันใน $\{r_k\}$ ที่เป็นลบ) ทว่าข้อโต้แย้งเช่นข้างต้น แสดงด้วยว่า

$$L \geq -\frac{4M}{5} \text{ และ } M \leq -\frac{4L}{5} + \frac{9}{10} \qquad (4.3.16.3)$$

แต่บริเวณในระนาบสองมิติ (L,M) ที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรงจาก (4.3.16.2), (4.3.16.3) ไม่มีจุดใดเลยที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มทั้งคู่ นอกจากจุด (0, 0)

เพราะฉะนั้น $r_k = 0$ สำหรับทุก $k \geq N$ ตามต้องการ

แบบฝึกหัด

1. พหุนามกำลังสอง $p(x) = ax^2 + bx + c$ มีสมบัติว่า สมการ $p(x) = x$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า สมการ $p(p(x)) = x$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริงเช่นเดียวกัน

2. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$xP(x-1) = (x-15)P(x)$$

3. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ที่ไม่ใช่พหุนามค่าคงตัว ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x)P(x+1) = P(x^2 + x + 1)$$

4. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x)P(x+1) = P(x^2)$$

5. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนตรรกยะที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x) = P\left(\frac{1}{2}(-x + \sqrt{3 - 3x^2}\,)\right) \qquad (|x| \leq 1)$$

6. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่มีเพียงรากที่เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x)P(-x) = P(x^2 - 1)$$

7. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1$$

8. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x)P(2x^2) = P(2x^3 + x)$$

9. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P((x+1)^2) = P(x^2) + 2x + 1$$

10. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x^2 - y^2) = P(x+y)P(x-y)$$

11. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$xP(x-n) = (x-1)P(x) \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{R})$$

12. จงหาพหุนามจริง $P(x)$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$(x-16)P(2x) = 16(x-1)P(x)$$

13. ให้ f(x) เป็นฟังก์ชันตรรกยะ ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 + x \qquad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x \neq 0, 1$$

จงหาค่าของ $f(10) + \frac{1}{180}$

14. ให้ $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ เมื่อ $x \neq 0$ นิยาม

$$f^0(x) = x,\ f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \text{ สำหรับทุกจำนวนนับ } n \text{ และ } x \neq 0$$

จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)} = 1 + \frac{1}{f\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{2^n}\right)} \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ x \neq -1, 0, 1)$$

15. (Putnam 1971) จงหาพหุนามจริง P(x) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x^2 + 1) = \{P(x)\}^2 + 1 \quad \text{และ} \quad P(0) = 0$$

16. (Bulgarian MC 2000) จงหาพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง P(x) ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(x).P(x + 1) = P(x^2) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

บทที่ 5
เบ็ดเตล็ด

ในบทนี้ เราจะพิจารณาตัวอย่างต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมการหรืออสมการเชิงฟังก์ชัน ซึ่งมีความแตกต่างจากที่นำมาเสนอในบทก่อนหน้านี้ เป็นต้นว่า โดเมนหรือเรนจ์ต่างจากที่เคยพิจารณามาก่อน หรือไม่ก็เป็นโจทย์ที่ต้องการคำตอบเป็นค่าของฟังก์ชัน ที่มิใช่การหาฟังก์ชันคำตอบโดยตรง หรือสอบถามถึงสมบัติ หรือข้อมูลอื่น

ตัวอย่าง 5.1 ให้ $g: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$; $a \in \mathbb{C}$, $w^3 = 1$, $w \neq 1$ จงพิสูจน์ว่า มีเพียงฟังก์ชัน $f : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ เดียวที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(z) + f(wz + a) = g(z) \quad (z \in \mathbb{C})$$

วิธีทำ เปลี่ยนตัวแปร z ด้วย wz + a ในสมการเชิงฟังก์ชัน ได้

$$f(wz + a) + f(w^2z + wa + a) = g(wz + a) \qquad (5.1.1)$$

เปลี่ยนตัวแปร z ด้วย wz + a อีกครั้งหนึ่งกับสมการเชิงฟังก์ชัน (1) ได้

$$f(w^2z + wa + a) + f(z) = g(w^2z + wa + a) \qquad (5.1.2)$$

เมื่อแก้ระบบที่ประกอบด้วย (5.1.1), (5.1.2) และสมการเชิงฟังก์ชันแรกเริ่ม ได้

$$f(z) = \frac{1}{2}\{g(z) + g(w^2z + wa + a) - g(wz + a)\}$$

ตัวอย่าง 5.2 (South African MO) ให้ $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ สอดคล้องกับคู่ของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(2 + x) = f(2 - x) \quad \text{และ} \quad f(7 + x) = f(7 - x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ถ้า x = 0 เป็นรากของ f(x) = 0 ถามว่าจำนวนรากที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของ f(x) = 0 ในช่วง $-2000 \leq x \leq 2000$ คือเท่าใด

วิธีทำ พิจารณา

$$f(2 + x) = f(2 - x) = f(7 + (-5 - x)) = f(7 - (-5 - x)) = f(12 + x)$$

ดังนั้น

$$f(2 + x) = f(12 + x) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ซึ่งชี้ว่า

$$f(t) = f(t + 10) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } t$$

นอกจากนี้ เรามีด้วยว่า

$$0 = f(0) = f(2 - 2) = f(2 + 2) = f(4)$$

ดังนั้น

$$f(10k + 4) = f(4) = 0 = f(0) = f(10k) \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } k$$

ในช่วง $-2000 \leq x \leq 2000$ มีจำนวนเต็มที่อยู่ในรูป $10k + 4$ หรือ $10k$ อยู่ทั้งสิ้น 801 จำนวน

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x)$ ที่มีสมบัติว่า $f(x) = 0$ เมื่อ $x = 10k$ หรือ $10k + 4$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม และ $f(x) = 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ที่เหลือ เราสามารถตรวจสอบได้โดยการแทนค่าว่า ฟังก์ชันนี้สอดคล้องกับคู่ของสมการเชิงฟังก์ชันที่กำหนดให้ในโจทย์

สรุปได้ว่า จำนวนรากของ $f(x) = 0$ ในช่วง $-2000 \leq x \leq 2000$ ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้คือ 801

ตัวอย่าง 5.3 (Romanian MC 2001) จงพิสูจน์ว่าไม่มี $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ที่มีสมบัติว่า

$$f(x + y) \geq f(x) + y f(f(x)) \quad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

วิธีทำ สมมุติว่าฟังก์ชันดังกล่าวมีอยู่จริง สังเกตก่อนว่าจากอสมการเชิงฟังก์ชัน ได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ ทั้งนี้เพราะ

$$f(x + y) - f(x) \geq yf(f(x)) > 0$$

แทนค่า $x = 1$ ได้

$$f(1 + y) \geq f(1) + yf(f(1))$$

ดังนั้น

$$\lim_{y \to \infty} f(y) = \infty$$

เนื่องจาก $f(x + 1) - f(x) \geq f(f(x))$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to \infty} \{f(x + 1) - f(x)\} = \infty$$

แสดงว่า มีจำนวนจริง r ที่ทำให้

$$f(r + i) - f(r + i - 1) > 2 \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } i \geq 1$$

ดังนั้น

$$f(r + n) - f(r) > 2n$$

ซึ่งให้

$$f(r + n) > r + n + 1 \quad \text{เมื่อ } n \geq r + 1$$

เมื่อใช้ความเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ และข้อมูลที่ได้รับ พบว่า

$$\begin{aligned} f(f(r + n)) &\geq f(r + n + 1) + \{f(r + n) - (r + n + 1)\}f(f(r + n + 1)) \\ &> f(r + n + 1) \\ &\geq f(r + n) + f(f(r + n)) \\ &> f(f(r + n)) \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 5.4 (Ukranian MO 1998) ให้ $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ สมมุติว่ามีจำนวนจริง $r \in (0, 1)$ ที่มีสมบัติว่า $f(r) \neq 0$ และ $f(r) \neq r$ สมมุติเพิ่มเติมว่า f สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y, f(x) + y \in [0, 1])$$

(i) จงหาตัวอย่างของฟังก์ชันดังกล่าว

(ii) จงพิสูจน์ว่า

$$f^{19}(x) = f^{98}(x) \quad (x \in [0,1])$$

เมื่อ $f^n(x) = f(f(\ldots f(x)\ldots))$ เป็นการทำฟังก์ชันประกอบจำนวน n ครั้ง

วิธีทำ (i) ให้ $b \in (0, 1)$, $b < r$ นิยามฟังก์ชัน f โดย

$$f(x) = 0 \text{ เมื่อ } 0 \leq x \leq b, \quad f(x) = 1 \text{ เมื่อ } b < x \leq 1$$

สามารถตรวจสอบได้ทันทีว่า ฟังก์ชันนี้สอดคล้องตามเงื่อนไขของโจทย์

(ii) ให้ $f(0) = p$ ถ้า $p = 0$ แล้วแทนค่า $y = 0$ ในสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(f(x)) = f(x)$$

ซึ่งให้ว่าสิ่งที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริงอย่างชัดเจนในกรณีนี้

ถ้า $p \in (0, 1]$ แล้ว

$$f(p) = f(f(0) + 0) = f(0) + f(0) = 2p$$

โดยการอุปนัย ได้ว่า

$$f^n(p) = (n + 1)p$$

ซึ่งแสดงว่า ณ บางจุด n ค่าทางขวามือจะต้องมากกว่า 1

ขัดแย้งกับเรนจ์ของ f แสดงว่ากรณีนี้ไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 5.5 (Irish MO 1996) ให้ $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ มีสมบัติต่อไปนี้

(i) $f(1) = 1$

(ii) $f(x) \geq 0 \qquad (x \in [0,1])$

(iii) ถ้า $x, y, x + y \in [0, 1]$ แล้ว $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$

จงพิสูจน์ว่า $f(x) \leq 2x \quad (x \in [0, 1])$

วิธีทำ ถ้า $y > x$ และ $x,y \in [0, 1]$ แล้ว

$$f(y) = f(x + (y - x)) \geq f(x) + f(y - x) \geq f(x)$$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ต่อไปจะแสดงว่า

$$f(\frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

กรณี $k = 1$ จากสมการเชิงฟังก์ชันได้

$$f(1) \geq f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$$

ดังนั้น

$$f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$$

สมมุติเพื่อการอุปนัยว่า $f(\frac{1}{2^{k-1}}) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

เนื่องจาก $f(\frac{1}{2^{k-1}}) \geq f(\frac{1}{2^k}) + f(\frac{1}{2^k})$ จึงได้

$$f(\frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2} f(\frac{1}{2^{k-1}}) \leq \frac{1}{2^k}$$

ต่อไปพิจารณาจำนวนจริง x ในช่วง $0 < x \leq 1$
ดังนั้น จะมีจำนวนนับ k ที่มีสมบัติว่า

$$\frac{1}{2^k} < x \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น

$$f(x) \leq f(\frac{1}{2^{k-1}}) \leq \frac{1}{2^{k-1}} < 2x$$

เราเหลือเพียงตรวจที่จุด $x = 0$ สังเกตว่า

$$1 = f(1 + 0) \geq f(1) + f(0) = 1 + f(0)$$

และจาก (ii) $f(0) \geq 0$ จึงได้ว่า $f(0) = 0$
สรุปได้ว่า

$$f(x) \leq 2x \text{ สำหรับทุก } x \in [0, 1]$$

ตัวอย่าง 5.6 (IMO 1998) จงหาค่าต่ำสุดของ f(1998) เมื่อ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(n^2 f(m)) = m\{f(n)\}^2 \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

วิธีทำ ให้ S เป็นเซตของบรรดาฟังก์ชันที่มีสมบัติดังในโจทย์
ให้ f เป็นฟังก์ชันดังกล่าวฟังก์ชันหนึ่ง และให้ f(1) = a
เมื่อแทนค่า n = 1, m = 1 ได้

$$f(f(m)) = a^2 m, \quad f(an^2) = \{f(n)\}^2 \qquad (m, n \in \mathbb{N})$$

ใช้ข้อมูลเหล่านี้ ร่วมกับสมการเชิงฟังก์ชันแรกเริ่ม ได้

$$\{f(m)f(n)\}^2 = \{f(m)\}^2 f(an^2) = f(m^2 f(f(an^2))) = f(m^2 a^2 an^2) = f(a(amn)^2) = \{f(amn)\}^2$$

ดังนั้น

$$f(amn) = f(m)f(n) \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง

$$f(am) = af(m)$$

ซึ่งชี้ว่า

$$af(mn) = f(m)f(n) \qquad (m, n \in \mathbb{N}) \qquad (5.6.1)$$

ลำดับต่อไป จะพิสูจน์ว่า $a \mid f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$
ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ p^s, p^t เป็นกำลังสูงสุดของ p ที่หาร a, f(n) ลงตัวตามลำดับ
โดยการอุปนัย ร่วมกับ (5.6.1) ได้ว่า

$$\{f(n)\}^k = a^{k-1} f(n^k) \quad (k \in \mathbb{N})$$

จากการที่กำลังสูงสุดของ p ที่หาร $\{f(n)\}^k$ ได้ลงตัว คือ p^{kt} และ กำลังสูงสุดของ p ที่หาร a^{k-1} ได้ลงตัวคือ $p^{(k-1)s}$ จึงได้ว่า

$$kt \geq (k-1)s \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } k$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ถ้า $t \geq s$ ข้อสรุปนี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเฉพาะ p
ดังนั้น $a \mid f(n)$

ให้ $g(n) = \frac{f(n)}{a}$ ดังนั้น $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ และสิ่งที่พบข้างต้น แปลความได้เป็น

$$g(a) = a, \quad g(mn) = g(m)g(n), \quad g(g(m)) = m \quad (m, n \in \mathbb{N}) \qquad (5.6.2)$$

ตามความเป็นจริงแล้ว

$$g(mn) = g(m)g(n) \text{ สมมูลกับ } (5.6.1)$$

ในขณะที่ g(g(m)) = m เป็นผลที่ตามมาจาก

$$ag(g(m)) = g(a)g(g(m)) = g(ag(m)) = g(f(m)) = \frac{f(f(m))}{a} = \frac{a^2m}{a} = am$$

จาก (5.6.2)ได้

$$g(n^2g(m)) = g(n^2)g(g(m)) = m\{g(n)\}^2 \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

แสดงว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งที่อยู่ใน S เช่นกัน และค่าของ g ไม่มากกว่าค่าของ f ณ จุดเดียวกัน
ดังนั้น เราสามารถจำกัดการพิจารณา ไปเป็นการพิจารณาฟังก์ชัน g
กล่าวคือ ที่สอดคล้องกับ (5.6.2) ความจริงสำคัญที่ต้องการใช้ คือ ฟังก์ชันดังกล่าว ส่งจำนวนเฉพาะ ไปยังจำนวนเฉพาะ ซึ่งแสดงได้ดังนี้

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และให้ g(p) = uv โดยที่ u, v เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น โดย (5.6.2) ได้

$$p = g(g(p)) = g(uv) = g(u)g(v)$$

ดังนั้น

g(u) หรือ g(v) ต้องเป็น 1

เพื่อความสะดวก ให้ g(u) = 1 ดังนั้น

$$u = g(g(u)) = g(1) = 1$$

ซึ่งชี้ว่า g(p) เป็นจำนวนเฉพาะ

ในการหาค่าต่ำสุดที่ต้องการ ให้ g เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ (5.6.2)
สังเกตว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (ทั้งนี้เพราะ $g(m) = g(n) \Longrightarrow m = g(g(m)) = g(g(n)) = n$)

ดังนั้น g ส่งจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน ไปยังจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันคู่หนึ่ง แสดงว่าขอบเขตล่างขอบเขตหนึ่งของ $g(1998) = g(2\cdot3^3\cdot37) = g(2)\{g(3)\}^2g(37)$ หาได้เมื่อ g(2), g(3), g(37) เป็นจำนวนเฉพาะค่าน้อยสุดสามค่าแรก คือ 2, 3, 5 โดยที่ g(3) = 2 ซึ่งให้

$$g(1998) \geq 3\cdot2^3\cdot5 = 120 \quad \text{สำหรับแต่ละ } g \in S$$

อย่างไรก็ตาม มีฟังก์ชัน $g \in S$ ที่ให้ค่า g(1998) = 120 จริง (ซึ่งแสดงว่า ค่าต่ำสุดที่โจทย์ต้องการ คือ 120) ดังการสร้างต่อไปนี้ ให้ g(1) = 1 และนิยาม g บนจำนวนเฉพาะ ดังนี้

$$g(2) = 3,\ g(3) = 2,\ g(5) = 37,\ g(37) = 5 \quad \text{และ } g(p) = p \text{ สำหรับจำนวนเฉพาะ } p \text{ ที่เหลือทั้งหมด}$$

จากนี้ ขยายนิยามไปยังจำนวนนับ $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\ldots p_k^{ak}$ โดยให้

$$g(n) = g(p_1)^{a_1}\, g(p_2)^{a_2} \ldots g(p_k)^{a_k}$$

จากการสร้างนี้ เงื่อนไขใน (5.6.2) เป็นจริง พร้อมด้วย a = 1 แสดงว่า $g \in S$ และเห็นชัดเจนว่า

$$g(1998) = 120$$

ตัวอย่าง 5.7 ให้ $F: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ เมื่อ $n \in \mathbb{N}_0$

(i) $F(4n) = F(2n) + F(n)$

(ii) $F(4n + 2) = F(4n) + 1$

(iii) $F(2n + 1) = F(2n) + 1$

จงพิสูจน์ว่า สำหรับแต่ละ $m \in \mathbb{N}$ ปริมาณของจำนวนเต็ม n ในช่วง $0 \leq n < 2^m$ ที่ทำให้ $F(4n) = F(3n)$ คือ $F(2^{m+1})$

วิธีทำ จาก (i) ได้ $F(0) = 0$ และจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ พบว่า ค่าของ F กำหนดได้หนึ่งเดียว โดยมีค่าเริ่มแรกดังแสดงในตารางต่อไปนี้

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
F(n)	0	1	1	2	2	3	3	4	3	4	4	5	5	6	6	7	5	6

จำนวนฟิโบนักชี f_n ซึ่งนิยามโดย $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 3)$ ปรากฏในลำดับข้างต้น ณ จุด $n = 2^r$ เป็น

$$F(2^r) = f_{r+1} \quad (r \geq 0)$$

ซึ่งพิสูจน์ได้จาก (i) โดยการอุปนัย

ในกรณีทั่วไปถ้าเขียน n ในรูปฐาน 2: $n = e_k 2^k + e_{k-1}2^{k-1} + \ldots + e_1 2 + e_0$ โดยที่ $e_i \in \{0,1\}$ แล้ว

$$F(n) = e_k f_{k+1} + e_{k-1} f_k + \ldots + e_1 f_2 + e_0 f_1 \qquad (5.7.1)$$

ซึ่งตรวจสอบได้ไม่ยากว่าสอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

สังเกตว่า

"ถ้าในรูปฐาน 2 ของ n ไม่มี 1 ปรากฏติดกัน (ซึ่งจะขอเรียกสั้น ๆ ว่า 1 แยกกัน) แล้ว $F(3n) = F(4n)$"

ทั้งนี้เพราะ เมื่อคูณ n ดังกล่าวด้วย 3 (= 11 ในรูปฐาน 2) แต่ละชุดของ 01 (และ 1 ที่เป็นหลักนำ) จะถูกแทนด้วย 11 โดยไม่มีการทดขึ้น สิ่งที่สอดคล้องกันคือ การที่จะได้ $F(3n)$ แต่ละ f_{i+1} ใน (5.7.1) ถูกแทนด้วย $f_{i+1} + f_{i+2} = f_{i+3}$ ซึ่งนำไปสู่ค่า $F(4n)$ ความสัมพันธ์ดังกล่าวนี้เป็นจริง ณ $n = 0$ ด้วย และเพื่อความสะดวก เราพิจารณา 0 ว่าเป็นกรณี 1 แยกกันด้วย

ในทำนองกลับกัน เราจะแสดงว่า

"เมื่อ $n \geq 0$ แล้ว $F(3n) \leq F(4n)$ และถ้าเป็นสมการ แล้ว 1 ที่ปรากฏใน n แยกจากกัน"

เราจะพิสูจน์สิ่งนี้โดยการอุปนัยบน $m \geq 1$ ว่าประพจน์นี้เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม n ในช่วง $0 \leq n < 2^m$ สำหรับ m ค่าแรก ๆ สิ่งนี้เป็นจริงจากตารางข้างต้น

สมมุติว่า ประพจน์นี้เป็นจริงสำหรับบาง m

ให้ $2^m \leq n < 2^{m+1}$ และ $n = 2^m + p$, $0 \leq p < 2^m$ จาก (5.7.1) ได้

$$F(4n) = F(2^{m+2} + 4p) = f_{m+3} + F(4p)$$

จึงมีสามกรณีที่ต้องพิจารณาต่อไป

- ถ้า $0 \le p < \frac{2^m}{3}$ แล้ว $3p < 2^m$ ดังนั้นรูปฐาน 2 ของ 3p จะไม่ทดขึ้นไปยัง 3.2^m ดังนั้น จาก (5.7.1) และสมมุติฐานของการอุปนัย ได้

$$F(3n) = F(3.2^m) + F(3p) = f_{m+3} + F(3p) \le f_{m+3} + F(4p) = F(4n)$$

โดยเป็นสมการเพียงเมื่อ $F(3p) = F(4p)$
กล่าวคือ เมื่อ p มี 1 แยกกัน (โดยสมมุติฐานของการอุปนัยอีกเช่นกัน)

- ถ้า $\frac{2^m}{3} < p < \frac{2^{m+1}}{3}$ แล้วรูปฐาน 2 ของ 3p ทดขึ้น 1 ไปยัง 3.2^m และได้

$$F(3n) = f_{m+3} + \{F(3p) - f_{m+1}\} = f_{m+2} + F(3p) < f_{m+3} + F(4p) = F(4n)$$

- ถ้า $\frac{2^{m+1}}{3} < p < 2^m$ แล้วรูปฐาน 2 ของ 3p ทดขึ้น 10 ไปยัง 3.2^m และได้

$$F(3n) = f_{m+3} + f_{m+1} + \{F(3p) - f_{m+2}\} = 2f_{m+1} + F(3p) < f_{m+3} + F(4p) = F(4n)$$

ดังนั้น

$$F(3n) \le F(4n) \quad \text{ในทุกกรณี}$$

โดยที่เป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $0 \le p < \frac{2^m}{3}$ และ p มี 1 แยกกัน
เพราะฉะนั้น ในรูปฐาน 2 ของ n หลักที่สองต้องเป็น 0 ซึ่งแสดงว่า n มี 1 แยกกัน เป็นอันจบสิ้นการพิสูจน์โดยการอุปนัย

ขั้นตอนสุดท้าย เหลือแสดงว่า ในช่วง $[0, 2^m)$, $m \ge 1$, มีจำนวนเต็มอยู่ $f_{m+2} = F(2^{m+1})$ จำนวนที่มี 1 แยกกันเมื่อเขียนในรูปฐาน 2 เพื่อการแสดงสิ่งนี้ ให้ u_m แทนจำนวนดังกล่าว ในบรรดาจำนวนเหล่านี้ จะมีอยู่ u_{m-1} จำนวนที่มีค่าน้อยกว่า 2^{m-1} ส่วนจำนวนที่เหลือมี 1 อยู่ในตำแหน่งนำ แล้วตามด้วย จำนวนในรูปฐาน 2 ลักษณะเดียวกัน ที่มีค่าน้อยกว่า 2^{m-2} ซึ่งมีปริมาณอยู่ u_{m-2}
เพราะฉะนั้น

$$u_m = u_{m-1} + u_{m-2} \quad (m \ge 3)$$

นอกจากนี้ยังมีด้วยว่า

$$u_1 = 2,\ u_2 = 3 = f_4$$

ซึ่งให้ผลตามที่ต้องการ

ตัวอย่าง 5.8 ให้ $T := \{(p, q, r) : p, q, r \in \mathbb{N}_0\}$ จงหา $f : T \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(p, q, r) = \begin{cases} 0 & , \text{ถ้า } pqr = 0 \\ 1 + \frac{f(p+1,q-1,r)+f(p-1,q+1,r)+f(p-1,q,r+1)+f(p+1,q,r-1)+f(p,q+1,r-1)+f(p,q-1,r+1)}{6} & , \text{ถ้า } pqr \ne 0 \end{cases}$$

วิธีทำ ขั้นแรกจะแสดงว่า มีฟังก์ชันดังกล่าวได้อย่างมากฟังก์ชันเดียว สมมุติว่ามีสองฟังก์ชันคือ f_1 และ f_2 ให้ $h = f_1 - f_2$ ดังนั้น $h : T \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$h(p, q, r) = \begin{cases} 0 & , \text{ถ้า } pqr = 0 \\ \dfrac{h(p+1,q-1,r)+h(p-1,q+1,r)+h(p-1,q,r+1)+h(p+1,q,r-1)+h(p,q+1,r-1)+h(p,q-1,r+1)}{6} & , \text{ถ้า } pqr \neq 0 \end{cases}$$

สังเกตว่า เงื่อนไขที่สอง กล่าวว่า $h(p, q, r)$ มีค่าเท่ากับ ค่าเฉลี่ยของค่าของ h ณ จุดหกจุด $(p+1, q-1, r)$, ฯลฯ ซึ่งเป็นจุดยอดของรูปหกเหลี่ยมปกติ ที่มีจุดกึ่งกลาง ณ (p, q, r) และอยู่ในระนาบ $x + y + z = p + q + r$

เราจะแสดงว่า $h = 0$ ณ ทุกจุดใน T

ให้ $n \in \mathbb{N}$ พิจารณาเซตย่อย H ของระนาบ $x + y + z = n$ ที่อยู่ใน octant ไม่ติดลบ $\{(x, y, z) ; x, y, z \geq 0\}$

สมมุติว่า h บรรลุค่าสูงสุดบน $H \cap T$ ณ (p, q, r)

ถ้า $pqr = 0$ แล้ว ค่าสูงสุดของ h บน $H \cap T$ คือ 0 แต่ถ้า $pqr \neq 0$ แล้ว สมบัติค่าเฉลี่ยของ h ชี้ว่า ค่าของ h บนจุดทั้งหก $(p + 1, q - 1, r)$, ฯลฯ มีค่าเท่ากับ $h(p, q, r)$ (ซึ่งจุดทั้งหกนี้อยู่ใน H)

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง h บรรลุค่าสูงสุด ณ $(p + 1, q - 1, r)$ เมื่อใช้ข้อโต้แย้งนี้ซ้ำ (ถ้าจำเป็น) โดยใช้ $(p + 1, q - 1, r)$ เป็นจุดกึ่งกลาง พบว่า

$$h(p, q, r) = h(p+1, q-1, r) = h(p+2, q-2, r)$$

เมื่อดำเนินการเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ สรุปได้ว่า

$$h(p, q, r) = h(p + q, 0, r)$$

แสดงว่าค่าสูงสุดของ h บน $H \cap T$ คือ 0

เมื่อใช้ข้อโต้แย้งเดียวกันนี้กับฟังก์ชัน $-h = f_2 - f_1$ พบว่าค่าต่ำสุดที่บรรลุด้วย h บน $H \cap T$ เป็น 0 ด้วยเช่นกัน เพราะฉะนั้น

$$h = 0 \text{ ณ ทุกจุดของ } H \cap T$$

เมื่อแปร n ทำให้ได้ว่า

$$h = 0 \text{ ณ ทุกจุดของ } T$$

ขั้นตอนสุดท้ายคือ การสังเกตว่า $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$f(p, q, r) = \begin{cases} 0 & , \text{ถ้า } pqr = 0 \\ \dfrac{3pqr}{p+q+r} & , \text{ถ้า } pqr \neq 0 \end{cases}$$

สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสอง จึงเป็นคำตอบหนึ่งเดียวของโจทย์

ตัวอย่าง 5.9 (IMO 1975) จงหาพหุนามในสองตัวแปร P(x, y) ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) P เป็นพหุนามเอกพันธุ์ดีกรี n กล่าวคือ $P(tx, ty) = t^nP(x, y)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x, y

(b) สำหรับทุกจำนวนจริง a, b, c เรามีว่า $P(a + b, c) + P(b + c, a) + P(c + a, b) = 0$

(c) $P(1, 0) = 1$

วิธีทำ จากเงื่อนไขความเป็นเอกพันธุ์ a) ได้ว่ารูปแบบของพหุนามจะต้องเป็น

$$P(X, Y) = a_0X^n + a_1X^{n-1}Y + \ldots + a_iX^{n-i}Y^i + \ldots + a_nY^n$$

เงื่อนไข (c) ให้ว่า $a_0 = 1$ เราเหลือต้องทดสอบเงื่อนไข (b)

ถ้า n = 1 แทนค่าด้วยเงื่อนไข (b) พบว่า

$$0 = 1(a + b) + a_1(c) + 1(b + c) + a_1(a) + 1(c + a) + a_1(b) = 2(a + b + c) + a_1(a + b + c)$$

ซึ่งให้ค่า $a_1 = -2$ กล่าวคือ

$$P(X, Y) = X - 2Y$$

สมมุติว่า n > 1 แทนค่า a = b = x, c = - 2x ในเงื่อนไข (b) ได้

$$P(2x, - 2x) + P(- x, x) + P(- x, x) = 0$$

เมื่อใช้เงื่อนไขความเป็นเอกพันธุ์ (a) ได้ว่า

$$(2^n - 2)P(x, -x) = 0$$

เนื่องจาก n > 1 จึงได้ว่า $P(-x, x) = 0$

กล่าวคือ

$$P(X, Y) = (X+Y)P_1(X, Y)$$

จากเงื่อนไขความเป็นเอกพันธุ์ดีกรี n ของ P(X, Y) พบว่า $P_1(X, Y)$ เป็นพหุนามเอกพันธุ์ดีกรี n – 1 และตรวจสอบได้โดยตรงด้วยว่า $P_1(X, Y)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข (b) ด้วยเช่นกัน จากสิ่งที่ได้ทำข้างต้น จึงได้ว่า

$$P_1(X, Y) = (X + Y)P_2(X, Y)$$

ดำเนินการในทำนองเดียวกัน จนกระทั่งได้พหุนามดีกรี 1 ให้ว่า

$$P(X, Y) = (X + Y)^{n-1}P_{n-1}(X, Y)$$

โดยที่ $P_{n-1}(X, Y) = x - 2Y$

เพราะฉะนั้น

$$P(X, Y) = (X + Y)^{n-1}(X - 2Y)$$

ตัวอย่าง 5.10 (IMO 1973) ให้ G เป็นเซตที่ไม่ว่างของฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0)$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(a) ถ้า f, g เป็นฟังก์ชันจาก G แล้ว $g \circ f \in G$

(b) ถ้า $f \in G$ และ f^{-1} คือฟังก์ชันอินเวอร์สของมันแล้ว $f^{-1} \in G$

(c) สำหรับฟังก์ชัน $f \in G$ จะมีจำนวนจริง x_f ที่มีสมบัติว่า $f(x_f) = x_f$

จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนจริง k ที่มีสมบัติว่า f(k) = k สำหรับแต่ละฟังก์ชัน $f \in G$

วิธีทำ สังเกตว่า G เป็นกรุปของการแปลงของเซตของจำนวนจริง เทียบกับปฏิบัติการคอมโพสิทของฟังก์ชัน เพราะ
ถ้า $f(x) = a_1x + b_1$, $g(x) = a_2x + b_2$ แล้ว

$$(f\circ g)(x) = a_1a_2x + a_1b_2 + b_1$$

ส่วนอินเวอร์สเทียบกับปฏิบัติการนี้ หาได้ดังนี้
ถ้า $f(x) = ax + b$ แล้ว

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$$

โดยเงื่อนไข c) ฟังก์ชัน $f(x) = ax + b \in G$ มีจุดตรึง ณ x_f
เมื่อแทนค่าหาจุดตรึงได้

$$x_f = \frac{b}{1-a}$$

โดยที่ในกรณี $a = 1$ จะได้

$$b = 0,\ f = 1_R$$

ซึ่งแสดงว่าทุกจำนวนจริงเป็นจุดตรึง
ดังนั้นเงื่อนไข c) หมายความว่าฟังก์ชันหนึ่งเดียว $f \in G$ ที่อยู่ในรูป $f(x) = a_fx + b_f$ และมี $b_f = 0$ คือ $f=1_R$ โดยที่ $a_f=1$

- ถ้า $G = \{1_R\}$ แล้วสิ่งที่ต้องการพิสูจน์เป็นจริงอย่างชัดเจน
- ถ้า $G = \{1_R, f\}$ แล้ว $1_R = f^{-1}(x)$ หรือ $f^{-1} = f$ แต่กรณีแรกเป็นไปไม่ได้เพราะ $f \neq 1_R$

ดังนั้น $a = \frac{1}{a}$, $b = -\frac{b}{a}$ ซึ่งให้ $a = -1$ และ $f(x) = -x$ โดยมี $k = 0$ คือจุดตรึงที่ต้องการ

สมมุติว่า G มีสมาชิกอย่างน้อยสองฟังก์ชัน $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x + b_2$ ซึ่งทั้งคู่แตกต่างจาก 1_R
ดังนั้น

$$\text{ฟังก์ชัน } f_1 \circ f_2 \circ f_1^{-1} \circ f_2^{-1} = 1_R \in G$$

ซึ่งหาได้จาก

$$(f_1\circ f_2)\circ (f_2\circ f_1)^{-1}(x) = x + \{(a_1b_2 + b_1) - (a_2b_1 + b_2)\}$$

เนื่องจากฟังก์ชันนี้อยู่ใน G เราได้ว่า

$$a_1b_2 + b_1 = a_2b_1 + b_2$$

กล่าวคือ

$$\frac{b_1}{1-a_1} = \frac{b_2}{1-a_2}$$

แสดงว่า

$$x_{f_1} = x_{f_2}$$

เพราะฉะนั้น จุดตรึงของทุกฟังก์ชันเหมือนกัน

ตัวอย่าง 5.11 ฟังก์ชัน f(x, y) สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มไม่ติดลบ x, y, z:

(1) f(0, y) = y + 1

(2) f(x + 1, 0) = f(x, 1)

(3) f(x + 1, y + 1) = f(x, f(x + 1, y))

จงหาค่าของ f(4,1981)

วิธีทำ แทนค่า y = 0,1 ใน (1) ได้

$$f(0, 0) = 1,\ f(0, 1) = 2$$

แทนค่า x = 0 ใน (2) ได้

$$f(1, 0) = f(0, 1) = 2$$

จากนี้ แทนค่า x = 0 ใน (3) และใช้ (1) จะได้ความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$f(1, y + 1) = f(0, f(1, y)) = f(1, y) + 1$$

เมื่อใช้ความสัมพันธ์นี้ และการอุปนัย สามารถแสดงได้ไม่ยากว่า

$$f(1, y) = y + 2 \qquad (y \in \mathbb{N}_0)$$

แทนค่า x = 1 ใน (3) ได้

$$f(2, y + 1) = f(1, f(2, y)) = f(2, y) + 2$$

จาก f(2, 0) = f(1, 1) = 3 และสูตร (3) ได้

$$f(2, y) = 2y + 3$$

แทนค่า x = 2 ใน (3) ได้

$$f(3, y + 1) = f(2, f(3, y)) = 3 + 2f(3, y)$$

จาก f(3, 0) = f(2, 1) = 5 และการอุปนัยในสูตรข้างต้น ได้ว่า

$$f(3, y) = 2^{y+3} - 3$$

ในการหาค่า f(4,1981) ใช้ความสัมพันธ์ $f(4, 0) = f(3, 1) = 2^4 - 3$ และ $f(4, y + 1) = f(3, f(4, y)) = 2^{f(4,y)+3} - 3$ โดยเขียนสมการท้ายนี้ในรูป

$$f(4, y + 1) + 3 = 2^{f(4,y) + 3}$$

และดำเนินการเวียนซ้ำ ได้

$$f(4,1) + 3 = 2^{f(4,0)+3} = 2^{\left(2^4 - 3\right)+3} = 2^{2^{2^2}},\ f(4, 2) + 3 = 2^{f(4,1)+3} = 2^{2^{2^{2}}}$$

(โดยมีสองปรากฏอยู่ทั้งสิ้นห้าครั้งในเลขชี้กำลัง)

โดยการอุปนัย ได้ว่า

$$f(4, y) + 3 = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} \quad \text{(โดยมีสองปรากฏอยู่ ทั้งสิ้น } y + 3 \text{ ครั้งในเลขชี้กำลัง)}$$

ดังนั้น

$$f(4, 1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3 \quad \text{(โดยมีสองปรากฏอยู่ทั้งสิ้น 1984 ครั้งในพจน์แรก)}$$

ตัวอย่าง 5.12 (APMO 1994) จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

i) $f(x) + f(y) + 1 \geq f(x + y) \geq f(x) + f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$

ii) $f(0) \geq f(x)$ สำหรับทุก $x \in [0, 1)$

iii) $-f(-1) = f(1) = 1$

วิธีทำ จาก ii) , i) และ (iii) ได้

$$2f(0) + 1 \geq 2f(1/2) + 1 \geq f(1) \geq f(1) + f(0) = 1+f(0)$$

ดังนั้น $f(0) \geq 0 \geq f(0)$ ซึ่งแสดงว่า $f(0) = 0$

เราจะแสดงว่า $f(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in [0, 1)$

จาก ii) ได้ว่า

$$f(x) \leq 0 \text{ สำหรับทุก } x \in (0, 1)$$

ถ้า $f(x) < 0$ แล้ว

$$1 > f(x) + f(1 - x) + 1 \geq f(1) = 1$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้ง ดังนั้น

$$f(x) = 0 \text{ สำหรับทุก } x \in [0, 1)$$

ขั้นสุดท้ายคือแสดงว่า $f(x + 1) = f(x) + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ซึ่งจากนี้จะได้ว่า

$$f(x) = [x] \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

จาก i) เห็นได้ชัดว่า

$$f(x + 1) \geq f(x) + f(1) = f(x) + 1$$

ในทำนองกลับกัน i) และ ii) ให้ว่า

$$f(x) \geq f(x + 1) + f(-1) = f(x + 1) - 1$$

ตัวอย่าง 5.13 (APMO 1995) จงหาจำนวนนับ k ค่าน้อยสุด ที่มีสมบัติว่า มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, \ldots, k\}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $f(x) \neq f(y)$ เมื่อ $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$

วิธีทำ เราจะแสดงว่าค่าน้อยสุดของ k คือ $k^* = 4$

ขั้นแรก นิยามฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \to \{1, 2, 3, 4\}$ ดังนี้

$f(0) = 1$

เมื่อ $i \in \mathbb{N}$ ให้ f(i) เป็นจำนวนนับค่าน้อยสุดที่ไม่อยู่ในเซต

$$A_i := \{f(j) ; i - j \in \{5,7,12\} \text{ และ } -i < j < i\}$$

จาก $A_1 = \{f(j) ; j \in \{-4,-6,-11\} \text{ และ } -1 < j < 1\} = \varnothing$ ได้ $f(1) = 1$

จาก $A_2 = \{f(j) ; j \in \{-3,-5,-10\} \text{ และ } -2 < j < 2\} = \varnothing$ ได้ $f(2) = 1$

จาก $A_3 = \{f(j) ; j \in \{-2,-4,-9\} \text{ และ } -3 < j < 3\} = \{-2\}$ ได้ $f(3) \neq f(-2)$

จาก $A_4 = \{f(j) ; j \in \{-1,-3,-8\} \text{ และ } -4 < j < 4\} = \{-1,-3\}$ ได้ $f(4) \neq f(-1), f(-3)$

จาก $A_5 = \{f(j) ; j \in \{0,-2,-7\} \text{ และ } -5 < j < 5\} = \{0,-2\}$ ได้ $f(5) \neq f(0), f(-2)$

จาก $A_6 = \{f(j) ; j \in \{1,-1,-6\} \text{ และ } -6 < j < 6\} = \{1,-1\}$ ได้ $f(6) \neq f(1), f(-1)$

จาก $A_7 = \{f(j) ; j \in \{2,0,-5\} \text{ และ } -7 < j < 7\} = \{2,0,-5\}$ ได้ $f(7) \neq f(2), f(0), f(-5)$

เมื่อ $k \geq 7$ ได้

$$f(k) \neq f(k-5), f(k-7), f(k-12)$$

สังเกตว่าแต่ละเซต A_i มีจำนวนสมาชิก ≤ 3 แต่เรนจ์ของ f มีสมาชิก 4 ตัว
ดังนั้นย่อมหาค่า f(k) ได้เสมอ

เมื่อ $i \in \mathbb{N}$ ให้ f(i) เป็นจำนวนนับค่าน้อยสุดที่ไม่อยู่ในเซต

$$B_i := \{f(j) ; j+i \in \{5,7,12\} \text{ และ } -i < j < i\}$$

จาก $B_1 = \{f(j) ; j \in \{4,6,11\} \text{ และ } -1 < j < 1\} = \varnothing$ ได้ $f(-1) = 1$

จาก $B_2 = \{f(j) ; j \in \{3,5,10\} \text{ และ } -2 < j < 2\} = \varnothing$ ได้ $f(-2) = 1$

จาก $B_3 = \{f(j) ; j \in \{2,4,9\} \text{ และ } -3 < j < 3\} = \{2\}$ ได้ $f(-3) \neq f(2)$

จาก $B_4 = \{f(j) ; j \in \{1,3,8\} \text{ และ } -4 < j < 4\} = \{1,3\}$ ได้ $f(-4) \neq f(1), f(3)$

จาก $B_5 = \{f(j) ; j \in \{0,2,7\} \text{ และ } -5 < j < 5\} = \{0,2\}$ ได้ $f(-5) \neq f(0), f(2)$

จาก $B_6 = \{f(j) ; j \in \{-1,1,6\} \text{ และ } -6 < j < 6\} = \{-1,1\}$ ได้ $f(-6) \neq f(1), f(-1)$

จาก $B_7 = \{f(j) ; j \in \{-2,0,5\} \text{ และ } -7 < j < 7\} = \{-2,0,5\}$ ได้ $f(-7) \neq f(-2), f(0), f(5)$

เมื่อ $k \geq 7$ ได้

$$f(k) \neq f(5-k), f(7-k), f(12-k)$$

สังเกตว่าแต่ละเซต B_i มีจำนวนสมาชิก ≤ 3 แต่เรนจ์ของ f มีสมาชิก 4 ตัว
ดังนั้นย่อมหาค่า f(-k) ได้เสมอ
นอกจากนี้ยังพบจากการสร้างข้างต้นด้วยว่า

$$f(k_1) \neq f(k_2) \text{ เมื่อ } |k_1 - k_2| \in \{5,7,12\}$$

ดังนั้น $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{1,2,3,4\}$ ที่สร้างข้างต้นมีสมบัติตามโจทย์ต้องการ
แสดงว่า $k^* \leq 4$

ขั้นต่อไปคือแสดงว่า $k^* \geq 4$

สมมุติว่าสิ่งนี้ไม่จริง ดังนั้น จะมีฟังก์ชัน $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \{1, 2, 3\}$ ที่มีสมบัติว่า

$$f(x) \neq f(y) \text{ เมื่อ } |x - y| \in \{5, 7, 12\}$$

สังเกตว่าค่าของ $f(x)$, $f(x - 5)$, $f(x + 7)$ แตกต่างกัน
ดังนั้นเรนจ์คือ $\{1,2,3\} = \{f(x),f(x-5),f(x+7)\}$

และเนื่องจาก $f(x + 2) \notin \{f(x - 5), f(x + 7)\}$ จึงได้ว่า

$$f(x) = f(x + 2) \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } x$$

ดังนั้น

$$f(x) = f(x + 2) = f(x + 4) = \ldots = f(x + 12)$$

ซึ่งเป็นข้อขัดแย้งที่ต้องการ

ตัวอย่าง 5.14 (USAMO 1976) ถ้า $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $T(x)$ และ $S(x)$ เป็นพหุนามที่มีสมบัติว่า

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) + x^3T(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x)$$

จงพิสูจน์ว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

วิธีทำ เราจะพิสูจน์ผลที่กว้างกว่าในโจทย์ ซึ่งคือ ถ้า $P_0(x),\ldots, P_{n-2}(x)$ $(n \geq 2)$ และ $S(x)$ เป็นพหุนามที่มีสมบัติว่า

$$P_0(x^n) + xP_1(x^n) + \ldots + x^{n-2}P_{n-2}(x^n) = (x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)S(x)$$

แล้ว $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P_i(x)$ สำหรับทุก $i = 0,\ldots, n - 2$

ให้ w_i $(i = 1, 2,\ldots, n - 1)$ เป็นรากที่ n ของ 1 (ที่เป็นจำนวนเชิงซ้อน) ทั้งหมดที่ไม่ใช่ 1
เนื่องจาก

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1)$$

ซึ่งชี้ว่า

$$1 + w_i + w_i^2 + \ldots + w_i^{n-1} = 0 \text{ สำหรับทุก } i$$

ถ้าแทนค่า w_i ในเอกลักษณ์ข้างต้น พบว่า

$$P_0(1) + w_iP_1(1) + \ldots + w_i^{n-2}P_{n-2}(1) = 0 \qquad \text{สำหรับทุก } i$$

เนื่องจาก $P_0(1) + xP_1(1) + \ldots + x^{n-2}P_{n-2}(1)$ เป็นพหุนามดีกรี $n - 2$ และมีราก ณ จุด w_i ที่แตกต่างกัน $n - 1$ จุด ดังนั้น พหุนามนี้ต้องเป็นพหุนามศูนย์ กล่าวคือ

$$P_0(1) = P_1(1) = \ldots = P_{n-2}(1) = 0$$

ซึ่งแสดงว่า $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ แต่ละพหุนาม $P_0(x),\ldots, P_{n-2}(x)$

ตัวอย่าง 5.15 (USAMO 1990) ลำดับ $\{f_n(x)\}$ นิยามโดย $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 48}$ และ

$$f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)} \qquad (n \geq 1)$$

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดของสมการ $f_n(x) = 2x$

วิธีทำ สังเกตว่า $f_n(x)$ เป็นบวก สำหรับทุก n และทุก x ดังนั้น $f_n(x) = 2x$ มีเพียงคำตอบที่เป็นจำนวนบวก เราจะแสดงว่า สำหรับแต่ละ n มีคำตอบเพียงหนึ่งเดียวสำหรับสมการ $f_n(x) = 2x$ ซึ่งคือ $x = 4$
เมื่อ n = 1 เรามีว่า

$$f_1(4) = \sqrt{16 + 48} = 2\cdot 4$$

สมมุติว่า $f_k(4) = 2\cdot 4$

ดังนั้น

$$f_{k+1}(4) = \sqrt{16 + 6f_k(4)} = \sqrt{16 + 48} = 2\mathbb{R}4$$

เสร็จสิ้นการอุปนัย

ต่อไปเป็นการแสดงว่า ไม่มีคำตอบอื่นเพิ่มเติม เพียงพอที่จะพิสูจน์ประพจน์ที่ว่า

"สำหรับแต่ละ n ฟังก์ชัน $\frac{f_n(x)}{x}$ เป็นฟังก์ชันลด เมื่อ x มีค่าเพิ่มในโดเมน $(0,\infty)$"

ซึ่งเราจะใช้การอุปนัยเช่นกัน เมื่อ n = 1 เรามีว่า

$$\frac{f_1(x)}{x} = \sqrt{1+\frac{48}{x^2}}$$

ซึ่งเห็นชัดว่าเป็นฟังก์ชันลด

สมมุติว่า $\frac{f_k(x)}{x}$ เป็นฟังก์ชันลด
ดังนั้น

$$\frac{f_{k+1}(x)}{x} = \sqrt{1+\frac{6}{x}.\frac{f_k(x)}{x}}$$

เห็นชัดว่าเป็นฟังก์ชันลดด้วยเช่นกัน เป็นอันจบสิ้นการพิสูจน์

ตัวอย่าง 5.16 (USAMO 2000) เรียกฟังก์ชันจริงว่า เป็นฟังก์ชันนูนมาก ถ้ามันสอดคล้องกับความสัมพันธ์

$$\tfrac{1}{2}\{f(x) + f(y)\} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x - y| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

จงพิสูจน์ว่าไม่มีฟังก์ชันนูนมากอยู่จริง

วิธีทำ ตรึงจำนวนนับ n และสำหรับแต่ละจำนวนเต็ม i นิยาม $D_i := f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)$

แทนค่า $x = \frac{i+2}{n}$, $y = \frac{i}{n}$ ในอสมการของโจทย์ ได้

$$\frac{f\left(\frac{i+2}{n}\right)+f\left(\frac{i}{n}\right)}{2} \geq f\left(\frac{i+1}{n}\right) + \frac{2}{n}$$

ซึ่งให้ว่า

$$f\left(\frac{i+2}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \geq f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) + \frac{4}{n}$$

กล่าวคือ

$$D_{i+1} \geq D_i + \frac{4}{n}$$

เมื่อใช้อสมการท้ายนี้ซ้ำกับค่า i ที่เรียงถัดกัน n จำนวน ได้

$$D_{i+n} \geq D_i + 4$$

เมื่อบวกอสมการเหล่านี้ ตั้งแต่ i = 0 ถึง i = n – 1 และตัดทอนลดรูป พบว่า

$$f(2) - f(1) \geq f(1) - f(0) + 4n$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้สำหรับทุกจำนวนนับ n
เพราะฉะนั้น ไม่มีฟังก์ชันนูนมาก

ตัวอย่าง 5.17 (USAMO 1995) สมมุติว่า $q_0, q_1, q_2,\ldots$ เป็นลำดับอนันต์ของจำนวนเต็มที่มีสอดคล้องกับเงื่อนไขสองข้อต่อไปนี้

(i) $(m - n) \mid (q_m - q_n)$ เมื่อ $m > n \geq 0$

(ii) มีพหุนาม P ที่มีสมบัติว่า $|q_n| < P(n)$ สำหรับทุก n

จงพิสูจน์ว่า มีพหุนาม Q ที่มีสมบัติว่า

$$q_n = Q(n) \text{ สำหรับทุก } n$$

วิธีทำ ให้ d = deg P ดังนั้น มีพหุนาม $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ โดยที่ deg $Q \leq d$ และ $Q(i) = q_i$ $(i = 0, 1, 2,\ldots,d)$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง รูปแบบชัดแจ้งของพหุนามนี้ คือ

$$Q(x) = q_0L_0(x) + q_1L_1(x) +\ldots+ q_dL_d(x)$$

เมื่อ $L_i(x) = \prod_{0\leq j\leq d, j\neq i}\left(\frac{x-j}{i-j}\right)$ (สิ่งนี้รู้จักกันในนาม Lagrange interpolation polynomials)

เราจะแสดงว่า

$$q_n = Q(n) \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } n \geq 0$$

ให้ $k \geq 1$ เป็นตัวส่วนร่วมของสัมประสิทธิ์ของ Q และให้ $r_n = k\{Q(n) - q_n\}$ $(n = 0, 1, 2,\ldots)$
ดังนั้น

$$r_i = 0 \quad (i = 0, 1,\ldots, d)$$

สำหรับพหุนาม $Z \in \mathbb{Z}[x]$ ใด ๆ และสำหรับจำนวนเต็ม $m \neq n$
เรามีว่า

$$(m - n) \mid \{Z(m) - Z(n)\}$$

พหุนาม $kQ(n)$ มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และ $(m - n) \mid (q_m - q_n)$
ดังนั้น

$$(m - n) \mid r_m - r_n \text{ สำหรับทุก } m > n \geq 0$$

นอกจากนี้ มีพหุนาม R ที่มี deg $R \leq d$ และ $| r_n | < R(n)$ สำหรับทุก $n \geq 0$ สิ่งนี้มีผลตามมาจากความจริงที่ว่า P และ Q มีตีกรีอย่างมาก d และ

$$| r_n | \leq k(| Q(n) | + | q_n |) < k\{ | Q(n) | + P(n)\}$$

ดังนั้น

$$| r_n | < an^d + b \text{ สำหรับทุก } n \geq 0$$

เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัวที่มีค่าสูงมากพออย่างเหมาะสม
สำหรับ $n > d$ และ $0 \leq i \leq d$ เรามีว่า

$$(n - i) \mid (r_n - r_i) = r_n$$

ดังนั้น

$$\text{ค.ร.น.}(n, n - 1, \ldots, n - d) \mid r_n$$

เราจะพิสูจน์ข้ออ้างที่ว่า ค.ร.น.$(n, n - 1, \ldots, n - d) > R(n)$ สำหรับทุก n ที่มีค่าสูงมากพอ
กล่าวคือ สำหรับทุก $n \geq N$ เนื่องจาก ค.ร.น.$(n, n-1, \ldots, n-d) \mid r_n$ และ $R(n) > | r_n |$ ถ้าข้ออ้างดังกล่าวเป็นจริง จะได้ว่า

$$r_n = 0 \text{ สำหรับทุก } n \geq N$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม $m \geq N$ จาก $(m - n) \mid r_m - r_n = -r_n$
ดังนั้น $r_n = 0$ สำหรับทุก $n \geq 0$
โดยนิยามของ r_n จึงได้ว่า

$$q_n = Q(n) \text{ สำหรับทุก } n \geq 0$$

การพิสูจน์ข้ออ้าง เราใช้ความจริงที่ว่า สำหรับลำดับจำกัดของจำนวนนับใด ๆ $a_1, \ldots, a_m$ เรามีว่า

$$\text{ค.ร.น. } (a_1, \ldots, a_m) \geq \frac{\prod_{i=1}^{m} a_i}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} \text{ห.ร.ม.}(a_i, a_j)} \qquad (5.17.1)$$

ซึ่งเห็นจริงได้ดังนี้
ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ สำหรับ $i = 1, \ldots, m$
ให้ e_i เป็นกำลังของ p ในการแยกตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะหนึ่งเดียวของ a_i

ดังนั้น กำลังของ p ในการแยกตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะของ ค.ร.น. $(a_1,\ldots, a_m)$ คือ max $(e_1,\ldots, e_m)$ และค่านี้เห็นได้ชัดว่ามีค่าอย่างน้อยเป็น

$$\sum_{i=1}^{m} e_i - \sum_{1\le i<j\le m} \min(e_i, e_j)$$

ซึ่งคือกำลังของ p ในการแยกตัวประกอบเป็นจำนวนเฉพาะของค่าทางขวามือของ (5.17.1)

เนื่องจาก

$$\prod_{0\le i<j\le d} \text{ห.ร.ม.}(n-i, n-j) = \prod_{0\le i<j\le d} \text{ห.ร.ม}(n-i, j-i) \le \prod_{0\le i<j\le d} (j-i),$$

deg R = d และ $\deg_n \{n(n-1)\ldots(n-d)\} = d+1$

ได้ว่า เมื่อ n มีค่าสูงมากพอแล้ว

$$\text{ค.ร.น. } (n, n-1,\ldots, n-d) \ge \frac{n(n-1)\ldots(n-d)}{\prod_{0\le i<j\le d}(j-i)} > R(n)$$

ตัวอย่าง 5.18 (USAMO 1994) ให้ a, b เป็นจำนวนนับที่เป็นคี่ นิยามลำดับ (f_n) โดยให้ $f_1 = 1$, $f_2 = b$ และให้ f_n เมื่อ $n \ge 3$ เป็นตัวหารคี่ค่ามากสุดของ $f_{n-1} + f_{n-2}$
จงแสดงว่า f_n มีค่าคงตัว เมื่อ n สูงมากพอ และจงหาค่าคงตัวนี้ในรูปของฟังก์ชันของ a, b

วิธีทำ เนื่องจาก $f_{n-1} + f_{n-2}$ มีค่าเป็นคู่ และ f_n เป็นตัวหารคี่ค่ามากสุดของมัน
ดังนั้น

$$f_n \le \frac{1}{2}(f_{n-1} + f_{n-2}) \qquad (n \ge 3)$$

ซึ่งแสดงว่า

$$f_n \le \max(f_{n-1}, f_{n-2})$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $f_{n-1} = f_{n-2}$

สำหรับ $k \ge 1$ ให้ $c_k = \max(f_{2k}, f_{2k-1})$
ดังนั้น

$$f_{2k+1} \le \max(f_{2k}, f_{2k-1}) = c_k \quad \text{และ} \quad f_{2k+2} \le \max(f_{2k+1}, f_{2k}) \le c_k$$

ซึ่งให้ว่า

$$c_{k+1} \le c_k$$

โดยเป็นสมการ ก็ต่อเมื่อ $f_{2k} = f_{2k-1}$

เนื่องจาก (c_n) เป็นลำดับค่าไม่เพิ่มของจำนวนนับ ดังนั้น ในที่สุดแล้วจะต้องกลายเป็นลำดับค่าคงตัว แสดงว่า (f_n) ก็เป็นเช่นกัน

จากนิยามของ (f_n) ได้ว่า ตัวหารร่วมของ f_{n-1} และ f_n หาร f_{n+1} ลงตัวด้วยเช่นกัน
เพราะฉะนั้น สำหรับทุก n ที่มีค่าสูงมากพอ ได้ว่า

$$f_n = \text{ห.ร.ม.}\ (f_{n-1}, f_n) = \text{ห.ร.ม.}\ (f_{n-2}, f_{n-1}) = \ldots = \text{ห.ร.ม.}\ (a, b)$$

แบบฝึกหัด

1. (AMOC 1998) ให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

   (i) $f(999 + x) = f(999 - x)$

   (ii) $f(1998 + x) = -f(1998 - x)$

   จงพิสูจน์ว่า f มีสมบัติสองข้อต่อไปนี้

   (1) $f(-x) = -f(x)$ $\quad (x \in \mathbb{R})$

   (2) f เป็นฟังก์ชันเป็นคาบ

2. (AMOC 1995) สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $f(n, 0), f(n, 1), \ldots, f(n, 2n)$ เป็นจำนวนเต็มที่นิยามดังนี้ : พหุนาม $f(n, 0) + f(n, 1)x + f(n, 2)x^2 + \ldots + f(n, 2n)x^{2n}$ เหมือนกันทุกประการกับพหุนาม $(x^2 + x + 1)^n$

   จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ n เป็นจำนวนอนันต์ ที่มีสมบัติว่า สมาชิกสามตัวพอดีจาก $f(n, k)$, $k = 0, 1, \ldots, 2n$ เป็นจำนวนเต็มคี่

3. (Belarus MO 2003) มีฟังก์ชันทั่วถึง $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ หรือไม่ ที่มีสมบัติว่า $f(x + y) - f(x) - f(y)$ มีค่าได้เพียงสองค่า 0 และ 1 เท่านั้น สำหรับทุกจำนวนจริง x, y (ข้อแนะ: พิจารณา $f(x) = \frac{1}{2}([x] - \{x\})$)

4. (4.1) ให้ $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}$

   จงพิสูจน์ว่า $2\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kA\right) \sin\left(\frac{A}{2}\right) = \sin(nA)\cos\left(\frac{A}{2}\right) + \{\cos(nA) - 1\}\sin\left(\frac{A}{2}\right)$

   (4.2) ให้ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชันต่อไปนี้

   $$f(xy) = f(x)f(y), \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

   ถ้า $f(\cos(nA))$ มีค่าคงตัว สำหรับบางจำนวนจริง A และทุกจำนวนนับ n แล้วจงพิสูจน์ว่า f ต้องเป็นฟังก์ชันศูนย์ หรือไม่ A ก็ต้องเป็นพหุคูณของ π

5. (AMOC 1987) ให้ m, n เป็นจำนวนนับ > 1 โดยที่ m เป็นคู่ และให้ f: $\mathbb{R}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f\left(\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n}\right) = \frac{f(x_1)^m + f(x_2)^m + \ldots + f(x_n)^m}{n}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0)$

(ii) $f(1986) \neq 1986$

(iii) $f(1987) \neq 0$

จงพิสูจน์ว่า $f(1987) = 1$

6. (AMOC 1989) ให้ f(n) มีนิยามสำหรับทุกจำนวนนับ และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(f(n)) = 4n + 9$ $(n \in \mathbb{N})$

(ii) $f(2^k) = 2^{k+1} + 3$ $(k \in \mathbb{N}_0)$

จงหาค่าของ f(1789)

7. (AMOC 1991) สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 + 2n + 1} + \sqrt[3]{n^2 - 1} + \sqrt[3]{n^2 - 2n + 1}}$$

จงหาค่าของ $f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(999997) + f(999999)$

8. จงหาพหุนามเหนือ $\mathbb{C}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(x)f(-x) = f(x^2)$$

9. (Putnam 1978) จงหาจำนวนจริงค่ามากสุด A ที่ทำให้มีพหุนาม $P(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$0 \leq P(x) \leq 1 \text{ เมื่อ } -1 \leq x \leq 1$$

10. (Putnam 1979) จงหาเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับค่าคงตัว k ที่ทำให้มีฟังก์ชันต่อเนื่อง f(x) ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(f(x)) = kx^9 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

11. (Putnam 1983) ให้ k เป็นจำนวนนับ, $m = 2^k + 1$ และ $r \neq 1$ เป็นรากเชิงซ้อนของ $z^m - 1 = 0$ จงพิสูจน์ว่า มีพหุนาม P(z), Q(z) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และสอดคล้องกับสมการ

$$\{P(r)\}^2 + \{Q(r)\}^2 = -1$$

12. (Putnam 1984) ให้ n เป็นจำนวนนับ และให้ f(n) แทนเลขโดดในหลักสุดท้ายที่ไม่เป็น 0 ของ n! เมื่อเขียนเป็นจำนวนเต็มในฐาน 10 ยกตัวอย่างเช่น f(5) = 2

(a) จงแสดงว่า ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มไม่ติดลบที่แตกต่างกัน แล้ว

$$f(5^{a_1} + 5^{a_2} + \ldots + 5^{a_k}) \text{ มีค่าที่ขึ้นเพียงกับผลบวก } a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

(b) สมมุติว่าผลใน (a) เป็นจริง นิยาม

$$g(s) = f(5^{a_1} + 5^{a_2} + \ldots + 5^{a_k})$$

เมื่อ $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$

จงหาจำนวนนับค่าน้อยสุด p ที่มีสมบัติว่า

$$g(s) = g(s + p) \quad \text{สำหรับทุก } s \geq 1$$

หรือแสดงให้เห็นจริงว่าไม่มีค่า p ดังกล่าว

13. (Putnam 1984) ให้ n เป็นจำนวนนับ และนิยาม $f(n) = 1! + 2! + \ldots + n!$ จงหาพหุนาม P(x), Q(x) ที่ทำให้

$$f(n + 2) = P(n)\, f(n + 1) + Q(n)\, f(n) \quad \text{สำหรับทุก } n \geq 1$$

14. (Putnam 1966) ให้ f(n) เป็นผลบวกของ n พจน์แรกในลำดับ 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4,...
เมื่อพจน์ที่ n กำหนดโดย

$$a_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & , n \text{ คู่} \\ \frac{n-1}{2} & , n \text{ คี} \end{cases}$$

จงแสดงว่า ถ้า x, y เป็นจำนวนนับ และ $x > y$ แล้ว $xy = f(x + y) - f(x - y)$

15. (Bulgarian MC 1998) จงพิสูจน์ว่าไม่มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$\{f(x)\}^2 \geq f(x + y)\{f(x) - y\} \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

16. (Bulgarian MC 1998) พหุนาม $P_n(x, y)$, $n \geq 1$ ในสองตัวแปร นิยามโดย

$$P_1(x, y) = 1, \quad P_n(x, y) = (x + y - 1)(y + 1)P_n(x, y + 2) + (y - y^2)P_n(x, y)$$

จงพิสูจน์ว่า $P_n(x, y) = P_n(y, x)$ สำหรับทุก x, y และ n

17. (Bulgarian MC 1999) ให้ f(x) เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\mathbb{R}$ และสอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(\tan x) = \sin 2x \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

จงหาค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ $f(\sin^3 x) f(\cos^3 x)$

18. (South African MO 2000)

(a) มีฟังก์ชันจริง f และ g หรือไม่ ที่สอดคล้องกับคู่ของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(g(x)) = x^2 \quad \text{และ} \quad g(f(x)) = x^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

(b) มีฟังก์ชันจริง f และ g หรือไม่ ที่สอดคล้องกับคู่ของสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f(g(x)) = x^2 \quad \text{และ} \quad g(f(x)) = x^4 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

19. จงหา $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(x, x) = x$

(ii) $f(x, y) = f(y, x)$

(iii) $f(x, y) = f(x, x + y)$

20. (Hellenic MC 2002) จงหา $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$2n + 2001 \leq f(f(n)) + f(n) \leq 2n + 2003$$

21. (Canadian MO 1981) ให้ $P(x)$, $Q(x)$ เป็นพหุนามคู่หนึ่งที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$P(Q(x)) = Q(P(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$$

ถ้าสมการ $P(x) = Q(x)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง แล้วจงแสดงว่าสมการ $P(P(x)) = Q(Q(x))$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริงด้วยเช่นกัน

บรรณานุกรม

1. T. Andreescu & R. Gelca, Mathematical Olympiad Challenges, Birkhauser, Boston, 2000.
2. R.G. Bartle, The Elements of Real Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1976.
3. M. Becheanu, International Mathematical Olympiads 1959-2000, The Academic Distribution Center, 2001
4. A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer, New York, 1997
5. G. T. Gilbert, M. I. Krusemeyer & L. C. Larson, The Wohascum County Problem Book, The Mathematical Association of America, 1993.
6. S. Grozdev, E. Kolev, O. Mushkarov and N. Nikolov, Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, Sofia, 2002.
7. J. Herman, R. Kucera and J. Simsa, Equations and Inequaties, Springer, 2000
8. R. Honsberger, In Polya's Footsteps, The Mathematical Association of America, 1997.
9. R. Honsberger, Mathematical Chestnuts from Around the World, The Mathematical association of America, 2001.
10. P.E. Kopp, Analysis, Arnold, London,1996.
11. M.E. Kuczma, International Mathematical Olympiads 1986-1999, The Mathematical Association of America, 2003
12. C.Laflamme, The Canadian Mathematical Olympiad 1969-1933, Ed. M. Doob, The university of Toronto Press, 1993.
13. L.C. Larson, Problem-Solving Through Problems, Springer, New York, 1983.
14. H. Lausch, The Asian Pacific Mathematics Olympiad, Austrlian Mathematics Trust, 1994.
15. H. Lausch and PJ. Taylor, Australian Mathematical Olympiad 1979-1995, Australian Mathematics Trust,1997
16. E. Lozansky & C. Rousseau, Winning Solutions, Springer, New York, 1996.
17. K.H. Rosen, Elementary Number Theory, Addison Wesley, 1988
18. J. Smital, On Functions and Functional Equations, Adam Hilger, Bristol, 1988.
19. V.M. Tikhomirov, Stories about Maxima and Minima, American Mathematical Society, 1990
20. B. J. Venkatachala, Functional Equations, A Problem Solving Approach, Prism Books PVT Ltd., Bangalore, 2002.
21. P. Zeitz, The Art and Craft of Problem Solving, John Wiley & Sons, INC., 1999
22. Mathematical Olympiads 1999-2000, Problems and Solutions From Around the World, edited by T. Andreescu & Z. Feng, The Mathematical association of America, 2002.
23. ณรงค์ ปั้นนิ่ม, นิตติยา ปภาพจน์. ทฤษฎีจำนวน. กรุงเทพฯ: มูลนิธิ สอวน., 2547.
24. พัฒนี อุตมกะวานิช. สมการเชิงฟังก์ชัน. กรุงเทพฯ: สสวท., 2546.

บัญชีสัญลักษณ์

$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ (หรือจำนวนเต็มบวก)
$\mathbb{N}_0$	เซตของจำนวนเต็มไม่ติดลบ (ซึ่งคือ จำนวนเต็มที่มีค่า ≥ 0)
$\mathbb{Z}$	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Q}$	เซตของจำนวนตรรกยะ
$\mathbb{Q}^+$	เซตของจำนวนตรรกยะบวก
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{R}_0$	เซตของจำนวนจริงไม่ติดลบ (ซึ่งคือ จำนวนจริงที่มีค่า ≥ 0)
$\mathbb{R}^+$	เซตของจำนวนจริงบวก
$\mathbb{C}$	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$a \mid b$	ประพจน์ที่ว่า จำนวนเต็ม a ($\neq 0$) หารจำนวนเต็ม b ลงตัว
$\lvert x \rvert$	ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x
$[x]$	ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็มของจำนวนจริง x
(a, b)	ตัวหารร่วมมากของจำนวนเต็ม a, b หรือ ระบบพิกัดในระนาบสองมิติ
$a \equiv b \pmod{m}$	ประพจน์ที่ว่า จำนวนเต็ม m ($\neq 0$) หารจำนวนเต็ม $a - b$ ได้ลงตัว
$f : A \longrightarrow B$	ประพจน์ที่ว่า f เป็นฟังก์ชันจากเซต A ไปยังเซต B
D_f	โดเมนของฟังก์ชัน f
R_f	เรนจ์ของฟังก์ชัน f
f^{-1}	ฟังก์ชันผกผันของ f
$\lim_{x \to a} f(x)$	ลิมิตของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a
$n!$	จำนวน n แฟคทอเรียล
$\lim_{n \to \infty} a_n$	ลิมิตของลำดับ a_n เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้อนันต์
$\deg_x f$	ดีกรีของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x

บัญชีที่มาของโจทย์

Albanian MO	Albanian Mathematical Olympiad
AM Monthly	American Mathematical Monthly
AMOC	Australian Mathematical Olympiad
APMO	Asian Pacific Mathematics Olympiad
APMC	The Austrian-Polish Mathematics Competition
Belarus MO	Belarusian Mathematical Olympiad
British MO	British Mathematical Olympiad
Bulgarian MC	Bulgarian Mathematical Competitions
Canadian MO	Canadian Mathematical Olympiad
Chinese MO	Chinese Mathematical Olympiad
Croatian MC	Mathematical Competitions in Croatia
Czech-Slovak MO	Czech and Slovak Mathematical Olympiad
Estonian MO	Estonian Mathematical Olympiad
German MC	German National Mathematics Competition
Hellenic (Greek) MC	Hellenic (Greek) Mathematical Competition
HK MO	Hong Kong Mathematical Olympiad
IMO	International Mathematical Olympiad
Iranian MO	Iranian Mathematical Olympiad
Irish MO	Irish Mathematical Olympiad
Japanese MO	Japanese Mathematical Olympiad
Korean MO	Korean Mathmetical Olympiad
Lithunia MO	Mathematical Olympiad of Lithunia
Macedonian MC	Macedonian Mathematical Competition
Math. Magazine	Mathematics Magazine
Moldova MO	Republic of Moldova Mathematical Olympiad
Putnam	The William Lowell Putnam Mathematical Competition
Romanian MC	Romanian Mathematical Competitions
Singapore MO	Singapore Mathematical Olympiad
Slovenian MO	National Math Olympiad in Slovenia
South African MO	South African Mathematical Olympiad
Ukrainian MO	Ukrainian Mathematical Olympiad
USAMO	United States of America Mathematical Olympiad
USSRMO	USSR Mathematical Olympiad

ดัชนี

ความสัมพันธ์เวียนเกิด (Recurrence Relations) 266

ความหนาแน่น (Denseness) 185

เงื่อนไขเริ่มต้น (Initial conditions) 267

สัจพจน์ความบริบูรณ์ของจำนวนจริง (Completeness Axiom) 307

จำนวนลูคาส (Lucas numbers) 268

ทฤษฎีบทของบีดี้ 283

ทฤษฎีบทค่ามัชฌิม (Intermediate Value Theorem) 307

ทฤษฎีบทประกอบว่าด้วยอสมการ Bernoulli 99

ทฤษฎีบทว่าด้วยความมีขอบเขต (Boundedness Theorem) 307

ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (กรณีรากซ้ำ) 268

ทฤษฎีบทว่าด้วยความสัมพันธ์เวียนเกิด (กรณีรากไม่ซ้ำ) 267

ทฤษฎีบทว่าด้วยพหุนามสมมาตรของ Newton 83

ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการคู่ขนานของสมการโคชี 226

ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการโคชี 221

ทฤษฎีบทว่าด้วยสมการเดอเลมเบอร์ต 232

ทฤษฎีบทว่าด้วยอสมการ Jensen 62

ทฤษฎีบทว่าด้วยเอกลักษณ์ของเลอจองด์ 187

พหุนามสมมาตร (Symmetric Polynomials) 82

พหุนามสมมาตรมูลฐาน (Elementary Symmetric Polynomials) 82

พหุนามเอกพันธุ์ 95

ฟังก์ชันคี่ 180

ฟังก์ชันคู่ 180

ฟังก์ชันจริง 177

ฟังก์ชันต่อเนื่อง(Continuous Function) 182
ฟังก์ชันทางเดียว (Monotone Function) 178
ฟังก์ชันนูน (Convex Function) 61
ฟังก์ชันเป็นคาบ 179
ฟังก์ชันพีชคณิต 141
ฟังก์ชันเพิ่ม 178
ฟังก์ชันภาคจำนวนเต็ม (Greatest Integer Function) 185
ฟังก์ชันมีขอบเขต 178
ฟังก์ชันมีขอบเขตบน 178
ฟังก์ชันมีขอบเขตล่าง 178
ฟังก์ชันไม่เพิ่ม 178
ฟังก์ชันไม่ลด 178
ฟังก์ชันลด 178
ฟังก์ชันเว้า (Concave Function) 61

รูปแบบ ชัดแจ้ง (explicit form) 177
รูปแบบ โดยปริยาย (implicit form) 177

ลำดับ Fibonacci 167

สมการเชิงฟังก์ชันของโคชี (Cauchy's functional equations) 219
สมการเชิงฟังก์ชันของเดอเลมเบอร์ต (D'Alembert's Functional Equation) 230
สมบัติการจัดอันดับดี (Well-ordering Principle) 237
สมบัติการมีขั้นตอนวิธีของการหาร (Division Algorithm) 237
สมบัติของ Darboux 353
สมบัติเชิงการคูณ (Multiplicative) 225
สมบัติเชิงการบวก (Additive) 219
สมบัติไตรวิภาค 237
หลักการรังนกพิราบ 217
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน 63
อนุพันธ์อันดับสอง 64
อสมการ AM-GM ถ่วงน้ำหนัก 45

อสมการ Cauchy-Schwarz 50
อสมการ Chebyshev 73
อสมการ Hölder 46
อสมการ Jensen 62
อสมการ Minkowski 46
อสมการของ Maclaurin ว่าด้วยพหุนามสมมาตร 84
อสมการของ Newton ว่าด้วยพหุนามสมมาตร 84
อสมการของ Schur 85
อสมการค่าเฉลี่ยกำลัง (Power mean inequality) 98
อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต-ฮาร์โมนิก 18
อสมการว่าด้วยการจัดเรียง (Rearrangement Inequality) 73
อสมการเอกพันธุ์ 95
เอกลักษณ์ของเลอจองด์ (Legendre identity) 186

Cauchy-Forward & Backward Induction 18

Ehlers's Method 20

Jensen 's functional equation 219

Nesbitt's inequality 97

period 311
pre-period 311

อสมการและสมการเชิงฟังก์ชัน
ISBN 974 - 9940 - 66 - 0

9 789749 940662
C 112
4000 350.00 บาท



มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา
ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์
สำนักงานตั้งอยู่ในบริเวณ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท ปทุมวัน กทม. 10330
โทร. 0-2252-8916, 0-2252-8917, แฟกซ์. 0-2252-8917