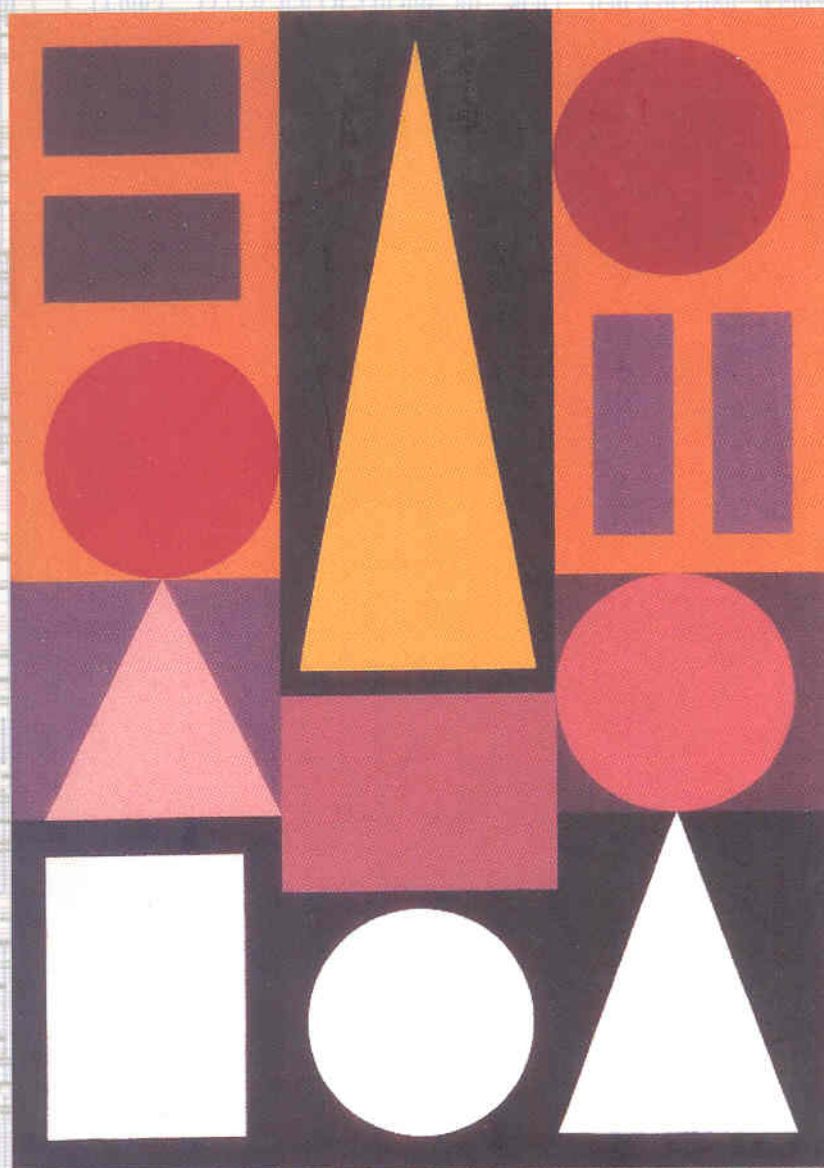




เรขาคณิต

(ความรู้พื้นฐาน รูปสามเหลี่ยม ความคล้าย วงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัส รูปสามเหลี่ยมพื้นที่กับรูปวงกลม จุด เส้นตรง
ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม การแบ่งแบบฮาร์โมนิก และการสร้าง ทฤษฎีบทของเซวา และทฤษฎีบทของเมนลอส
อสมการเรขาคณิต จำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ทางเรขาคณิต การแปลงทางคณิตศาสตร์)



โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน.

เรขาคณิต

(ความรู้พื้นฐาน รูปสามเหลี่ยม ความคล้าย วงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัส รูปสามเหลี่ยมพื้นที่กับรูปวงกลม จุด เส้นตรง
ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม การแบ่งแบบฮาร์โมนิก และการสร้าง ทฤษฎีบทของเซวา และทฤษฎีบทของเมเนลอส
อสมการเรขาคณิต จำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ทางเรขาคณิต การแปลงทางคณิตศาสตร์)



ถ่ายภาพ : ศ. ศักดา ศิริพันธุ์

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอน.



มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา
ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา
กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)

ความเป็นมา

ประเทศไทยส่งนักเรียนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งแรกในปี พ.ศ. 2532 ที่ประเทศเยอรมนี โดยความร่วมมือระหว่างสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา (พระยศในขณะนั้น) ได้พระราชทานเงินส่วนพระองค์ จำนวนหนึ่งเพื่อเป็นค่าใช้จ่าย

การคัดเลือกนักเรียนเพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 30 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดคณาจารย์มหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งมาช่วยฝึกอบรมรวมเป็นเวลาประมาณสองเดือน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติมครอบคลุมหลักสูตรที่จะใช้แข่งขัน ซึ่งอยู่ในระดับชั้นปีที่ 1-2 ของมหาวิทยาลัย จากผลสำเร็จในปีแรก ทำให้รัฐบาลเห็นความสำคัญจึงได้จัดสรรงบประมาณให้กับโครงการนี้ผ่านสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตั้งแต่ ปี พ.ศ. 2533 เป็นต้นมา สมทบกับเงินพระราชทานเป็นรายปีจากสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เพื่อสนับสนุนการส่งนักเรียนไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ 5 สาขา จนถึงปัจจุบัน รวม 14 ปี นักเรียนไทยได้ทำชื่อเสียงได้เหรียญทองรวม 17 เหรียญ เหรียญเงิน 53 เหรียญ เหรียญทองแดง 93 เหรียญ และเกียรตินิยม 35 ราย รวมทั้งสิ้น 198 รางวัล จากจำนวนนักเรียนที่ส่งไปเข้าแข่งขัน 276 คน (72%)

อย่างไรก็ตาม จากการที่ประเทศไทยดำเนินการจัดส่งนักเรียนเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ โอลิมปิก ระหว่างประเทศ ตั้งแต่ พ.ศ.2532 จนถึงปัจจุบัน ทำให้เห็นว่ามาตรฐานการศึกษาด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของไทยยังต่ำกว่ามาตรฐานสากล การเตรียมตัวของนักเรียนยังใช้เวลาน้อยเกินไป

เพื่อให้การส่งเสริมและสนับสนุนโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นสมเด็จพระเจ้า พี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จึงมีพระดำริให้จัดตั้งมูลนิธิ สอวน. และได้รับอนุมัติจากกระทรวงมหาดไทยเมื่อวันที่ 12 ตุลาคม 2542 โดยมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการ

วัตถุประสงค์

1. ส่งเสริมให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วประเทศที่มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีโอกาสได้รับการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ฟิสิกส์ และชีววิทยา ตามความถนัดทั้งด้านทฤษฎีและทักษะด้านปฏิบัติ ให้สามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยจัดให้มีศูนย์อบรมทั่วประเทศเป็นการเพิ่มเวลาฝึกอบรม เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความพร้อมที่จะเข้ารับการคัดเลือกไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ตามพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ องค์ประธานมูลนิธิ สอวน.
2. เพื่อนำประสบการณ์ที่ได้จากการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษาของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าระดับสากล

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) ได้ร่วมมือกับคณาจารย์มหาวิทยาลัยของรัฐ 20 แห่ง และกระทรวงศึกษาธิการ ดำเนินการจัดตั้งศูนย์ สอวน. ในภูมิภาค 12 ศูนย์ และในกรุงเทพฯ 1 ศูนย์ (5 โรงเรียน) เพื่อพัฒนาศักยภาพทางปัญญาของนักเรียนที่มีความพร้อมในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์จากทั่วประเทศ เพื่อให้ให้นักเรียนได้มีความรู้ความสามารถเทียบเท่ามาตรฐานสากล และพร้อมที่จะสอบคัดเลือกเป็นผู้แทนประเทศไทยไปร่วมการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศในสาขาวิชาต่างๆ ได้ และเพื่อขยายผลจากประสบการณ์ที่ได้เข้าแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าสากล

ในการอบรมนักเรียนของศูนย์ สอวน. มูลนิธิ สอวน. ได้พิจารณาเห็นว่าตำราที่มีความสมบูรณ์ของเนื้อหาตามหลักสูตรของ สอวน. จะช่วยพัฒนาศักยภาพของนักเรียนในศูนย์ สอวน. ให้สูงขึ้นได้นอกจากนั้นตำราเรียนในวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสมบูรณ์ถูกต้องยังขาดแคลน นักเรียนและครูสามารถนำตำราที่พัฒนาขึ้นมานี้ไปใช้เป็นหนังสืออ้างอิงประกอบการเรียนการสอนได้อีกด้วย มูลนิธิ สอวน. จึงได้มี “โครงการจัดทำตำราส่งเสริมพัฒนาศักยภาพของนักเรียนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์” ขึ้น เพื่อผลิตตำราคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ที่มีเนื้อหาหลักสูตรตามมาตรฐานสากล โดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นที่ระลึกในมหามงคลสมัยที่สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ทรงเจริญพระชนมายุ 80 พรรษา ซึ่งพระองค์ทรงมีพระมหากรุณาธิคุณต่อโครงการจัดตั้งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศและทรงสนับสนุนการดำเนินงานเพื่อพัฒนามาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยอย่างหาที่สุดมิได้

2. เพื่อผลิตหนังสือคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายถึงระดับชั้นปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยให้มีคุณภาพเทียบเท่าสากล เรียบเรียงโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัยของรัฐที่มีประสบการณ์สูงและที่มีส่วนรวมในการฝึกอบรมนักเรียนในค่าย สอวน. ค่าย สสวท. และควบคุมนักเรียนไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ เนื้อหาในหนังสือเน้นกระบวนการคิดแบบวิทยาศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและประยุกต์ได้โดยจัดพิมพ์บนกระดาษอาร์ตอย่างดีและมีภาพสีประกอบคำบรรยาย

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ รวม 5 เล่ม คอมพิวเตอร์ 3 เล่ม เคมี 3 เล่ม ชีววิทยา 5 เล่ม และฟิสิกส์ 3 เล่ม โดยหนังสือชุดแรกจะนำขึ้นทูลเกล้าถวายในวันที่ 6 มิถุนายน 2547 ซึ่งเป็นวันประชุมสามัญประจำปี พ.ศ. 2547 ของคณะกรรมการบริหาร และสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เสด็จเป็นองค์ประธานที่ประชุม ส่วนที่เหลือคาดว่าจะจัดพิมพ์ให้แล้วเสร็จภายในปี พ.ศ. 2547 นี้ นอกจากนั้นคณะกรรมการโครงการผลิตตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายจะผลิตตำราที่มีคุณภาพสูงนี้ในระดับมัธยมศึกษาต้นโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัย เพื่อวางรากฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพื่อสร้างแรงบันดาลใจและความสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์แก่เยาวชนอีกด้วย หากได้รับความอนุเคราะห์ช่วยเหลือด้านงบประมาณจากภาครัฐและเอกชน

คณะจัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์หวังว่าโครงการตำราคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. จะมีส่วนร่วมในการปฏิรูปการเรียนรู้และยกระดับมาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้เทียบเท่ากับระดับสากลเพื่อสนองพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

*คำขอบคุณ : คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ ขอขอบคุณพิพิธภัณฑ ARITHMEUM, Bonn ที่อนุญาต

ให้ประธานคณะกรรมการฯ เข้าถ่ายภาพในพิพิธภัณฑ เพื่อนำมาเผยแพร่

คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

คณะกรรมการที่ปรึกษา

1. ศาสตราจารย์ นายแพทย์ จรัส สุวรรณเวลา
2. รองศาสตราจารย์ ดร.กำจัด มงคลกุล
3. ดร. คุณหญิงกษมา วรวรรณ ณ อยุธยา
4. รองศาสตราจารย์ ดร. คุณหญิงสุมณฑา พรหมบุญ
5. นายเชาว์ อรรถมานะ (อดีต)
6. นายสมนึก พิมลเสถียร
7. นายสุนทร อรุณานนท์ชัย
8. รองศาสตราจารย์บุญรักษา สุนทรธรรม

รองประธานมูลนิธิ สอวน.
กรรมการมูลนิธิฯ
กรรมการมูลนิธิฯ
กรรมการมูลนิธิฯ
กรรมการมูลนิธิฯ
กรรมการมูลนิธิฯ
กรรมการมูลนิธิฯ
กรรมการมูลนิธิฯ

คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ

1. ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์ (ราชบัณฑิต) เลขานุการมูลนิธิ สอวน.
2. รองศาสตราจารย์เย็นใจ สมวิเชียร
3. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนัม
4. รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรรณ
5. รองศาสตราจารย์ ดร. พินิติ รตะนานุกูล
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ
7. ศาสตราจารย์อักษร ศรีปลั่ง
8. รองศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ยศยิ่งยวด

ประธาน
รองประธาน
กรรมการ (วิชาคณิตศาสตร์)
กรรมการ (วิชาคอมพิวเตอร์)
กรรมการ (วิชาเคมี)
กรรมการ (วิชาฟิสิกส์)
กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทพืช)
กรรมการ (วิชาชีววิทยา ประเภทสัตว์)

คณะผู้เขียนวิชาคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนัม
2. ศาสตราจารย์ กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ สิริวัฒน์
4. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์
5. รองศาสตราจารย์ ดร. ณวิวรรณ รัตนประเสริฐ
6. รองศาสตราจารย์ ดร. วิเชียร เลหาโกศล
7. ดร. ภัททิรา เรืองสินทรัพย์
8. นายวัชรพล พิมพ์เสริฐ

ประธานคณะกรรมการ
อนุกรรมการ
อนุกรรมการ
อนุกรรมการ
อนุกรรมการ
อนุกรรมการ
อนุกรรมการ
อนุกรรมการ

คำนำ

หนังสือเรขาคณิตเล่มนี้ ผู้เขียนได้นำเนื้อหาามาจัดเป็นหมวดหมู่ เรื่องใดที่เกี่ยวข้องกันก็จัดไว้ในบทเดียวกัน ในบทแรกได้กล่าวถึงความรู้พื้นฐานซึ่งประกอบด้วยสัจพจน์ บทนิยามและทฤษฎีบทต่างๆ ที่จะนำไปใช้อ้างอิงในการพิสูจน์ เนื่องจากการพิสูจน์เรขาคณิตจะต้องใช้เหตุผล จึงได้นำรูปแบบของการใช้เหตุผลทั้งแบบอุปนัยและแบบนิรนัยมาแสดงไว้ ตลอดจนได้แสดงให้เห็นแนวทางในการวิเคราะห์แนวคิดก่อนที่จะเขียนพิสูจน์

บทที่ 2 เรื่องรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและความคล้าย ซึ่งกล่าวถึงทั้งรูปสามเหลี่ยมคล้ายและรูปหลายเหลี่ยมคล้าย

บทที่ 3 ทฤษฎีบทต่างๆ ที่เกี่ยวกับวงกลมคอร์ดและเส้นสัมผัส

บทที่ 4 รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากับวงกลม ซึ่งกล่าวถึงวงกลมแบบนอกและแบบในรูปสามเหลี่ยม รูปสี่เหลี่ยม ตลอดจนรูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าแบบนอกและแบบในวงกลม

บทที่ 5 จุดเส้นตรงที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม ซึ่งกล่าวถึงจุดรวม จุดออร์โทเซนเตอร์ วงกลมเก้าจุดรูป สามเหลี่ยมมีเดียและเส้นออยเลอร์

บทที่ 6 การแบ่งแบบฮาร์โมนิกและการสร้างต่างๆ ซึ่งเป็นพื้นฐานการสร้างที่ยากขึ้นตามลำดับ

สำหรับเนื้อหาบทที่ 1 ถึงบทที่ 6 เหมาะสำหรับนักเรียนระดับมัธยมศึกษา แต่บทที่จะกล่าวถึงต่อไปเหมาะสำหรับผู้เรียนในขั้นที่สูงขึ้น

บทที่ 7 ทฤษฎีบทของเชวาและทฤษฎีบทของเมนเดลอส

บทที่ 8 อสมการเรขาคณิต

บทที่ 9 จำนวนเชิงซ้อนและการประยุกต์ทางเรขาคณิต

บทที่ 10 การแปลงทางเรขาคณิต

นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศแสดงไว้ ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้คงจะเป็นประโยชน์ต่อผู้ใช้ตามสมควร

ผู้เขียน

ศาสตราจารย์ กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล

ปม., อ.บ., ค.บ. จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, MA (USA)

Grad. Diploma in Ed. Admin, Canada

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ลิ่ววัฒน์

วท.บ. เกียรตินิยมอันดับ 1 มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

วท.ม. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่

วท.ด. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 974-92234-9-7

สงวนลิขสิทธิ์

จัดพิมพ์โดย มูลนิธิ สอวน.

พิมพ์ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2548 (2005)

ออกแบบปก หน้ารองปกและหน้านำบทที่ 1 โดย ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์

ศิลปกรรม: นายปรีชา ถักระเนตร

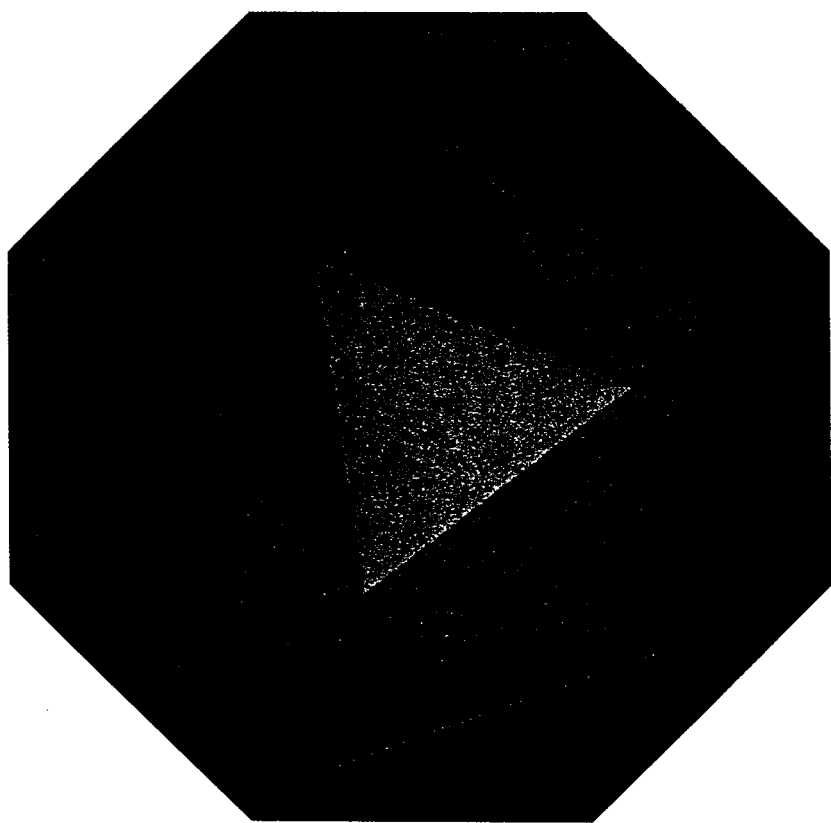
พิมพ์ที่ บริษัทด้านสุทธภาพพิมพ์ จำกัด

แยกสี่ / เฟลท เอ็นอาร์ ฟิล์ม

สารบัญ

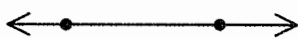
บทที่ 1	ความรู้พื้นฐาน	1
บทที่ 2	รูปสามเหลี่ยม ความคล้าย	36
บทที่ 3	วงกลม คอร์ด และเส้นสัมผัส	70
บทที่ 4	รูปสามเหลี่ยมผืนผ้ากับรูปวงกลม	92
บทที่ 5	จุด เส้นตรง ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม	114
บทที่ 6	การแบ่งแบบฮาร์โมนิก และการสร้าง	132
บทที่ 7	ทฤษฎีบทของเซวา และทฤษฎีบทของเมนเนลอส	166
บทที่ 8	อสมการเรขาคณิต	178
บทที่ 9	จำนวนเชิงซ้อน และการประยุกต์ทางเรขาคณิต	196
บทที่ 10	การแปลงทางเรขาคณิต	209

บรรณานุกรม	245
ภาคผนวก	247
ดัชนี	262
บัญชีสัญลักษณ์	264

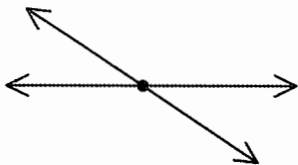


การกล่าวถึงข้อความบางประการที่ไม่ต้องพิสูจน์ เราเรียกสมบัติทางเรขาคณิตของข้อความดังกล่าวว่า
 สัจพจน์ (Postulate) ข้อความคาดการณ์ (Conjecture) บางข้อความเป็นสัจพจน์และยอมรับว่าเป็นความจริง แต่
 บางข้อความที่ต้องใช้การให้เหตุผลแบบนิรนัยก็จะเป็นทฤษฎี

สัจพจน์ทางเรขาคณิตของยุคลิด จะมีพื้นฐานมาจากการสร้างโดยใช้วงเวียนและสันตรง สัจพจน์ที่จะ
 กล่าวถึงต่อไปนี้ ขึ้นอยู่กับการสร้างทางเรขาคณิต เมื่อเกิดการค้นพบด้วยการสร้างทางเรขาคณิต เรามักจะ
 ประจักษ์ในเรื่องเหล่านั้นว่าเป็นความจริง พิจารณาสัจพจน์ต่อไปนี้



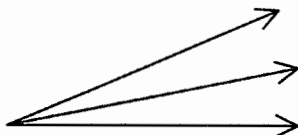
มีเส้นตรงเพียงเส้นเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสองจุดที่กำหนดให้



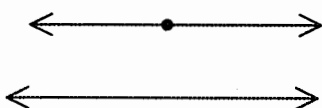
เส้นตรงสองเส้นตัดกัน จะตัดกันที่จุดเพียงจุดเดียวเท่านั้น



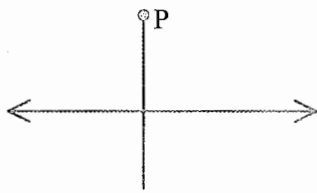
กำหนดจุดกึ่งกลางบนส่วนของเส้นตรง ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น



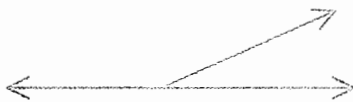
ลากเส้นแบ่งครึ่งมุมได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น



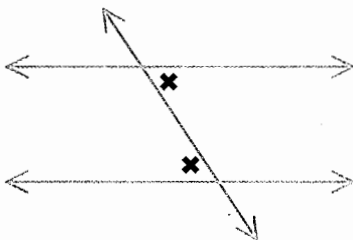
ลากเส้นขนานผ่านจุดจุดหนึ่งและขนานกับเส้นที่กำหนดให้
 ได้เพียงเส้นเดียวเท่านั้น



จากจุดจุดหนึ่งภายนอกเส้นตรง สามารถลากเส้นตั้งฉากกับ
เส้นตรงที่กำหนดให้



ถ้ามุมสองมุมอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
แล้ว มุมทั้งสองนั้นเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก



เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นขนานคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งเท่ากัน
ถ้าเส้นตรงสองเส้นถูกตัดโดยเส้นตรงเส้นหนึ่ง ทำให้มุมแย้ง
เท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

อนิยาม : จุด เส้นตรง ระนาบ

บทนิยาม ส่วนของเส้นตรง คือส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่มีจุดปลายสองจุด



ส่วนของเส้นตรง AB เขียนแทนด้วย $\overline{AB}$

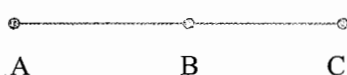
จุด A และจุด B เป็นจุดปลายของ $\overline{AB}$

ความยาวของ $\overline{AB}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $m(\overline{AB})$ หรือ AB

เช่น ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB เท่ากับ 10 เซนติเมตร

เขียนแทนด้วย $m(\overline{AB}) = 10$ เซนติเมตร

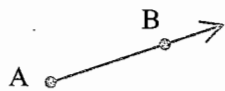
หรือ $AB = 10$ เซนติเมตร



ถ้าจุด B อยู่บน $\overline{AC}$ และอยู่ระหว่างจุด A และจุด C

แล้ว $AB + BC = AC$

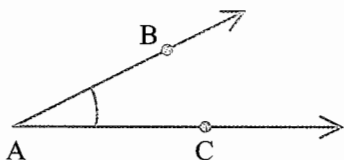
บทนิยาม รังสีคือส่วนหนึ่งของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายเพียงจุดเดียว



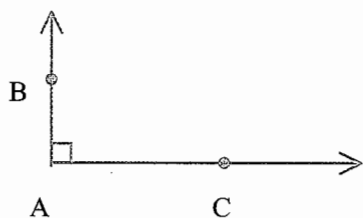
รังสี AB เขียนแทนด้วย $\vec{AB}$

บทนิยาม มุม คือรังสีสองเส้นที่มีจุดปลายเป็นจุดเดียวกัน
เรียกรังสีสองเส้นนี้ว่า **แขนของมุม**
และเรียกจุดปลายที่เป็นจุดเดียวกันนี้ว่า **จุดยอดมุม**

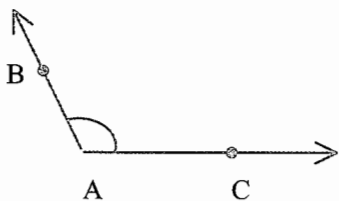
มุม



มุมที่มีขนาดเล็กกว่า 90 องศา เรียกว่า **มุมแหลม**



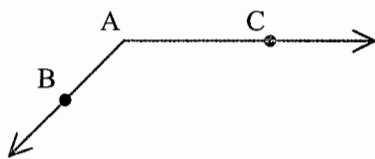
มุมที่มีขนาด 90 องศา เรียกว่า **มุมฉาก**



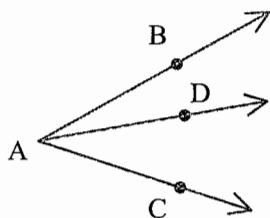
มุมที่มีขนาดโตกว่า 90 องศา แต่ไม่ถึง 180 องศา
เรียกว่า **มุมป้าน**



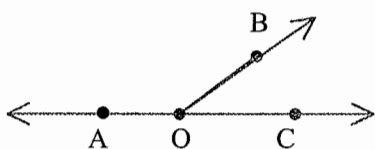
มุมที่มีขนาด 180 องศา เรียกว่า **มุมตรง**



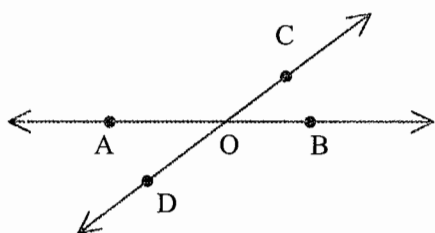
มุมที่มีขนาดโตกว่า 180 องศา แต่ไม่ถึง 360 องศา
เรียกว่า **มุมกลับ**



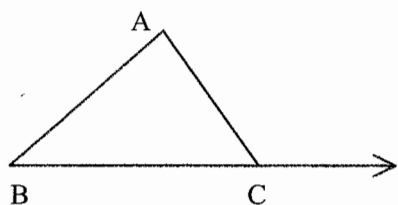
มุมสองมุมที่มีแขนร่วมหนึ่งแขน เรียกว่า **มุมประชิด**



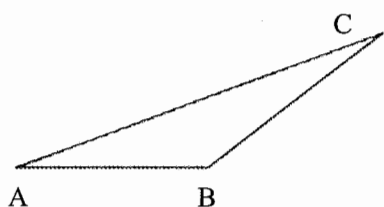
เส้นตรงเส้นหนึ่งตั้งอยู่บนเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง มุมประชิด
รวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก



เส้นตรงสองเส้นตัดกัน มุมตรงข้ามย่อมเท่ากัน

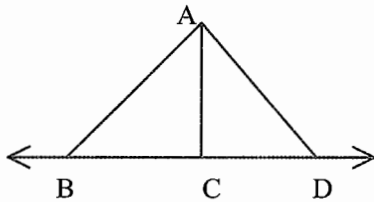


ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอก
ย่อมใหญ่กว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม



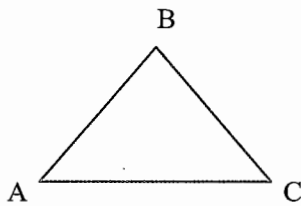
ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมใหญ่ ย่อมยาว
กว่าด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมเล็ก
ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านยาวย่อมใหญ่
กว่ามุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านสั้น

ความยาวของด้าน

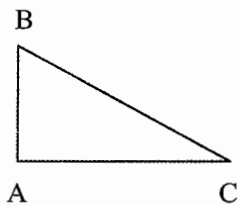


ด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรวมกัน ย่อมยาวกว่าด้านที่สาม
ลากเส้นจากจุดจุดหนึ่งไปยังเส้นตรงที่กำหนดให้ เส้นตั้งฉาก
เป็นเส้นสั้นที่สุด

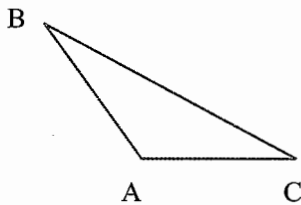
รูปสามเหลี่ยม



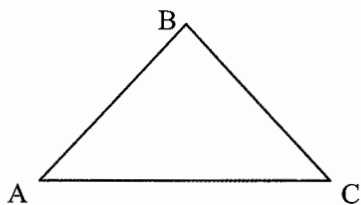
รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมทั้งสามเป็นมุมแหลม
เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม



รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งมุมเป็นมุมฉาก
เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

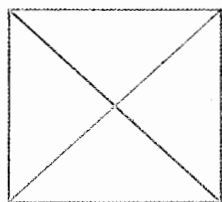


รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมป้าน
เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน



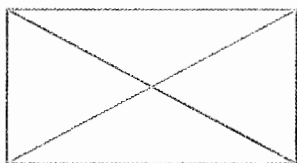
รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านยาวเท่ากันสองด้าน และมุมที่ฐานมีขนาด
เท่ากัน เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

รูปสี่เหลี่ยม



รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มุมทุกมุมเป็นมุมฉาก
เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวเท่ากัน เส้นทแยงมุม
ตั้งฉากและแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันด้วย



รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากัน แต่ด้านที่อยู่ติดกันยาว
ไม่เท่ากัน มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ายาวเท่ากัน และแบ่งครึ่งซึ่ง
กันและกัน



รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามยาวเท่ากันและขนานกัน

เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน



รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน มุมแต่ละมุมไม่เป็น

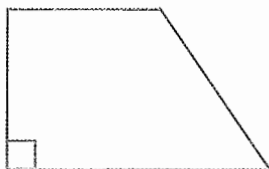
มุมฉาก เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน จะแบ่งครึ่งซึ่งกัน
และกัน และตั้งฉากกันด้วย



รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันเพียงคู่เดียว

เรียกว่า รูปสี่เหลี่ยมคางหมู



การเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิต

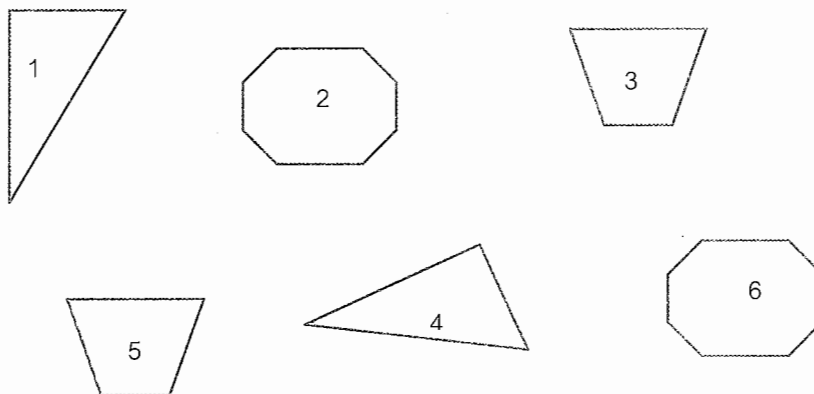
บทนิยาม การเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิต คือการเปลี่ยนตำแหน่งของรูปเรขาคณิตบนระนาบ โดยที่ระยะระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ของรูปนั้นไม่เปลี่ยนแปลง

บทนิยาม รูปเรขาคณิตสองรูปเท่ากันทุกประการก็ต่อเมื่อเคลื่อนรูปหนึ่งให้ทับรูปหนึ่งได้สนิท

ความเท่ากันทุกประการ

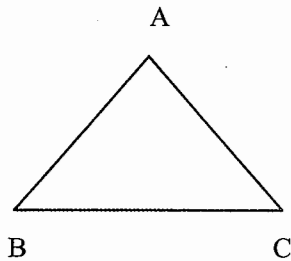
บทนิยาม รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี

พิจารณารูปต่อไปนี้ว่ามีรูปคู่ใดที่ทับกันสนิทพอดี ถ้าไม่แน่ใจ
จงใช้กระดาษลอกลายลอกรูปแล้วนำไปซ้อนกัน



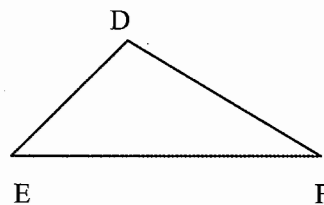
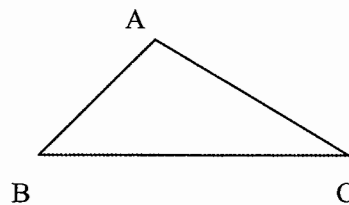
ความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม

ก่อนที่จะกล่าวถึงความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม จะนิยามรูปสามเหลี่ยมดังนี้



บทนิยาม

รูปสามเหลี่ยม ABC คือรูปที่ประกอบด้วยส่วนของเส้นตรงสามเส้น $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ เชื่อมต่อจุด A จุด B และจุด C ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกจุด A จุด B และจุด C ว่า จุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC เรียก $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ว่า ด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC เพื่อความสะดวก เขียน $\triangle ABC$ แทนคำว่า “รูปสามเหลี่ยม ABC ”



ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับรูปสามเหลี่ยม DEF ทุกประการ แล้ว

$$AB = DE \quad \hat{BAC} = \hat{EDF}$$

$$BC = EF \quad \hat{ABC} = \hat{DEF}$$

$$AC = DF \quad \hat{ACB} = \hat{DFE}$$

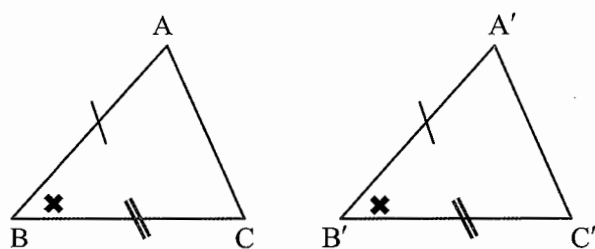
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปเท่ากันทุกประการแล้ว ด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ กล่าวคือ มีด้านที่ยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้าน และมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสามคู่ มุมต่อมุม

ข้อตกลง เขียน $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ แทนข้อความ “รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับรูปสามเหลี่ยม DEF ทุกประการ”

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – ด้าน

เมื่อต้องการทราบว่ารูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้สองรูปเท่ากันทุกประการหรือไม่ อาจจะใช้บทนิยามที่ว่า “รูปสองรูปเท่ากันทุกประการ เมื่อสามารถนำรูปหนึ่งทับอีกรูปหนึ่งได้สนิทพอดี” โดยใช้กระดาษลอกลายลอก รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งซ้อนบนอีกรูปหนึ่ง หรือสร้างรูปสามเหลี่ยมสองรูปแล้วตัดออกมาวางซ้อนกันก็ได้

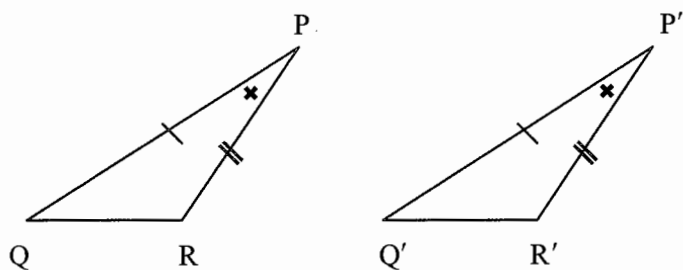
พิจารณารูปสามเหลี่ยมแต่ละคู่ต่อไปนี้ (ใช้กระดาษลอกลาย)



$$AB = A'B'$$

$$\hat{A}BC = \hat{A}'B'C'$$

$$BC = B'C'$$

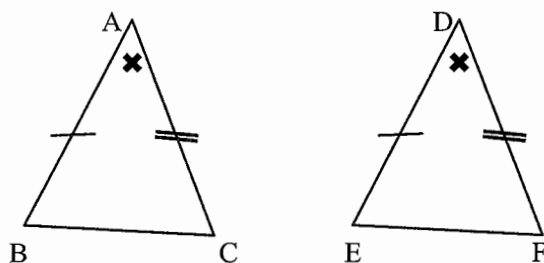


$$PQ = P'Q'$$

$$\hat{Q}PR = \hat{Q}'P'R'$$

$$PR = P'R'$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปต่อไปนี้ (ใช้การยกซ้อนกัน)



ยกรูปสามเหลี่ยม ABC ซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม DEF

ให้จุด A ทับจุด D ด้าน AB ทาบตามด้าน DE

$$AB = DE$$

จุด B ทับจุด E

เนื่องจาก $\hat{B}AC = \hat{E}DF$ ด้าน AC ทาบตามด้าน DF

$$AC = DF$$

จุด C ทับจุด F

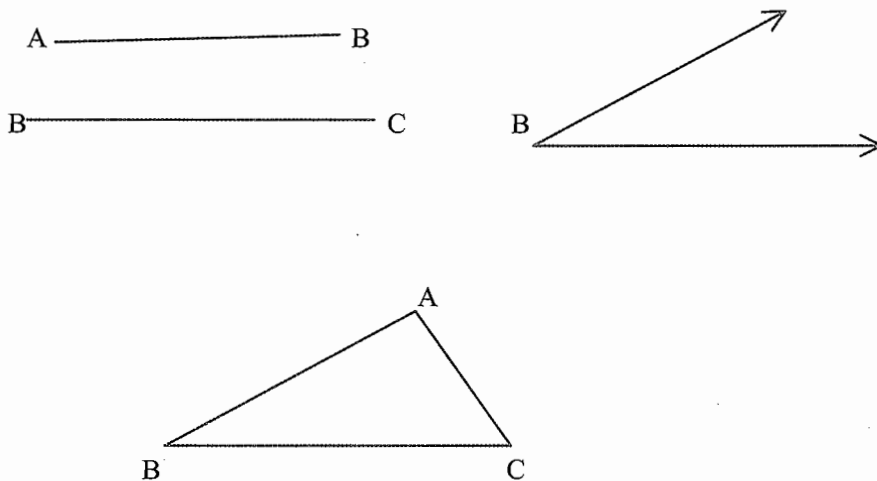
ด้าน BC ทับด้าน EF สนิท

$\triangle ABC$ ทับ $\triangle DEF$ สนิท

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

กำหนดให้ ด้าน AB และ BC เป็นด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC
มุมแหลมหนึ่งมุมซึ่งอยู่ระหว่างด้านทั้งสองนั้น



วิธีสร้าง

1. สร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบนกระดาษ ให้มีความยาวของด้านสองด้าน และมุมแหลมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุด B เท่ากับด้านและมุมที่กำหนดให้
2. ตัดรูปสามเหลี่ยมที่สร้างแล้ว นำไปซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม ABC จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้น เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกประการ

จากที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – ด้าน (ค. ม. ค.) ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสองคู่ และมุมในระหว่างด้านคู่ที่ยาวเท่ากัน มีขนาดเท่ากันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้จะเท่ากันทุกประการ

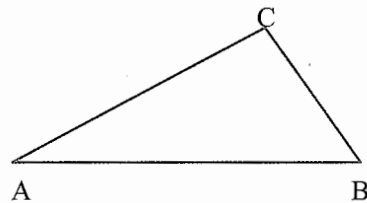
รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน

พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

B ————— C

A ————— C

A ————— B

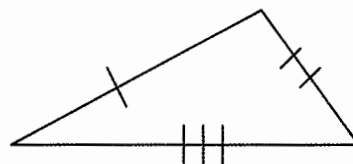
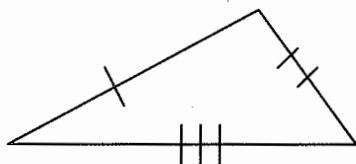


วิธีสร้าง

1. ใช้ส่วนของเส้นตรงทั้งสามเส้น ซึ่งแต่ละเส้นมีความยาวเท่ากับความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC สร้างรูปสามเหลี่ยมแล้วตัดออกมา
2. ยกรูปสามเหลี่ยมที่ตัดออกมาซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม ABC จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้น เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกประการ

จากที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์แบบ ด้าน – ด้าน – ด้าน (ด. ด. ด.) ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

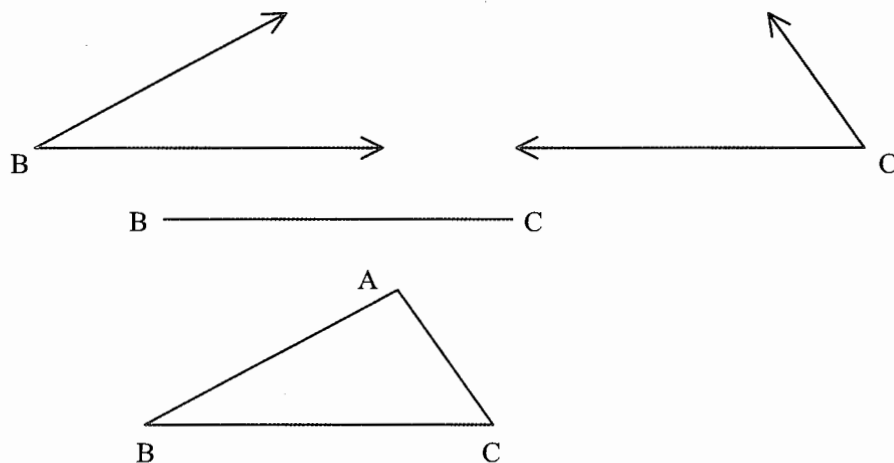
ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีด้านยาวเท่ากันสามคู่ ด้านต่อด้านแล้ว
รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้น จะเท่ากันทุกประการ



รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ มุม – ด้าน – มุม

พิจารณาการสร้างต่อไปนี้

กำหนดให้ กำหนดมุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC และความยาวของด้านซึ่งอยู่ระหว่างมุมทั้งสองนั้น

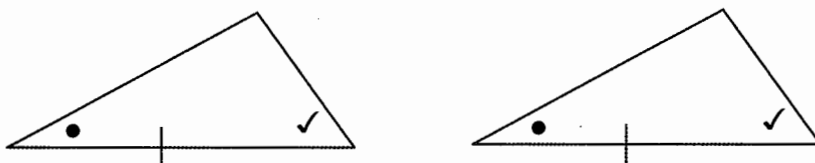


วิธีสร้าง

1. สร้างรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งบนกระดาษ ให้มีความยาวของด้านฐานเท่ากับ BC และสร้างมุมที่จุด B และมุมที่จุด C เท่ากับมุมที่กำหนดให้
2. ตัดรูปสามเหลี่ยมที่สร้าง แล้วนำไปซ้อนบนรูปสามเหลี่ยม ABC จะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้น เท่ากับรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกประการ

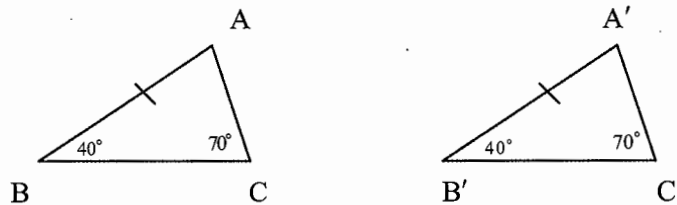
จากที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์แบบ มุม – ด้าน – มุม (ม. ค. ม.) ของรูปสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านซึ่งเป็นแขนร่วมของมุมทั้งสองที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันด้วยแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สัมพันธ์กันแบบ ด้าน – มุม – มุม

พิจารณาการสร้างรูปสามเหลี่ยมสองรูปต่อไปนี้



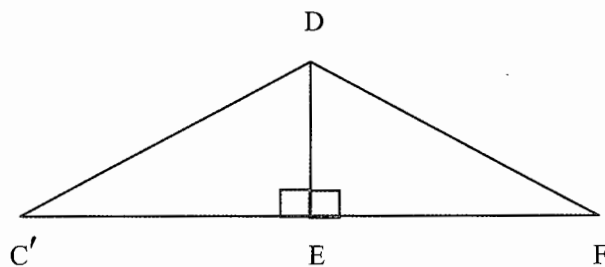
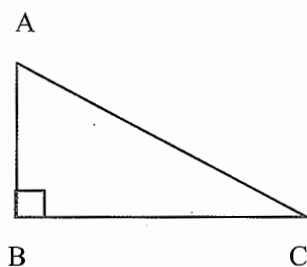
ยกรูปสามเหลี่ยม ABC ซ้อนรูปสามเหลี่ยม A'B'C' จะเห็นว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองทับกันสนิท แสดงว่า $\triangle ABC$ เท่ากับ $\triangle A'B'C'$ ทุกประการ

รูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม A'B'C' มีความสัมพันธ์แบบ ด้าน – มุม – มุม (ด. ม. ม.) และเท่ากันทุกประการ จะกล่าวได้ว่า

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และมีด้านในลำดับเดียวกันเท่ากัน ด้านหนึ่งแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นจะเท่ากันทุกประการ



รูปสามเหลี่ยมมุมฉากสองรูป มีด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากัน และด้านประกอบมุมฉากเท่ากันหนึ่งด้าน
รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป

$$\hat{A}BC = \hat{D}EF = 90^\circ$$

$$AC = DF \text{ และ } AB = DE$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

สร้าง

สร้าง $\triangle DEC'$ ให้เท่ากับ $\triangle ABC$

พิสูจน์

$$\text{เพราะว่า } \hat{A}BC = \hat{D}EF = 90^\circ$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{D}EC' = \hat{D}EF = 90^\circ$$

EF และ EC' อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน (เส้นตรงสองเส้นพบกันที่จุดจุดหนึ่ง ทำให้มุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก เส้นตรงสองเส้นเป็นเส้นตรงเดียวกัน)

$$\text{และใน } \triangle C'DF \quad DF = DC' \quad (DC' = AC)$$

$$\hat{D}C'E = \hat{D}FE \quad (\text{มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมเท่ากัน})$$

ในรูป $\triangle DEF$ และ $\triangle DEC'$

$$\hat{D}EF = \hat{D}EC' = 90^\circ$$

$$\hat{D}FE = \hat{D}C'E$$

DE เป็นด้านร่วม

} (พิสูจน์แล้ว)

$$\triangle DEF \cong \triangle DEC' \quad (\text{ค. ม. ม.})$$

$$\text{นั่นคือ } \triangle DEF \cong \triangle ABC$$

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ว่าด้วยเหตุผล เมื่อต้องการที่จะกล่าวถึงความเป็นจริงในเรื่องใดก็จะต้องให้เหตุผล การให้เหตุผลมีสองรูปแบบ ได้แก่ การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive reasoning) และการให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive reasoning or logical reasoning) เรขาคณิตมีการให้เหตุผลทั้งสองแบบดังกล่าวข้างต้น

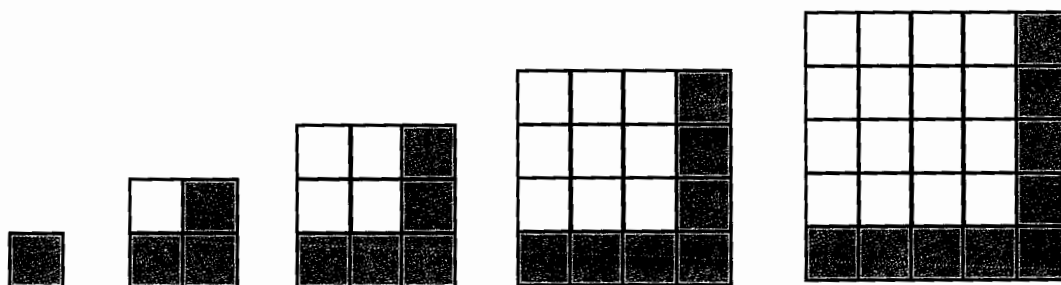
การให้เหตุผลแบบอุปนัย เป็นกระบวนการของการสังเกตข้อมูล พิจารณาแบบรูปแล้วสรุปเป็นนัยทั่วไปจากการสังเกตนั้น

การศึกษาเรขาคณิตเริ่มต้นมานานแล้วในอียิปต์และบาบิโลเนีย เรขาคณิตของคนในสมัยโบราณ เป็นการรวบรวมเกี่ยวกับการวัดและกระบวนการง่าย ๆ ซึ่งให้คำตอบที่ถูกต้องอย่างมีเหตุผล การวัดและกระบวนการเหล่านี้ ได้กระทำเรื่อยมาในเวลาอันยาวนานซึ่งเป็นผลมาจากประสบการณ์และการสังเกต เขาใช้การคำนวณหาพื้นที่และวางขอบเขตของท้องทุ่งที่จะทำการเกษตร หลังจากปีที่เกิดน้ำท่วมในลุ่มแม่น้ำไนล์ เขาสร้างคลองที่เก็บน้ำและพิระมิดที่ยิ่งใหญ่

การให้เหตุผลแบบอุปนัยไม่ใช่สำคัญเฉพาะกับเรขาคณิตเท่านั้น การสืบสวนทางวิทยาศาสตร์ส่วนใหญ่ รวมทั้งการสืบสอบทางคณิตศาสตร์ เริ่มต้นด้วยการให้เหตุผลแบบอุปนัยทั้งนั้น เมื่อนักคณิตศาสตร์ให้การให้เหตุผลแบบอุปนัย ข้อสรุปทั่วไปเรียกว่า ข้อความคาดการณ์ (Conjecture)

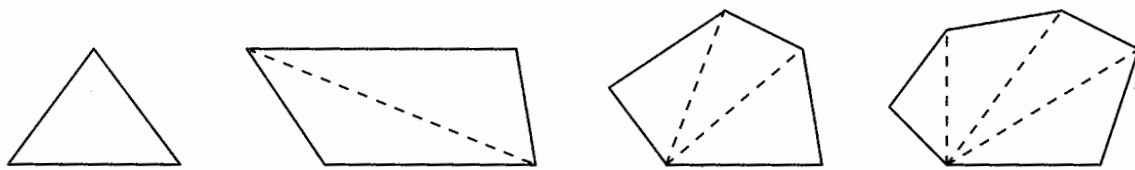
เพื่อให้เกิดความเข้าใจจะยกตัวอย่างที่เป็นเรขาคณิตดังนี้

ตัวอย่างที่ 1



ความยาวของด้านหนึ่งด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส	1	2	3	4	5	6	...	35	n
จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แรก	1	3	5	?	?	?	...	?	?
จำนวนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ไม่แรก	0	1	4	?	?	?	...	?	?

ตัวอย่างที่ 2 จำนวนของเส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุดหนึ่งในรูปหลายเหลี่ยม



จำนวนด้านของรูปเหลี่ยม	3	4	5	6	...	35	n
เส้นทแยงมุมจากจุดยอดจุด	?	?	?	?	...		?
จำนวนรูปสามเหลี่ยม	1	2	?	?	...		?

จากตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ดังกล่าวข้างต้น ถ้าใช้การสังเกตพิจารณาแบบรูปก็จะสามารถเติมช่องว่างได้ ซึ่งเป็นการให้เหตุผลแบบอุปนัย และสามารถสร้างข้อความคาดการณ์ได้

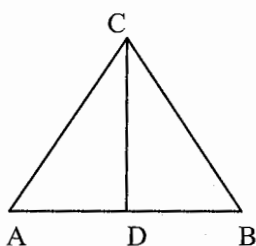
การให้เหตุผลแบบนิรนัย เป็นกระบวนการที่แสดงให้เห็นว่า ถ้ายอมรับว่าข้อความกลุ่มหนึ่งเป็นความจริงแล้ว ข้อความอื่นก็อาจจะแสดงให้เห็นจริงได้ โดยอ้างถึงข้อความที่เป็นจริงเหล่านั้น

จงใช้เหตุผลแบบนิรนัยแสดงให้เห็นว่า ข้อความคาดการณ์ต่อไปนี้เป็นความจริง

ตัวอย่างที่ 3

ข้อความคาดการณ์: เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ

สิ่งที่กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

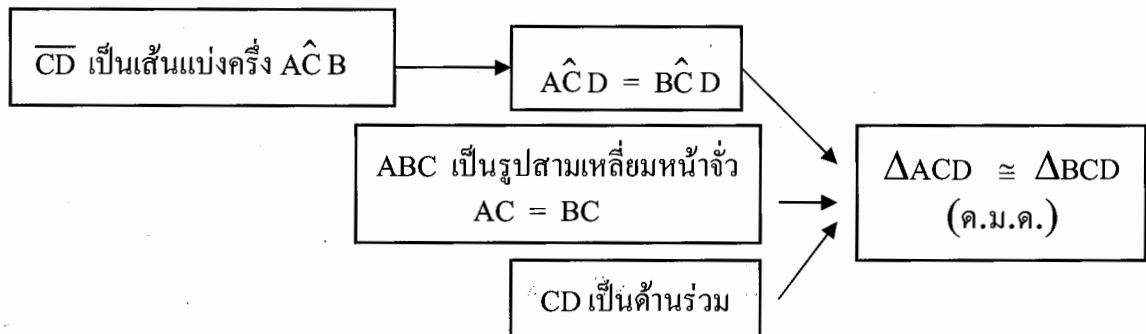


$\overline{CD}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $\angle ACB$

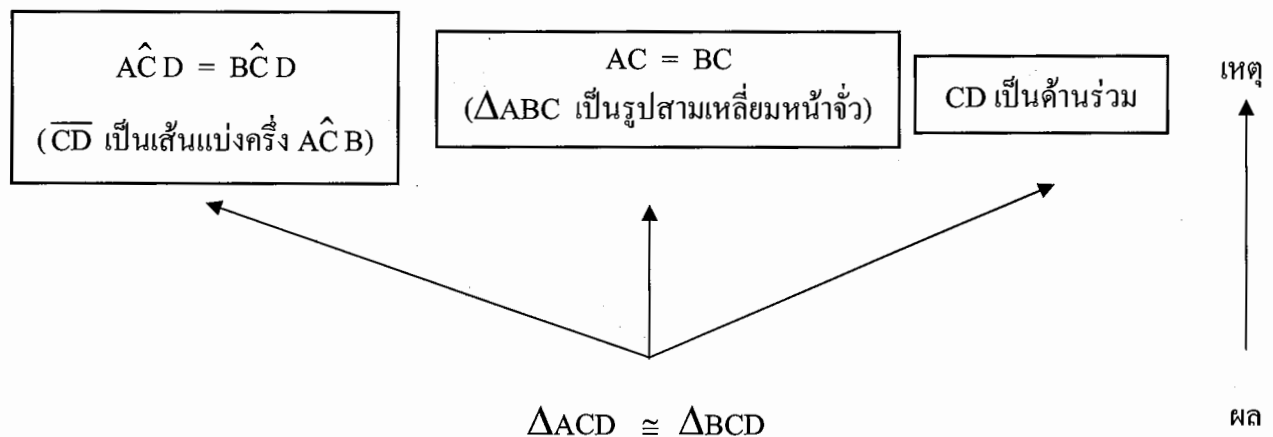
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD$$

พิสูจน์ วิธีที่ 1 โดยใช้แผนสายงาน (Flow chart)



พิสูจน์ วิธีที่ 2 วิเคราะห์แนวคิดจากผลไปสู่เหตุ แล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล



จากตัวอย่างที่ 3 การพิสูจน์วิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 เป็นการให้เหตุผลแบบนิรนัย เพราะต้องอ้างอิงความรู้เดิม นำมาสู่การพิสูจน์ความรู้ใหม่

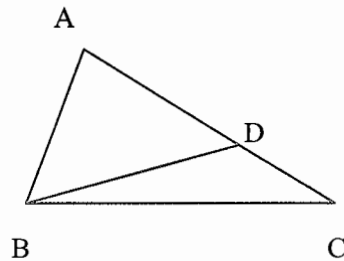
สำหรับการพิสูจน์วิธีที่ 2 เป็นการวิเคราะห์แนวคิด โดยจะถามย้อนจากผลไปสู่เหตุ แล้วเรียบเรียงการพิสูจน์จากเหตุไปสู่ผล ซึ่งจะเรียบเรียงการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์ ใน $\triangle ACD$ และ $\triangle BCD$

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle BCD & (\overline{CD} \text{ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง } \angle ACB) \\ AC = BC & (\triangle ABC \text{ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว}) \\ CD = CD & (\text{เป็นด้านร่วม}) \end{cases}$$

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD \quad (\text{ค.ม.ค.})$$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $\overline{AC}$ เป็นด้านที่ยาวที่สุดของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว
 $\hat{A}BC$ เป็นหรือไม่เป็นมุมที่มีขนาดโตที่สุดของรูปสามเหลี่ยม ABC



สิ่งที่กำหนดให้

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

สร้าง

พิสูจน์

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมี $\overline{AC}$ เป็นด้านที่ยาวที่สุด

$\hat{A}BC$ เป็นหรือไม่เป็นมุมที่มีขนาดโตที่สุดของ $\triangle ABC$

จาก $\overline{AC}$ ตัด $\overline{AD}$ ยาวเท่ากับ $\overline{AB}$ ลาก $\overline{BD}$

เพราะว่า $AB = AD$

เพราะฉะนั้น $\hat{A}BD = \hat{A}DB$ (มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมเท่ากัน)

เพราะว่า $\hat{A}DB$ เป็นมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม DBC

เพราะฉะนั้น $\hat{A}DB$ มีขนาดโตกว่ามุมภายในที่อยู่ตรงข้าม คือ $\hat{D}BC$ และ $\hat{D}CB$

ดังนั้น $\hat{A}BD$ มีขนาดโตกว่ามุม $\hat{D}BC$ หรือ $\hat{D}CB$

แต่ $\hat{A}BC = \hat{A}BD + \hat{D}BC$

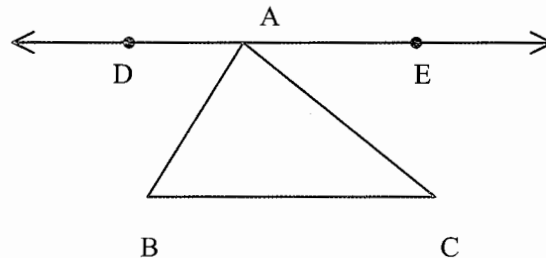
ดังนั้น $\hat{A}BC$ มีขนาดโตกว่า $\hat{A}CB$

ทำนองเดียวกัน $\hat{A}BC$ มีขนาดโตกว่า $\hat{B}AC$

นั่นก็คือ $\hat{A}BC$ ซึ่งอยู่ตรงข้าม $\overline{AC}$ ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดของ $\triangle ABC$

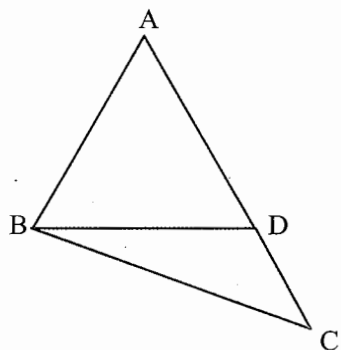
เป็นมุมที่มีขนาดโตที่สุด

ทฤษฎีบท มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา



สิ่งที่กำหนดให้	ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
สิ่งที่ต้องการพิสูจน์	$\hat{BAC} + \hat{ABC} + \hat{ACB} = 180^\circ$
สร้าง	ลากเส้นตรง DAE ให้ขนานกับ BC
พิสูจน์	$\hat{ABC} = \hat{DAB}$ (มุมแย้งเท่ากัน) $\hat{ACB} = \hat{EAC}$ (มุมแย้งเท่ากัน) $\hat{ABC} + \hat{BAC} + \hat{ACB} = \hat{DAB} + \hat{BAC} + \hat{EAC}$ $= 180^\circ$ (มุมตรงมีขนาด 180°)

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $\hat{ABC}$ เป็นมุมที่โตที่สุดในรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว ขนาดของ $\hat{ABC}$ จะมีขนาดโตกว่า 60 องศา



กำหนดให้	$\hat{ABC}$ เป็นมุมโตที่สุดของรูปสามเหลี่ยม ABC
สิ่งที่ต้องพิสูจน์	$\hat{ABC}$ มีขนาดโตกว่า 60 องศา
สร้าง	สร้าง รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABD ต่อ AD ออกไปทางจุด D ถึงจุด C ลากเส้น BC
พิสูจน์	$\hat{BAD} = \hat{ABD} = \hat{ADB} = 60^\circ$ (มุมของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า)

$\hat{A}DB$ มีขนาดโตกว่า $\hat{B}CD$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC

$$\hat{B}AC = 60^\circ \quad (\text{สร้าง})$$

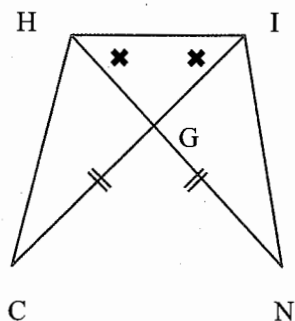
$\hat{B}CD$ หรือ $\hat{B}CA$ มีขนาดเล็กกว่า 60°

ดังนั้น $\hat{A}BC$ มีขนาดโตกว่า 60° (เพราะมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม
รวมกันเท่ากับ 180°)

จากตัวอย่างที่ 3 ตัวอย่างที่ 4 และตัวอย่างที่ 5 ซึ่งแสดงไว้เพียงเพื่อสนับสนุนการให้เหตุผลแบบนิรนัย
ที่นำมาใช้กับเรขาคณิต ว่าเป็นการนำข้อความกลุ่มหนึ่งที่เป็นความจริงแล้วมาอ้างอิง เพื่อจะพิสูจน์เรื่องใหม่ว่าเป็น
จริง ดังนั้นการที่จะพิสูจน์เรขาคณิตได้ จึงต้องอาศัยเรื่องต่างๆ ที่จะนำมาอ้างอิง เช่น สัจพจน์ ทฤษฎีบท
ต่างๆ และรู้จักนำมาใช้ให้เหมาะสม

แบบฝึกหัด 1.1

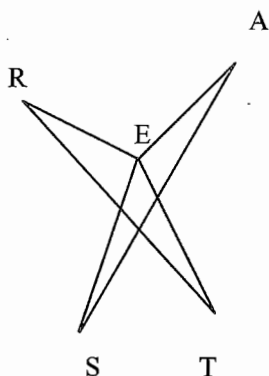
1.



จากรูป

- 1) $\angle HGI = \angle ING$ เพราะเหตุใด
- 2) $HG = IG$ เพราะเหตุใด
- 3) $\triangle CGH \cong \triangle NGI$ เพราะเหตุใด

2.



จากรูป

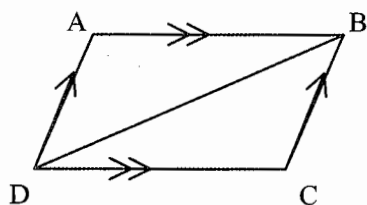
$$\angle RSE = \angle ATE$$

$$\angle RES = \angle AET$$

$$RE = AE$$

จึงพิสูจน์ว่า $RT = AS$

3.

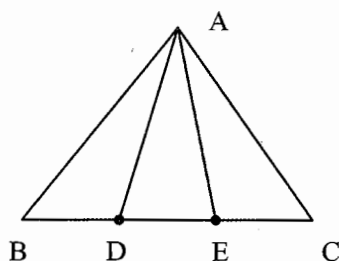


จากรูป

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABE \cong \triangle CDE$

4.



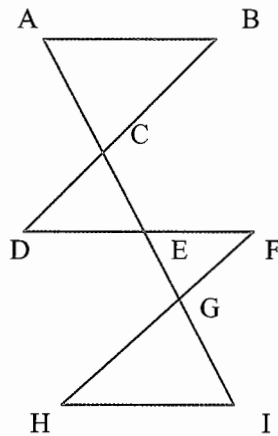
จากรูป

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$BE = DC$$

จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABE \cong \triangle ACD$

5.



จากรูป

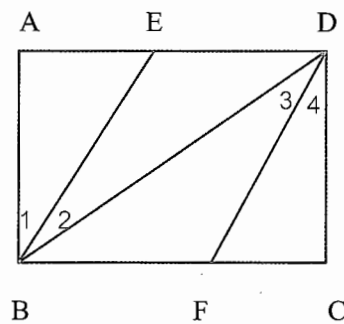
$$\hat{C}AB = \hat{G}IH$$

$$AB = HI$$

$$\hat{A}BC = \hat{I}HG$$

จงพิสูจน์ว่า $AC = GI$

6.



จากรูป

$$\hat{1} = \hat{4}$$

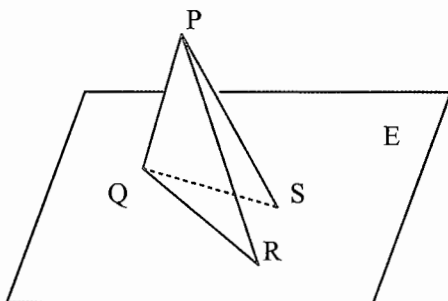
$$\hat{2} = \hat{3}$$

$$AB = DC$$

จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABE \cong \triangle CDF$

$$\triangle EBD \cong \triangle FDB$$

7.



จากรูป

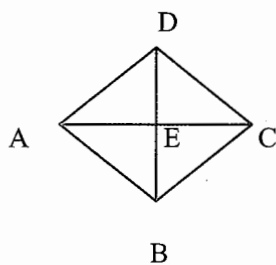
จุด Q, R และ S อยู่ในระนาบ E

$$PR = PS$$

$$\hat{R}PQ = \hat{S}PQ$$

จงพิสูจน์ว่า $\angle PQR = \angle PQS$

8.



จากรูป

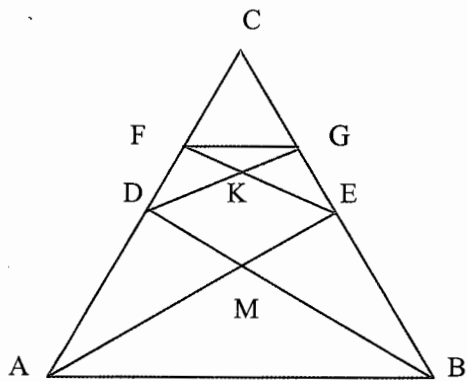
$$AB = DC = BC$$

$$\hat{D}CE = \hat{B}CE = \hat{B}AE$$

$$\text{และ } \hat{C}DE = \hat{A}BE$$

จงพิสูจน์ว่า $\triangle ABE \cong \triangle CBE$

9.



- จากรูป $\triangle CFG$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 $CD = CE$
 D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $\overline{BC}$
 ตามลำดับ
- จงพิสูจน์ว่า
1. $DK = EK$
 2. $\triangle AMB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เส้นขนาน

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นขนานกันก็ต่อเมื่อเส้นตรงสองเส้นนั้นอยู่บนระนาบเดียวกันและไม่ตัดกัน

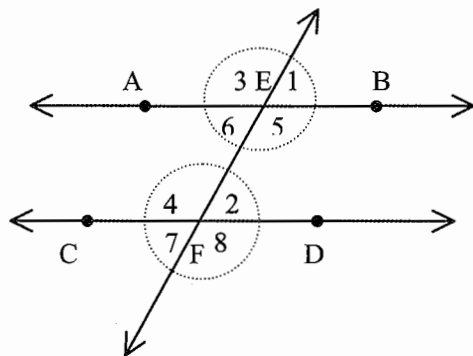
ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้าเส้นตรงคู่นี้ขนานกันแล้ว

- (ก) มุมแย้งเท่ากัน
- (ข) มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน
- (ค) มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก

ก่อนที่จะพิสูจน์ ขอกล่าวถึงสัจพจน์เพื่อนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์ดังนี้

เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นี้จะขนานกันก็ต่อเมื่อ ผลบวกของขนาดของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดเป็น 180 องศา

การพิสูจน์เรขาคณิต จะต้องรู้จักวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุ แล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล



กำหนดให้ (เหตุ)

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ (ผล)

จากรูป

กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด E และจุด F

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\hat{4} = \hat{5}$

$\hat{2} = \hat{6}$ (มุมแย้งเท่ากัน)

เมื่อจะพิสูจน์ จะวิเคราะห์จากผลสู่เหตุดังนี้

180° (มุมภายในข้างเดียวกันของเส้นตัด)

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \hat{2} + \hat{5} = \hat{6} + \hat{5} \\ \uparrow \qquad \uparrow \\ \hat{2} = \hat{6} \end{array}$$

180° (มุมประชิด)

เหตุ
↑
ผล

เมื่อวิเคราะห์ได้แล้ว ก็เรียบเรียงการพิสูจน์

พิสูจน์ $\hat{2} + \hat{5} = 180^\circ$ (มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกัน เท่ากับ 180 องศา)

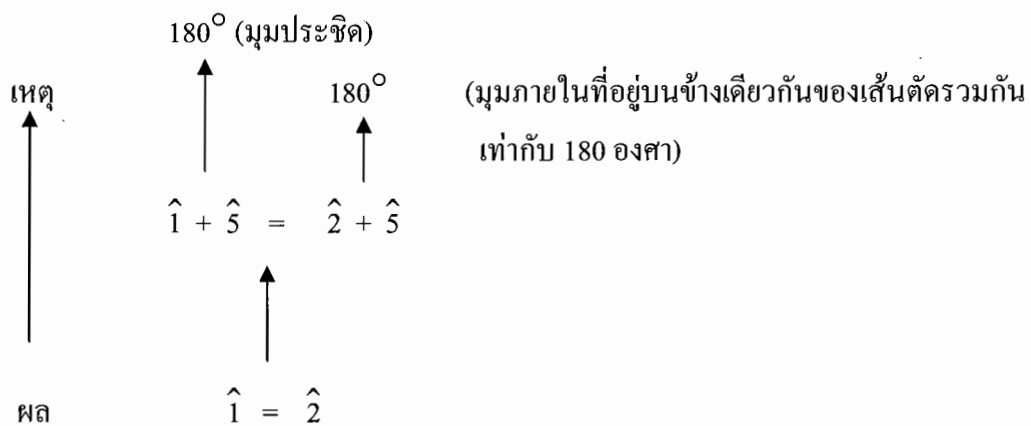
$\hat{6} + \hat{5} = 180^\circ$ (มุมประชิด)

ดังนั้น $\hat{2} = \hat{6}$

ทำนองเดียวกัน พิสูจน์ได้ว่า $\hat{4} = \hat{5}$

ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{2}$, $\hat{3} = \hat{4}$, $\hat{7} = \hat{6}$, $\hat{8} = \hat{5}$

จะวิเคราะห์ดังนี้



เรียบเรียงการพิสูจน์ได้ดังนี้

$\hat{1} + \hat{5} = 180^\circ$ (มุมประชิด)

$\hat{2} + \hat{5} = 180^\circ$ (มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

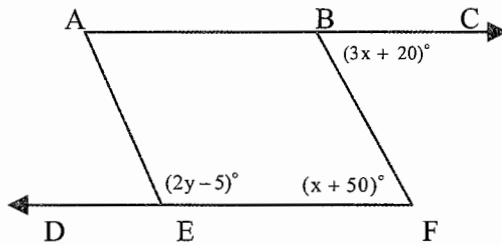
จะได้ $\hat{1} + \hat{5} = \hat{2} + \hat{5}$

นั่นคือ $\hat{1} = \hat{2}$

ทำนองเดียวกัน พิสูจน์ได้ว่า $\hat{3} = \hat{4}$, $\hat{7} = \hat{6}$ และ $\hat{8} = \hat{5}$

แบบฝึกหัด 1.2

1.



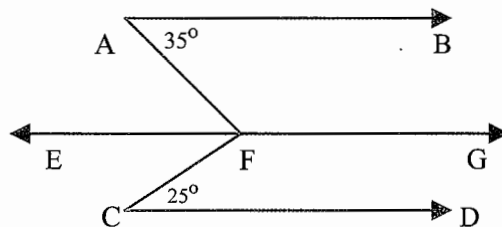
$$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{FD}$$

$$\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BF}$$

x มีขนาดกี่องศา

y มีขนาดกี่องศา

2.

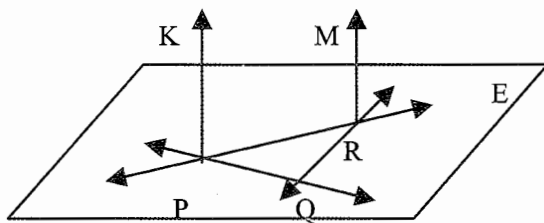


$$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EG}$$

$$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$$

AFC มีขนาดกี่องศา

3.



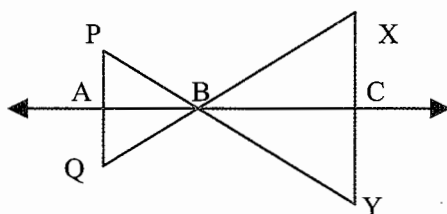
จากรูป

จุด P จุด Q และจุด R ไม่อยู่ในแนวเดียวกัน
ต่างก็อยู่ในระนาบ E

$$\overleftrightarrow{PK} \perp E \text{ และ } \overleftrightarrow{RM} \perp E$$

จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{PK} \parallel \overleftrightarrow{RM}$

4.

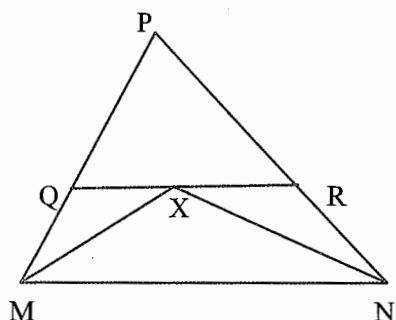
จากรูป จุด A จุด B และจุด C อยู่ในแนว
เดียวกัน

$$AP = AQ \quad BP = BQ$$

$$BX = BY \text{ และ } CX = CY$$

จงพิสูจน์ว่า $\overline{PQ} \parallel \overline{XY}$

5.



จากรูป ในรูป $\triangle PMN$

$\overline{MX}$ แบ่งครึ่ง $\angle P\hat{M}N$

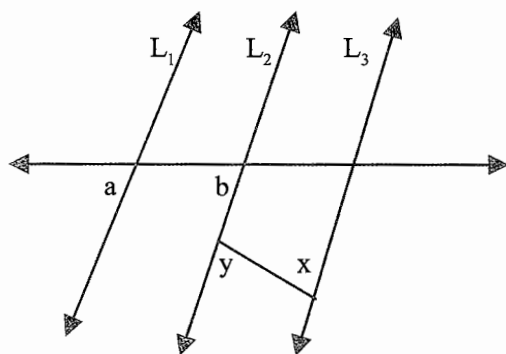
$\overline{NX}$ แบ่งครึ่ง $\angle M\hat{N}P$

$\overline{QR} \parallel \overline{MN}$

จงพิสูจน์ว่า $\triangle QMX$ และ $\triangle RXN$

เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

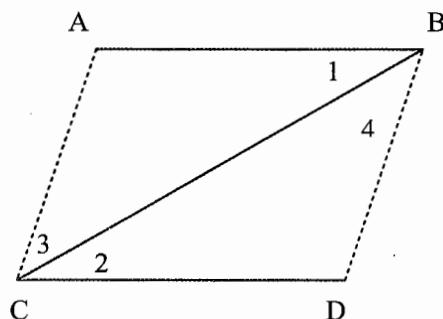
6.



จากรูป $\hat{x} = \hat{y}$ และ $\hat{a} = \hat{b}$

จงพิสูจน์ว่า $L_1 \parallel L_3$

ทฤษฎีบท เส้นตรงคู่หนึ่งซึ่งเชื่อมหัวท้ายของเส้นขนานที่ยาวเท่ากัน จะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AC = BD$
และ $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

พิสูจน์ ใน $\triangle ACB$ และ $\triangle BCD$

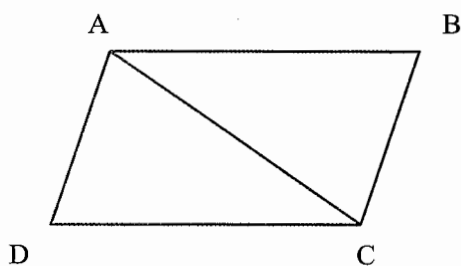
$$\left. \begin{array}{l} \hat{1} = \hat{2} \\ \hat{3} = \hat{4} \end{array} \right\} \text{มุมแย้ง}$$

BC เป็นด้านร่วม

$$\triangle ACB \cong \triangle BCD$$

ดังนั้น $AC = BD$ และ $\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{BD}$

ทฤษฎีบท ด้านและมุมที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

- (1) $AD = BC$
 $AB = DC$
- (2) $\hat{A}BC = \hat{A}DC$
 $\hat{B}AD = \hat{B}CD$

พิสูจน์

ลากเส้นทแยงมุม AC

ในรูป $\triangle ABC$ และ $\triangle ACD$

$$\hat{B}AC = \hat{A}CD \quad (\text{มุมแย้ง})$$

$$\hat{A}CB = \hat{C}AD \quad (\text{มุมแย้ง})$$

AC เป็นด้านร่วม

$$\triangle ABC \cong \triangle ACD$$

$$\text{ดังนั้น } AD = BC$$

$$AB = DC$$

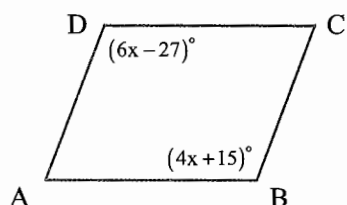
$$\hat{A}BC = \hat{A}DC$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าลากเส้นทแยงมุม BD

$$\text{จะได้ } \hat{B}AD = \hat{B}CD$$

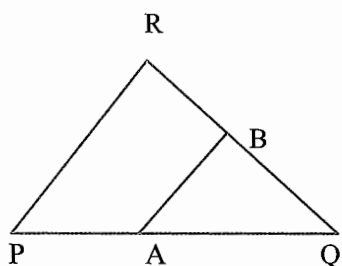
แบบฝึกหัด 1.3

1.



จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
จงหาขนาดของมุมทั้งสี่

2.

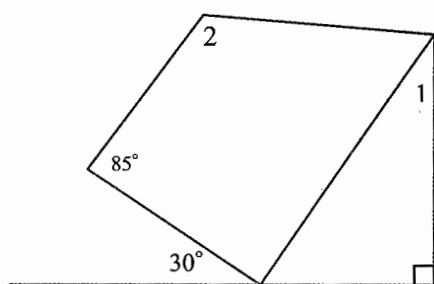


จากรูป A และ B เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{PQ}$
และ $\overline{RQ}$ ตามลำดับ

$$\text{ถ้า } RP = 16 \quad \hat{P} = 58^\circ \quad \hat{Q} = 38^\circ$$

จงหาความยาวของ $\overline{AB}$
และขนาดของ $\angle ABR$

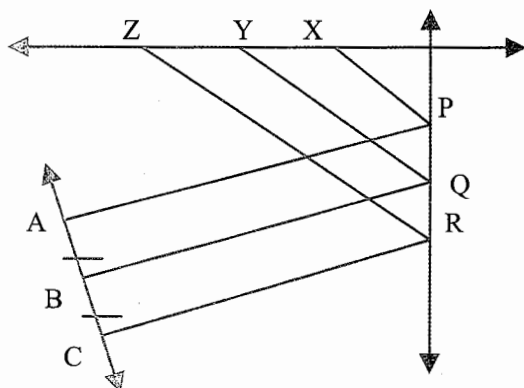
3.



จากรูป $\hat{1}$ และ $\hat{2}$ มีขนาดเท่าใด

4. ถ้าเส้นตรงตั้งแต่สามเส้นขึ้นไปขนานกัน มีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัด ทำให้ส่วนตัดเท่ากัน
จงพิสูจน์ว่า ถ้าลากเส้นตรงเส้นอื่น ตัดผ่านเส้นตรงที่ขนานกันนี้ เส้นตรงเส้นนี้จะมีส่วนตัดเท่ากันด้วย

5.

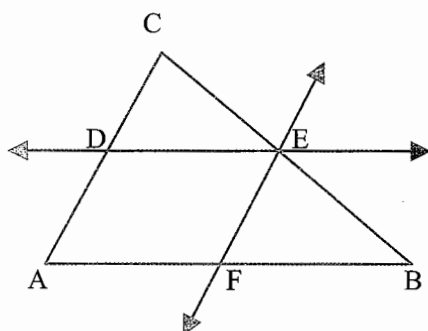


จากรูป $AB = BC$
 $\overline{AP} \parallel \overline{BQ} \parallel \overline{CR}$

$\overline{PX} \parallel \overline{QY} \parallel \overline{RZ}$

จงพิสูจน์ว่า $XY = YZ$

6.



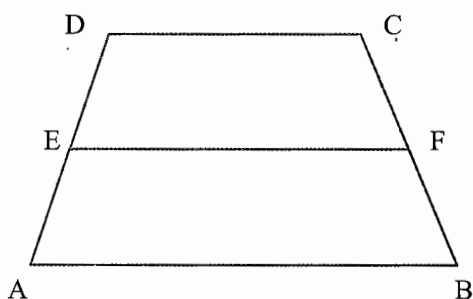
จากรูป $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

$\overline{EF} \parallel \overline{CA}$

D เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

จงพิสูจน์ว่า $\triangle CDE \cong \triangle EFB$

7.



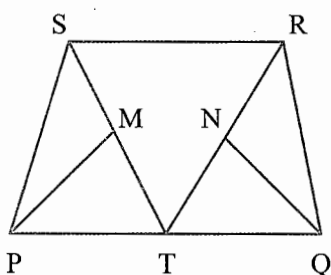
จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

จุด E และจุด F เป็นจุดกึ่งกลางของ DA และ

CB ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า $EF = \frac{1}{2}(DC + AB)$

8.



จากรูป กำหนดให้ $\hat{TPM} = \hat{TQN}$

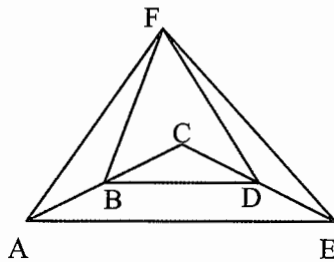
และ $\hat{PTM} = \hat{QTN}$

M, N และ T เป็นจุดกึ่งกลางของ ST

RT และ PQ ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า SRT เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

9.



จากรูป

$$AF = EF \text{ และ } AC = EC$$

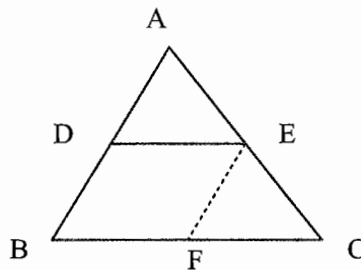
$$\angle AFB = \angle EFD$$

จงพิสูจน์ว่า $\triangle BDF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

10. จงแสดงว่าเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมรูปนั้น ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสี่รูปที่เท่ากันทุกประการ
11. $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด O จงแสดงว่า $\overline{AC}$ และ $\overline{BD}$ จะขนานกัน
12. จงพิสูจน์ว่า เส้นที่ลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านคู่ขนานของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู จะขนานกับด้านคู่ขนาน และมีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน
13. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน F และ G เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$ และ $\overline{AD}$ ตามลำดับ

$$\overline{EF} \perp \overline{BD} \text{ และ } \overline{GH} \perp \overline{BD}$$
 จงพิสูจน์ว่า $EF = GH$
14. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ E, F, G และ H เป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ ถ้าลากเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลาง จงพิสูจน์ว่า รูปสี่เหลี่ยมที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
15. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังฐาน จะถูกแบ่งครึ่งโดยเส้นตรงอีกเส้นหนึ่ง ซึ่งลากเชื่อมจุดกึ่งกลางของอีกสองด้านที่เหลือ
16. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน X และ Y เป็นจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม AD และ BC
 จงแสดงว่า $\overline{BX}$ และ $\overline{DY}$ แบ่งเส้นทแยงมุม AC ออกเป็นสามส่วนเท่ากัน

ทฤษฎีบท ถ้าลากเส้นจากจุดกึ่งกลางของด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมให้ขนานกับฐาน เส้นตรงเส้นนั้นจะแบ่งครึ่งด้านที่เหลือ



จากรูป D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

ลาก $DE \parallel BC$ ตัด AC ที่จุด E

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

พิสูจน์ ลาก $\overline{EF} \parallel \overline{DB}$

เนื่องจาก $DE \parallel BC$ (โจทย์)

ดังนั้น $\angle ADE = \angle DB C$ (มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัด)

เนื่องจาก $DB \parallel EF$

เพราะฉะนั้น $\angle EFC = \angle DB F$

ดังนั้น $\angle EFC = \angle ADE$

และ $\angle DAE = \angle FEC$ ($\overline{AB} \parallel \overline{EF}$)

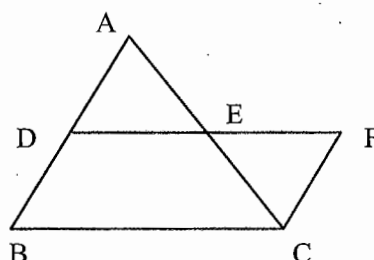
$AD = EF$ ($AD = DB, DB = EF$)

$\triangle ADE \cong \triangle EFC$ (ม. ค. ม.)

$AE = EC$

นั่นคือ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

ทฤษฎีบท ถ้าลากเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ส่วนของเส้นตรงนั้นจะขนานกับด้านที่สาม และมีความยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของด้านที่สาม



จากรูป จุด D และจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของ AB และ AC

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

$$DE = \frac{1}{2} BC$$

พิสูจน์

ต่อ DE ไปทางจุด E ถึงจุด F

ให้ $EF = DE$

ในรูป $\triangle ADE$ และ $\triangle CEF$

$$AE = EC \quad (\text{โจทย์})$$

$$DE = EF \quad (\text{สร้าง})$$

$$\hat{A}ED = \hat{C}EF \quad (\text{มุมตรงข้าม})$$

$$\triangle ADE \cong \triangle CEF \quad (\text{ค. ม. ค.})$$

$$\hat{D}AE = \hat{E}CF \quad \text{และเป็นมุมแย้ง}$$

$$\text{ดังนั้น } \overline{AD} \parallel \overline{FC} \quad \text{และ } AD = FC$$

$$\text{หรือ } \overline{DB} \parallel \overline{FC} \quad \text{และ } DB = FC$$

ดังนั้น $DF = BC$ และ $DF \parallel BC$ (เส้นตรงที่ต่อหัวท้ายของเส้นตรงที่ขนานกัน
และยาวเท่ากัน จะขนานกันและยาวเท่ากันด้วย)

$$\text{แต่ } DE = \frac{1}{2} DF$$

$$\text{ดังนั้น } DE = \frac{1}{2} BC \quad \text{และ } \overline{DE} \parallel \overline{BC}$$

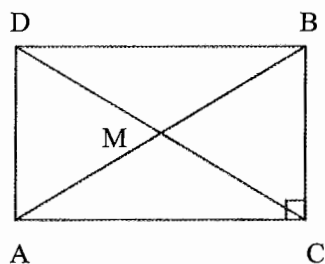
แบบฝึกหัด 1.4

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้าลากเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม จะแบ่งรูปสามเหลี่ยมนั้นออกเป็นสี่รูปซึ่งเท่ากันทุกประการ
2. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงใด ๆ ซึ่งลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังฐานจะถูกแบ่งครึ่ง โดยเส้นซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านอีกสองด้าน
3. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด X และจุด Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AD และ BC
จงแสดงว่า BX และ DY แบ่ง AC ออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน
4. จงพิสูจน์ว่า ถ้าเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านประชิดของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ รูปที่เกิดขึ้นจะเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
5. จงพิสูจน์ว่า เส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามของรูปสี่ด้าน จะแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ความคล้าย

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

เส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากไปยังจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามมุมฉาก จะมีความยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านตรงข้ามมุมฉาก



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก
M เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

สร้าง รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABD และต่อเส้นทแยงมุม CM ไปยังจุด D

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ CM เป็นครึ่งหนึ่งของ AB

พิสูจน์ จากรูป ACBD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ดังนั้น $AB = CD$ (เส้นทแยงมุมยาวเท่ากัน)

และ $CM = BM$ (เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน)

แต่ $BM = \frac{1}{2} AB$

นั่นคือ $CM = \frac{1}{2} AB$

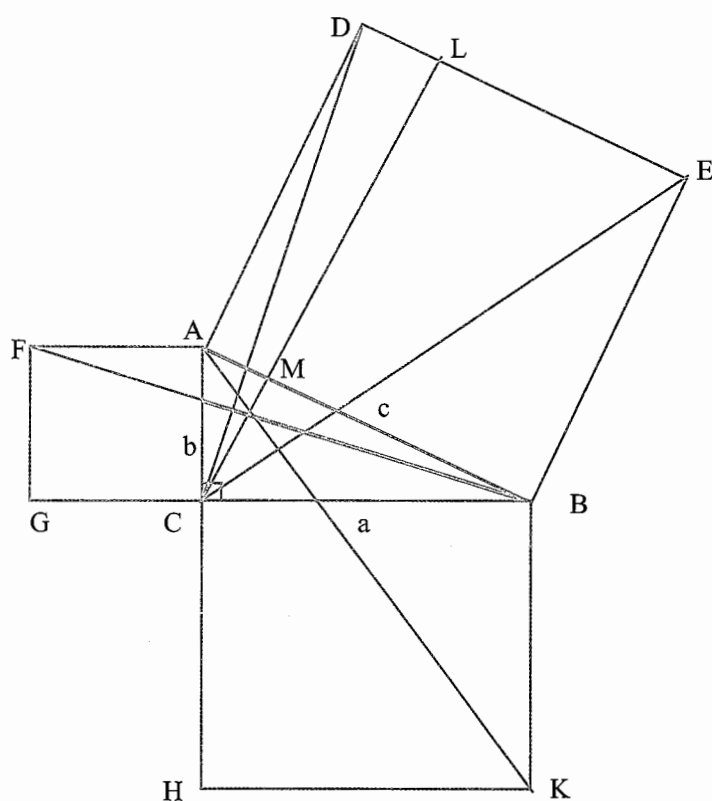
แบบฝึกหัด 2.1

1. ถ้ามุมแหลมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีขนาด 30° แล้ว ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมนั้น จะยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านตรงข้ามมุมฉาก
2. ถ้าด้าน ๆ หนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้านตรงข้ามมุมฉาก มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านนั้นจะมีขนาด 30°

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส

ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉาก

มีวิธีพิสูจน์ทฤษฎีบทของพีทาโกรัสหลายวิธี ในที่นี้จะแสดงถึงวิธีเพื่อฝึกการวิเคราะห์แนวคิดวิเคราะห์แนวคิด (1)



$2 \triangle ABK$

$2 \triangle AFB$

$2 \triangle ADC + 2 \triangle BCE$

$\square ADLM + \square MLEB$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

จากการวิเคราะห์แนวคิด (1) เรียบเรียงการพิสูจน์ได้ดังนี้

พิสูจน์

$$\left. \begin{array}{l} \text{พื้นที่ } \square CBKH \text{ หรือ } a^2 = 2 \Delta ABK \\ \text{พื้นที่ } \square AFGC \text{ หรือ } b^2 = 2 \Delta AFB \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยมเท่ากับครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม} \\ \text{ซึ่งตั้งอยู่บนฐานเดียวกัน ส่วนสูงเท่ากัน} \end{array}$$

$$\text{พื้นที่ } \square ADLM + \text{พื้นที่ } \square MLEB = 2 \Delta ADC + 2 \Delta BCE$$

$$\text{พื้นที่ } \square ABED \text{ เท่ากับ } c^2 = 2 \Delta ADC + 2 \Delta BCE$$

$$\text{แต่ } 2 \Delta ADC = 2 \Delta AFB \quad **$$

$$\text{และ } 2 \Delta BCE = 2 \Delta ABK$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ } \square ABED \text{ เท่ากับ } c^2 &= 2 \Delta ABK + 2 \Delta AFB \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

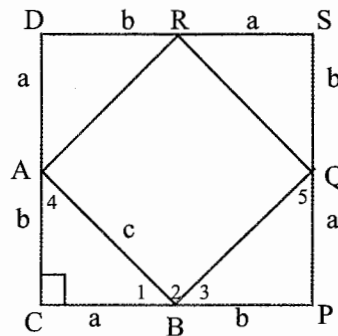
$$** \left\{ \begin{array}{l} AD = AB \\ AC = AF \\ \angle DAC = \angle FAB \end{array} \right.$$

$$\Delta ADC \cong \Delta AFB$$

ทำนองเดียวกัน

$$\Delta BCE \cong \Delta ABK$$

วิเคราะห์แนวคิด (2)



ABQR เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



ด้าน $AB = BQ$



$$\hat{2} = 90^\circ$$



$$\hat{3} + \hat{1} = 90^\circ$$

$$\hat{4} + \hat{1} = 90^\circ$$

$$\hat{4} = \hat{3}$$

จากผลที่รูปสามเหลี่ยมเหมือนกัน $\hat{1} = \hat{5}$



$$\triangle ABC \cong \triangle BPQ \text{ (ด.ม.ด.)}$$



ต้องพิสูจน์ว่าด้านเท่าและมุมเป็นมุมฉาก



$$\text{พื้นที่ } \boxed{\text{จ}} \text{ DCPS} = \text{พื้นที่ } \boxed{\text{จ}} \text{ ABQR} + \text{พื้นที่ } \triangle \text{สี่รูป}$$

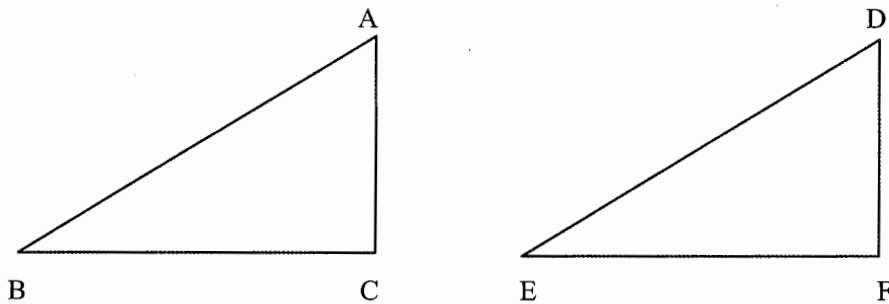
$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{1}{2}ab\right)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



บทกลับ ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ถ้าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากแล้ว รูปสามเหลี่ยมรูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



สิ่งที่กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

สร้าง สร้าง $\triangle DEF$ ให้ $EF = BC$ $DF = AC$ และ $DF \perp EF$

พิสูจน์ $\therefore EF = BC$ (สร้าง)

$$\therefore EF^2 = BC^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

และ $DF = AC$

$$\therefore DF^2 = AC^2 \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) + (2) \quad EF^2 + DF^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\text{แต่ } BC^2 + AC^2 = AB^2$$

$$\text{และ } EF^2 + DF^2 = DE^2 \quad (\text{ทฤษฎีบทพีทาโกรัส})$$

$$\text{จะได้ว่า } AB^2 = DE^2$$

$$AB = DE$$

ใน $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$

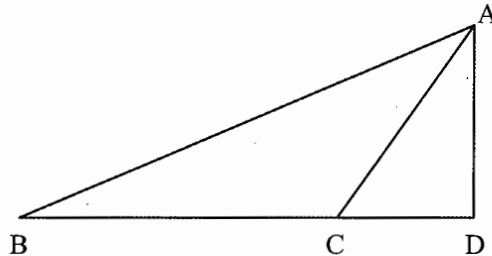
$$\begin{cases} AC = DF & (\text{สร้าง}) \\ BC = EF \\ AB = DE \end{cases}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{ACB} = \hat{DFE} \quad \text{แต่ } \hat{DFE} = 90^\circ \quad (\text{สร้าง})$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{ACB} = 90^\circ$$

ทฤษฎีบท ในรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมป้านเท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านที่ประกอบมุมป้านกับสองเท่าของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยด้านหนึ่งด้านใดในสองด้านนี้กับภาพฉาย (projection) ของอีกด้านหนึ่ง



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้านรูปหนึ่ง

$\hat{A}CB$ เป็นมุมป้าน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC \cdot CD$

พิสูจน์

$$\therefore BD = BC + CD$$

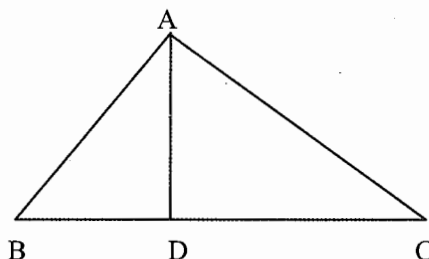
$$BD^2 = BC^2 + CD^2 + 2BC \cdot CD$$

นำ DA^2 บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$(BD^2 + DA^2) = BC^2 + (CD^2 + DA^2) + 2BC \cdot CD$$

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 + 2BC \cdot CD$$

ทฤษฎีบท ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมแหลมเท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านที่ประกอบมุมแหลมลบด้วยสองเท่าของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ที่ประกอบด้วยด้านหนึ่งด้านใดในสองด้านนี้กับภาพฉายของอีกด้านหนึ่ง



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมรูปหนึ่ง

$\hat{A}CB$ เป็นมุมแหลม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CD$$

พิสูจน์

$$\because BD = BC - CD$$

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD$$

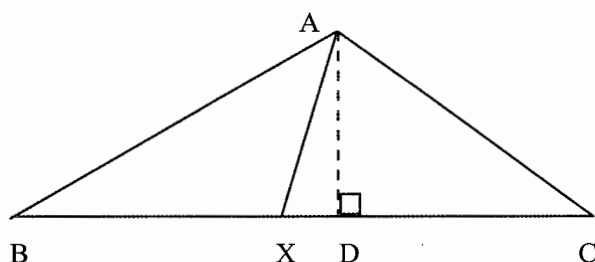
นำ DA^2 บวกเข้าทั้งสองข้าง

$$(BD^2 + DA^2) = BC^2 + (CD^2 + DA^2) - 2BC \cdot CD$$

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CD$$

ทฤษฎีบท

ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านสองด้านเท่ากับสองเท่าของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนครึ่งหนึ่งของด้านที่สามรวมกับสองเท่าของจัตุรัสบนเส้นมัธยฐาน



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

AX เป็นเส้นมัธยฐาน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$AB^2 + AC^2 = 2BX^2 + 2AX^2$$

พิสูจน์

ลาก $AD \perp BC$

$\triangle AXB$ จะเป็นมุมป้าน

$\triangle AXC$ จะเป็นมุมแหลม

ในรูปสามเหลี่ยม

$$AB^2 = BX^2 + AX^2 + 2BX \cdot XD \quad \dots\dots\dots(1)$$

ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม AXC

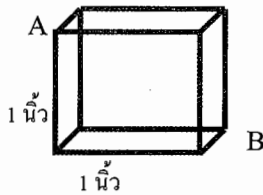
$$\begin{aligned} AC^2 &= XC^2 + AX^2 + 2XC \cdot XD \\ &= BX^2 + AX^2 - 2BX \cdot XD \quad \dots\dots\dots(2) \quad (\because BX = XC) \end{aligned}$$

$$(1) + (2) \quad AB^2 + AC^2 = 2BX^2 + 2AX^2$$

5.

จากรูป

จงหาความยาวของเส้นทแยงมุม AB



6. เชือกผูกที่ยอดเขาสูง 6 เมตร นายประยงค์ อยู่ห่างจากเสาระยะหนึ่ง สังเกตว่า ความยาวของเชือกจากยอดเสาถึงพื้นเท่ากับ 10 เมตร ถ้านายประยงค์เคลื่อนออกจากเสาไปอีก 4 เมตร เชือกจะต้องยาวเท่าไร จึงจะแตะพื้นที่เขายืนอยู่พอดี
7. ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่ง แล้วใช้เชือกยาว 600 เมตร โยนถึงเรือ A พอดี และใช้เชือกยาว 360 เมตร โยนถึงเรือ B ได้พอดี ถ้าเรือ B อยู่ห่างจากหน้าผา 180 เมตร อยากทราบว่า เรือสองลำจอดห่างกันประมาณเท่าไร
8. กระจกหน้าต่างกว้าง 2.3 เมตร ประตูกว้าง 0.9 เมตร ประตูจะต้องสูงเท่าไร จึงจะเอากะจกสอดประตูไปได้
9. หีบใบหนึ่งมีขนาด $4 \times 4 \times 3$ ฟุต จะนำเอาคันเบ็ดตกปลาซึ่งยาว 6 ฟุต มาใส่ในหีบอย่างไร จึงจะลงได้พอดี
10. เสาโทรทัศน์สูง 16 เมตร ตั้งอยู่ที่มุมหนึ่งของสนามรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก กว้าง 80 เมตร ยาว 120 เมตร
 - (1) จงหาระยะจากโคนเสาถึงจุดปลายของเส้นทแยงมุมที่อยู่ตรงข้าม
 - (2) จงหาระยะจากยอดเสาถึงจุดปลายของเส้นทแยงมุมที่อยู่ตรงข้าม

ความคล้าย (similarity)

ก่อนที่จะกล่าวถึงเรื่องความคล้าย จะขอกล่าวถึงเรื่องสัดส่วนเพื่อนำไปใช้ต่อไป
อัตราส่วนสองจำนวนที่เท่ากัน เรียกว่า สัดส่วน

$$\text{เช่น} \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

สมบัติของสัดส่วนที่ควรทราบ

1. ถ้า a, b, c เป็นสัดส่วนกัน

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{หรือ} \quad a : b = b : c \quad \text{เรียก } b \text{ ว่าเป็นสัดส่วนตัวกลางระหว่าง } a \text{ และ } b$$

2. อัตราส่วนสองจำนวนที่เท่ากับอัตราส่วนเดียวกัน จะเท่าซึ่งกันและกันด้วย

$$\text{ถ้า } a : b = x : y \quad \text{และ} \quad c : d = x : y \quad \text{แล้ว} \quad a : b = c : d$$

3. ถ้า $a : x = b : x$ แล้ว $a = b$

4. ถ้า $a : b = x : y$ หรือ $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ แล้ว

$$\frac{b}{a} = \frac{y}{x} \quad (\text{Invertendo})$$

5. ถ้า $a : b = x : y$ หรือ $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ แล้ว

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} \quad (\text{Alternando})$$

6. ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ แล้ว $ad = bc$

7. ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ แล้ว

$$\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y} \quad (\text{componendo})$$

$$\text{และ} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{x-y}{y} \quad (\text{dividendo})$$

8. ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ แล้ว

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{x+y}{x-y} \quad (\text{compo et dividendo})$$

$$9. \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \dots$$

$$\frac{a}{x} = \frac{a+b+c+\dots}{x+y+z+\dots}$$

ถ้าให้แต่ละอัตราส่วนเท่ากับ k

$$\frac{a}{x} = k \quad a = kx$$

$$\frac{b}{y} = k \quad b = ky$$

$$\frac{c}{z} = k \quad c = kz$$

$$a+b+c \dots = k(x+y+z+\dots)$$

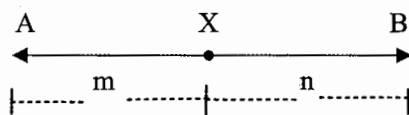
$$\frac{a+b+c+\dots}{x+y+z+\dots} = k$$

$$= \frac{a}{x}$$

หรือ $\frac{a}{x} = \frac{a+b+c+\dots}{x+y+z+\dots}$

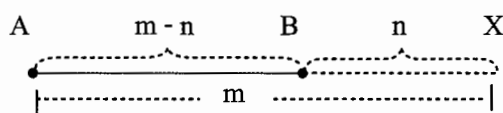
10. ส่วนของเส้นตรงถูกแบ่งออกภายใน หรือภายนอกตามอัตราส่วนที่กำหนดให้ได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น

แบ่งภายใน



$$AX : XB = m : n$$

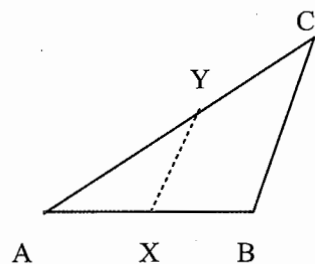
แบ่งภายนอก



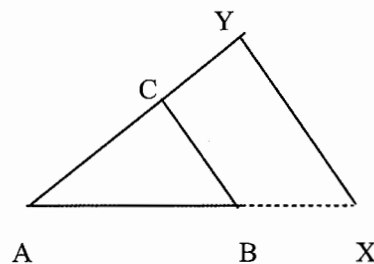
$$\frac{AX}{XB} = \frac{m}{n}$$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสัดส่วน

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากขนานกับด้านด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยม จะแบ่งด้านที่เหลือออกเป็นสัดส่วนกัน



รูป 1



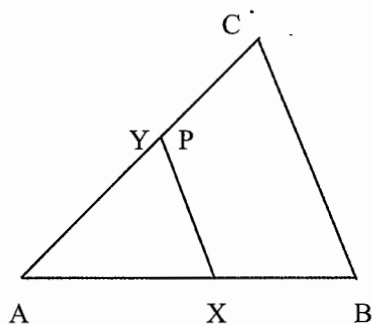
รูป 2

กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
ลาก $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$ ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ภายในที่จุด X (รูป 1)
ตัดภายนอกที่จุด X (รูป 2)

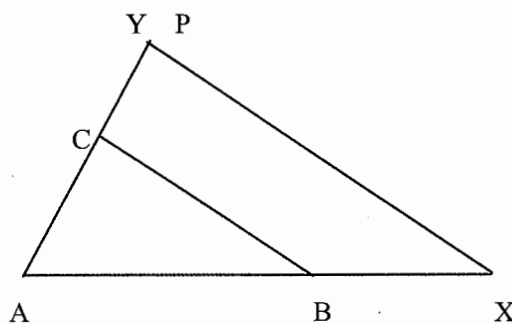
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX : XB = AY : YC$

พิสูจน์ สมมติให้ X แบ่ง $\overline{AB}$ ในอัตราส่วน $m : n$
ดังนั้น $AX : XB = m : n$
ถ้า $\overline{AX}$ ถูกแบ่งออกเป็น m ส่วนเท่า ๆ กัน
 $\overline{XB}$ ถูกแบ่งออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน
จากจุดแบ่งทั้งหลาย ใน $\overline{AX}$ และ $\overline{XB}$ ลากเส้นขนาน BC
เส้นขนานเหล่านี้ จะแบ่ง $\overline{AY}$ และ $\overline{YC}$ เป็นส่วน ๆ เท่า ๆ กัน
 $\overline{AY}$ จะถูกแบ่งออกเป็น m ส่วนเท่า ๆ กัน
 $\overline{YC}$ จะถูกแบ่งออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน
ดังนั้น $AY : YC = m : n$
นั่นคือ $AX : XB = AY : YC$

บทกลับ ถ้าส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งออกเป็นสัดส่วนกันแล้ว ส่วนของเส้นตรงนั้นจะขนานกับด้านที่สาม



รูป 1



รูป 2

กำหนดให้ $\overline{XY}$ ตัด $\overline{AB}$ และตัด $\overline{AC}$ ออกเป็นสัดส่วนกัน

$$AX : XB = AY : YC$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

พิสูจน์ ให้ $\overline{XP}$ ลากขนานกับ $\overline{BC}$ พบ $\overline{AC}$ ที่จุด P

$$AP : PC = AX : XB$$

แต่ $AY : YC = AX : XB$ (ตามทฤษฎีบทข้างต้น)

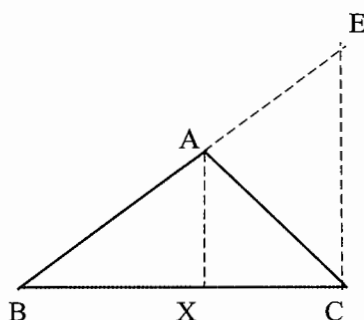
ดังนั้น $\overline{AC}$ ถูกแบ่งภายใน (ดังรูป 1) และถูกแบ่งภายนอก (ดังรูป 2)

ในอัตราส่วนเดียวกันที่จุด P และจุด Y

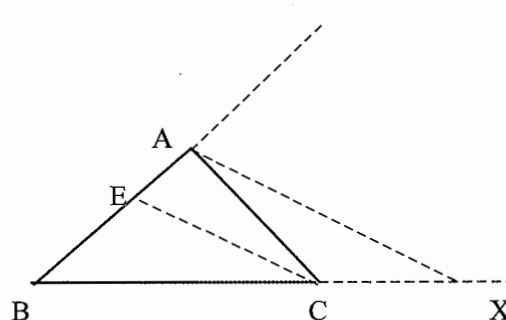
ดังนั้น จุด P ทับจุด Y $\overline{XP}$ ทับ $\overline{XY}$ (ส่วนของเส้นตรงถูกแบ่งภายใน หรือภายนอกได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น)

นั่นคือ $\overline{XY} \parallel \overline{BC}$

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากแบ่งครึ่งมุมภายในหรือมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยม ที่ลากมาพบฐานภายในหรือภายนอก จะแบ่งฐานออกเป็นอัตราส่วนที่เท่ากับอัตราส่วนของด้านที่เหลืออีกสองด้าน



รูป 1



รูป 2

กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหนึ่ง ลากเส้นแบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$ พบ BC ที่จุด X

ต้องการพิสูจน์ $\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC}$

สร้าง ลาก $\overline{CE} \parallel \overline{XA}$ พบ $\overline{BA}$ ที่ต่อออกไปที่จุด E

พิสูจน์ ในรูป $\triangle BEC$

$$\overline{CE} \parallel \overline{XA} \quad (\text{สร้าง})$$

$$\widehat{BAX} = \widehat{AEC} \quad (\text{มุมภายนอกเท่ากับมุมภายใน ที่อยู่ตรงข้ามข้างเดียวกันของเส้นตัด})$$

$$\text{และ } \widehat{XAC} = \widehat{ACE} \quad (\text{มุมแย้ง})$$

$$\text{แต่ } \widehat{BAX} = \widehat{XAC} \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\therefore \widehat{AEC} = \widehat{ACE}$$

$$AE = AC$$

ในรูป $\triangle BEC$

$$BX : XC = AB : AE$$

$$\text{ดังนั้น } BX : XC = AB : AC \quad (AE = AC)$$

บทกลับ แบ่ง $\overline{BC}$ ภายใน (ดังรูป 1) หรือแบ่งภายนอก (ดังรูป 2) ที่จุด X

$$\text{ทำให้ } BX : XC = BA : AC \text{ แล้ว } \widehat{BAX} = \widehat{XAC}$$

พิสูจน์ ใน $\triangle BCE$

$$\overline{XA} \parallel \overline{CE}$$

$$BX : XC = BA : AE$$

$$\text{แต่ } BX : XC = BA : AC$$

$$\therefore BA : AC = BA : AE$$

$$AC = AE$$

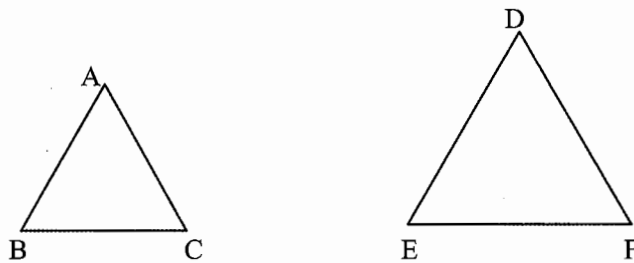
$$\therefore \widehat{ACE} = \widehat{AEC} = \widehat{XAC}$$

$$\widehat{BAX} = \widehat{AEC}$$

$$\therefore \widehat{BAX} = \widehat{XAC}$$

รูปสามเหลี่ยมคล้าย

รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันสามคู่ เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน



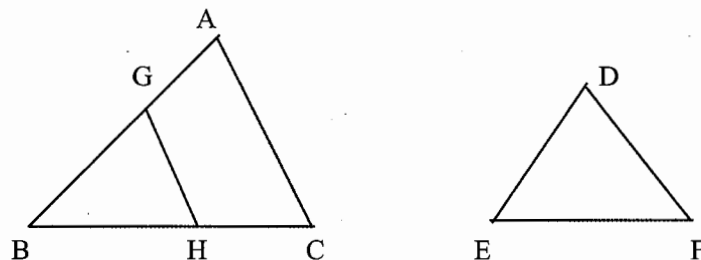
$$\hat{A} = \hat{D} \quad \hat{B} = \hat{E} \quad \hat{C} = \hat{F}$$

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน แทนด้วย $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

รูปสามเหลี่ยมคล้ายสองรูป มีด้านที่สมนัยกัน (corresponding side) เป็นสัดส่วนกัน

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมสามมุมเท่ากัน มุมต่อมุมด้านที่สมนัยกันเป็นสัดส่วนกัน



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย

$$\hat{A} = \hat{D}, \quad \hat{B} = \hat{E} \quad \text{และ} \quad \hat{C} = \hat{F}$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AB : DE = BC : EF = CA : FD$

พิสูจน์ ยก $\triangle DEF$ ซ้อน $\triangle ABC$ ให้จุด E ทับจุด B

ด้าน EF ทาบตามด้าน BC

ให้จุด G และจุด H แทนจุด D และจุด F ตามลำดับ

ดังนั้น $\triangle BGH$ แทน $\triangle DEF$

เนื่องจาก $\hat{D} = \hat{A}$ (กำหนดให้)

$$\hat{B}GH = \hat{B}AC$$

$$\overline{GH} \parallel \overline{AC}$$

$$\therefore BA : BG = BC : BH$$

$$\text{นั่นคือ } AB : DE = BC : EF$$

ในทำนองเดียวกัน ยก $\triangle DEF$ ซ้อน $\triangle ABC$

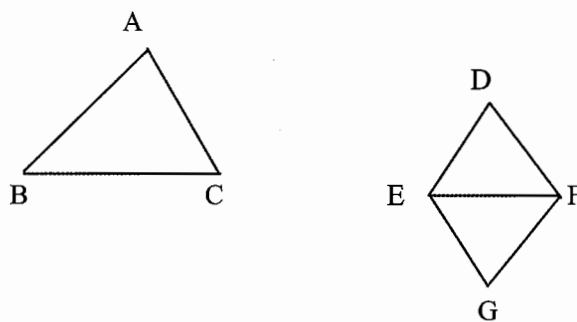
ให้จุด F ทับจุด C, FE และ FD ทาบด้าน CB และ CA

$$\text{จะได้ว่า } BC : EF = CA : FD$$

$$\text{ดังนั้น } AB : DE = BC : EF = CA : FD$$

ทฤษฎีบท

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีด้านที่สมนัยกันเป็นสัดส่วนกัน รูปสามเหลี่ยมคู่นั้นจะมีมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านที่สมนัยกัน เท่ากันมุมต่อมุม



กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป

$$AB : DE = BC : EF = CA : FD$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มีมุมเท่ากัน 3 มุม มุมต่อมุม

สร้าง บนฐาน EF สร้าง $\triangle EGF$ ให้มีมุมสามมุมเท่ากับ $\triangle ABC$

พิสูจน์ $\triangle ABC$ และ $\triangle GEF$ มีมุมเท่ากันสามมุม มุมต่อมุม

$$AB : GE = BC : EF$$

$$AB : DE = BC : EF \text{ (กำหนดให้)}$$

$$AB : GE = AB : DE$$

$$GE = DE$$

ทำนองเดียวกัน $GF = DF$

ใน $\triangle GEF$ และ $\triangle DEF$

$$\begin{cases} GE = DE \\ GF = DF \\ EF \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\triangle GEF \cong \triangle DEF$$

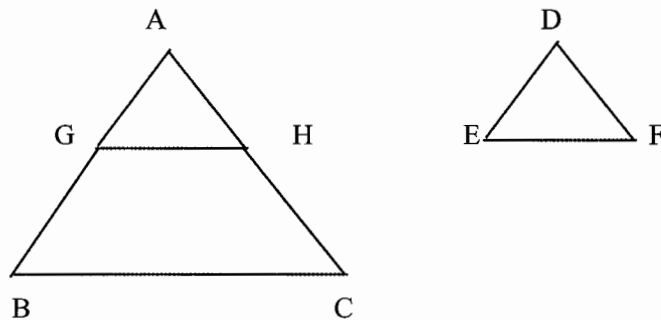
$$\begin{aligned} \hat{D}EF &= \hat{G}EF \\ &= \hat{A}BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{D}FE &= \hat{G}FE \\ &= \hat{A}CB \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{E}DF = \hat{B}AC$$

$\triangle DEF$ และ $\triangle ABC$ มีมุมเท่ากันสามมุม มุมต่อมุม

ทฤษฎีบท รูปสามเหลี่ยมสองรูป มีมุมมุมหนึ่งเท่ากัน และด้านประกอบมุมเท่าเป็นส่วนสัดส่วนกันแล้ว รูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกัน



กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป $\hat{B}AC = \hat{E}DF$

$$AB : DE = AC : DF$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

พิสูจน์ ยก $\triangle DEF$ ซ้อน $\triangle ABC$ ให้จุด D ทับจุด A

และด้าน DE ทาบตามด้าน AB

$$\therefore \hat{E}DF = \hat{B}AC \quad DF \text{ ทาบตาม } AC$$

ให้จุด G และจุด H เป็นจุดซึ่งจุด E และจุด F ทับด้านทั้งสอง

$\triangle AGH$ แทน $\triangle DEF$

$$AB : DE = AC : DF \quad (\text{กำหนดให้})$$

$$\text{ดังนั้น } AB : AG = AC : AH$$

$$\overline{GH} \parallel \overline{BC}$$

$$\widehat{AGH} \text{ (แทน } \widehat{DEF}) = \widehat{ABC}$$

$$\widehat{AHG} \text{ (แทน } \widehat{DFE}) = \widehat{ACB}$$

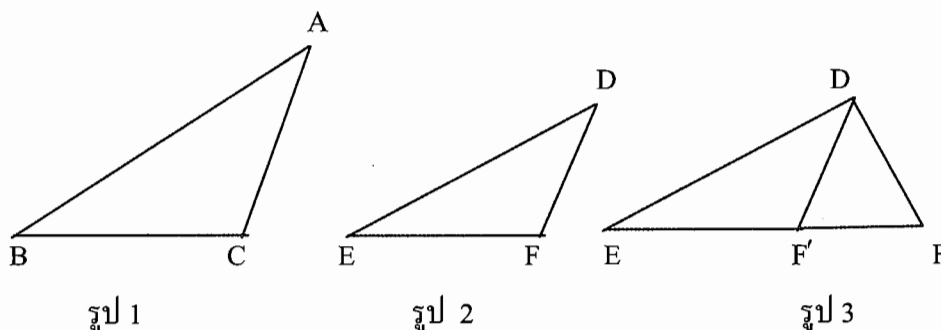
$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มีมุมเท่ากัน มุมต่อมุม

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

ทฤษฎีบท

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันมุมหนึ่ง และด้านที่ประกอบมุมอีกมุมหนึ่งที่สมนัยกัน เป็นสัดส่วนกันแล้วมุมที่สามจะเท่ากันหรือเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก ในกรณีแรกรูปสามเหลี่ยมจะคล้ายกัน



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป โดยที่ $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$

ด้านที่ประกอบ $\widehat{BAC}$ และ $\widehat{EDF}$ เป็นสัดส่วนกัน

นั่นคือ $AB : DE = AC : DF$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$ (รูป 1 และรูป 2) และ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\widehat{ACB} + \widehat{DF'F} = 180^\circ \text{ (รูป 1 และรูป 3)}$$

พิสูจน์

1) ถ้า $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$ (รูป 1 และรูป 2)

$\therefore \widehat{ACB} = \widehat{DFE}$ (มุมภายในของรูปสามเหลี่ยม รวมกันเข้าเท่ากับสองมุมฉาก)

ดังนั้น $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มีมุมเท่ากันสามมุม มุมต่อมุม

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

2) ถ้า $\hat{BAC}$ ไม่เท่ากับ $\hat{EDF}$ (รูป 1 และรูป 3)

$$\text{ให้ } \hat{EDF}' = \hat{BAC}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF'$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF'}$$

จากโจทย์ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

$$\therefore \frac{AC}{DF'} = \frac{AC}{DF}$$

$$DF' = DF$$

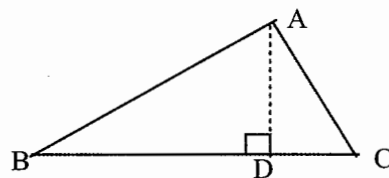
$$\hat{D}'F'F = \hat{DF}F'$$

แต่ $\hat{ACB} = \hat{DF}E$ (พิสูจน์แล้ว)

ดังนั้น $\hat{ACB}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ $\hat{DF}F'$

นั่นคือ $\hat{ACB}$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉากของ $\hat{D}'F'F$

ทฤษฎีบท ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดยอดไปตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉาก รูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นทั้งสองรูปจะคล้ายกัน และคล้ายกับรูปเดิมด้วย



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ลาก $\overline{AD} \perp \overline{BC}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\triangle ABD \sim \triangle ADC \sim \triangle ABC$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD$ และ $\triangle ABC$

$$\begin{cases} \hat{ADB} = \hat{BAC} = 90^\circ \\ \hat{ABD} = \hat{ABC} \text{ มุมร่วม} \\ \hat{BAD} = \hat{ACB} \text{ (มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก)} \end{cases}$$

$$\triangle ABD \sim \triangle ABC$$

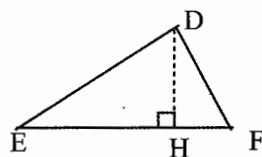
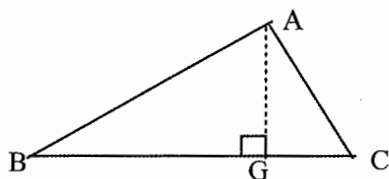
ทำนองเดียวกัน

$$\triangle ACD \sim \triangle ABC$$

$$\text{ดังนั้น } \triangle ABD \sim \triangle ACD \sim \triangle ABC$$

ทฤษฎีบท

รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมหนึ่งเท่ากันแล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคู่นี้จะเป็นสัดส่วนกับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยด้านสองด้านที่ประกอบมุมเท่ากัน



กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป

$$\hat{A} \hat{B} C = \hat{D} \hat{E} F$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์
$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} = \frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF}$$

พิสูจน์
$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AG}{\frac{1}{2} EF \cdot DH} \dots\dots\dots(1)$$

ใน $\triangle ABG$ และ $\triangle DEH$

$$\hat{A} \hat{B} G = \hat{D} \hat{E} H$$

$$\hat{A} \hat{G} B = \hat{D} \hat{H} E = 90^\circ$$

$$\hat{B} \hat{A} G = \hat{E} \hat{D} H \quad (\text{มุมภายในรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าเท่ากับ } 180^\circ)$$

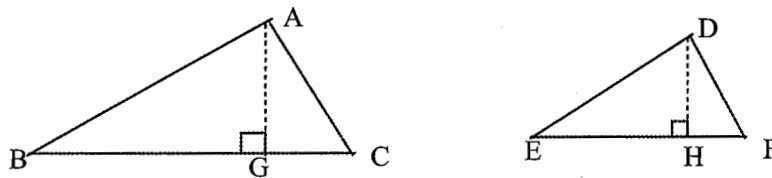
$$\triangle ABG \sim \triangle DEH$$

$$\frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE} \dots\dots\dots(2)$$

แทนค่า $\frac{AG}{DH}$ ใน (1)

$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC}{\frac{1}{2} DE \cdot EF} = \frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF}$$

ทฤษฎีบท พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายเป็นสัดส่วนกับจตุรัสซึ่งตั้งอยู่บนด้านที่สมนัยกัน



กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกัน
BC และ EF เป็นด้านที่สมนัยกัน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} = \frac{BC^2}{EF^2}$

พิสูจน์
$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AG}{\frac{1}{2} EF \cdot DH} = \frac{BC \cdot AG}{EF \cdot DH} \dots\dots\dots(1)$$

ใน $\triangle ABG$, $\triangle DEH$

$$\hat{A}BG = \hat{D}EH \quad (\triangle ABC \sim \triangle DEF)$$

$$\hat{A}GB = \hat{D}HE = 90^\circ$$

$$\hat{B}AG = \hat{E}DH$$

$$\triangle ABG \sim \triangle DEH$$

$$\frac{AG}{DH} = \frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EH} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{แต่ } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \quad (\triangle ABC \sim \triangle DEF)$$

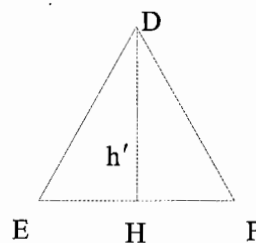
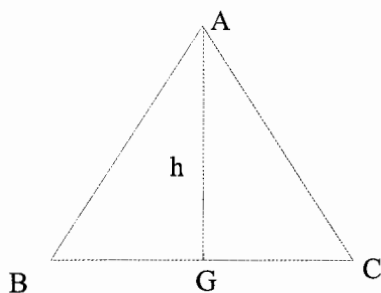
$$\text{ดังนั้น } \frac{AG}{DH} = \frac{BC}{EF}$$

แทนค่า $\frac{AG}{DH}$ ใน (1)

$$\begin{aligned}\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} &= \frac{\frac{1}{2} BC \cdot BC}{\frac{1}{2} EF \cdot EF} \\ &= \frac{BC^2}{EF^2}\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท

ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมหนึ่งเท่ากันแล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองจะเป็นสัดส่วน กับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบมุมเท่ากัน



กำหนดให้ ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป

$$\hat{A} \hat{B} C = \hat{D} \hat{E} F$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ พื้นที่ $\triangle ABC : \text{พื้นที่ } \triangle DEF = AB \cdot BC : DE \cdot EF$

สร้าง

ลาก AG และ DH ตั้งฉากกับด้าน BC และ EF ตามลำดับ

ให้ความยาวเป็น h และ h'

พิสูจน์
$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot h}{\frac{1}{2} EF \cdot h'} = \frac{BC \cdot h}{EF \cdot h'} \dots\dots\dots(1)$$

ใน $\triangle ABG$ และ $\triangle DEH$

$$\hat{A} \hat{B} G = \hat{D} \hat{E} H, \quad \hat{A} \hat{G} B = \hat{D} \hat{H} E$$

$$\therefore \hat{B} \hat{A} G = \hat{E} \hat{D} H$$

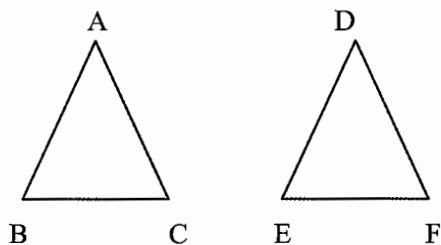
$$\triangle ABG \sim \triangle DEH$$

$$\frac{h}{h'} = \frac{AB}{DE} \dots\dots\dots(2)$$

แทนค่า h และ h' ใน (1)

$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle DEF} = \frac{BC \cdot AB}{EF \cdot DE}$$

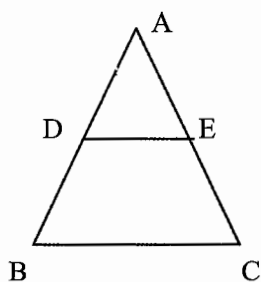
หมายเหตุ รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่เท่ากันทุกประการ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย แต่รูปสามเหลี่ยมคล้าย ไม่จำเป็นต้องเท่ากันทุกประการ



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

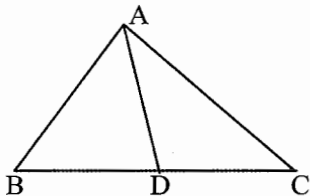


$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

แบบฝึกหัด 2.3

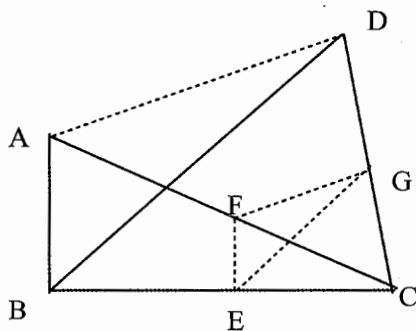
1.



จากรูป ใน $\triangle ABC$ ถ้า $\overline{AD}$ แบ่งครึ่ง $\angle B\hat{A}C$
 D เป็นจุดจุดหนึ่งบน $\overline{BC}$

จงพิสูจน์ว่า $\frac{BD}{DC} = \frac{BA}{CA}$

2.



จากรูป ABC และ DBC เป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูป
 ซึ่งตั้งบนฐาน BC

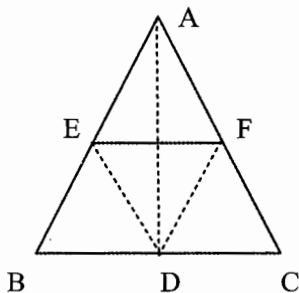
E เป็นจุดจุดหนึ่งบน BC

ลาก $\overline{EF} \parallel \overline{BA}$ พบ $\overline{AC}$ ที่จุด F

ลาก $\overline{EG} \parallel \overline{BD}$ พบ $\overline{CD}$ ที่จุด G

จงพิสูจน์ว่า $\overline{FG} \parallel \overline{AD}$

3.



จากรูป AD เป็นมัธยฐาน $\overline{DE}$ แบ่งครึ่ง $\angle A\hat{D}B$

$\overline{DF}$ แบ่งครึ่ง $\angle A\hat{D}B$

จงพิสูจน์ว่า $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$

4. AB และ CD เป็นเส้นขนาน E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{CD}$ $\overline{AC}$ และ $\overline{BE}$ พบกันที่จุด F
 $\overline{AE}$ และ $\overline{BD}$ พบกันที่จุด G จงแสดงว่า $\overline{FG}$ ขนานกับ $\overline{AB}$

5. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จากจุด D ลากเส้นตัด $\overline{AB}$ ที่จุด E และตัด $\overline{CB}$ ซึ่งต่อออกไป
 ที่จุด F

i จงบอกชื่อรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันสามรูป

ii จงพิสูจน์

$$DA : AE = FB : BE = FC : CD$$

6. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จุด P และ จุด Q อยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับ AB

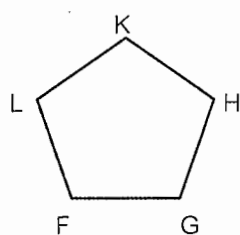
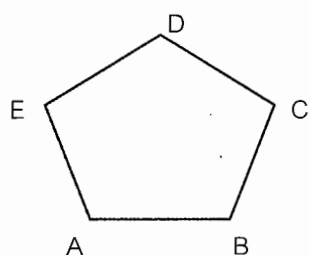
$\overline{PA}$ และ $\overline{QB}$ พบกันที่จุด R $\overline{PD}$ และ $\overline{QC}$ พบกันที่จุด S

จงพิสูจน์ว่า $\overline{RS}$ ขนานกับ $\overline{AD}$

7. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ยาวด้านละ a หน่วย ต่อด้าน BC ออกไปทั้งสองข้าง ถึงจุด P และจุด Q ทำให้ $BP = CQ = a$ ลาก $\overline{AP}$ และ $\overline{AQ}$ จงพิสูจน์ว่า
- i $PQ : PA = PA : PB$
 - ii $PA^2 = 3a^2$
8. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{A}$ เป็นมุมฉาก ลาก AC' ตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉาก $C'A'$ ลากขนานกับ CA ถ้า $AC = 15$ เซนติเมตร $AB = 20$ เซนติเมตร
จงแสดงว่า $AC' = 12$ เซนติเมตร และ $C'A' = 9.6$ เซนติเมตร

รูปหลายเหลี่ยมคล้าย

รูปหลายเหลี่ยมสองรูปที่มีมุมเท่ากันทุกคู่ เรียกว่า รูปหลายเหลี่ยมคล้าย



$$\hat{A} = \hat{F}$$

$$\hat{B} = \hat{G}$$

$$\hat{C} = \hat{H}$$

$$\hat{D} = \hat{K}$$

$$\hat{E} = \hat{L}$$

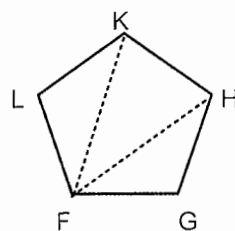
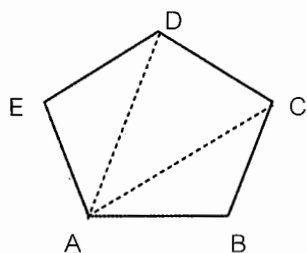
$$\text{Pentagon } ABCDE \sim \text{Pentagon } FGHLK$$

ถ้ารูปหลายเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านที่สมนัยกันจะเท่ากัน

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH} = \frac{CD}{HK} = \frac{DE}{KL} = \frac{EP}{LF}$$

ทฤษฎีบท

รูปหลายเหลี่ยมคล้ายแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้จำนวนเท่ากัน และเส้นเชื่อมจุดยอดที่สมนัยกัน (corresponding vertices) จะเป็นสัดส่วนกันด้วย



กำหนดให้

ABCDE และ FGHLK เป็นรูปหลายเหลี่ยมคล้าย

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$i \quad \triangle ABC \sim \triangle FGH$$

$$\triangle ADC \sim \triangle FKH$$

$$\triangle AED \sim \triangle FLK$$

$$ii \quad \frac{AB}{FG} = \frac{AC}{FH} = \frac{AD}{FK}$$

พิสูจน์

รูปหลายเหลี่ยม ABCDE และรูปหลายเหลี่ยม FGHLK คล้ายกัน

$$\hat{A}BC = \hat{E}GH$$

$$\frac{AB}{FG} = \frac{BC}{GH}$$

$\triangle ABC \sim \triangle FGH$ ($\triangle$ สองรูปมีมุมเท่ากันหนึ่งมุม ด้านที่ประกอบมุมเท่าเป็นสัดส่วนกัน $\triangle$ สองรูปคล้ายกัน)

$$\frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} \dots\dots\dots(1)$$

$$\hat{B}CA = \hat{G}HF$$

$$\hat{D}CB - \hat{B}CA = \hat{K}HG - \hat{G}HF \quad (\hat{D}CB = \hat{K}HG)$$

$$\hat{A}CD = \hat{F}HK$$

$$\frac{AC}{FH} = \frac{CD}{HK} \dots\dots\dots(2)$$

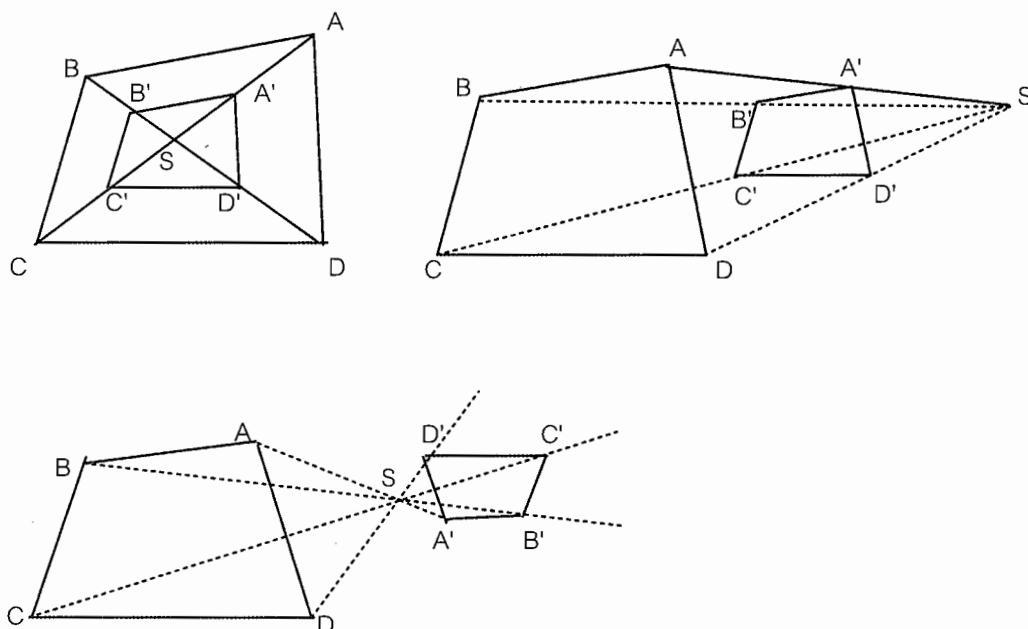
$$(1) = (2)$$

$$\frac{AC}{FH} = \frac{BC}{GH} = \frac{CD}{HK}$$

$$\triangle ACD \sim \triangle FHK$$

ทำนองเดียวกัน $\triangle ADE \sim \triangle FKL$

ทฤษฎีบท เส้นเชื่อมจุดยอดของรูปเหลี่ยมที่คล้ายกันสองรูป จะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง



กำหนดให้ $ABCD$ และ $A'B'C'D'$
เป็นรูปเหลี่ยมที่คล้ายสองรูป
โดยด้านทั้งสี่ขนานกัน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

เมื่อด้านทั้งสี่ขนานกัน AA' , BB' , CC' และ DD'
จะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง

สร้าง ลาก AA' และแบ่งภายนอกที่จุด S ให้ $SA : SA' = AB : A'B'$

พิสูจน์ ใน $\triangle SAB$ และ $\triangle SA'B'$

$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$$

$$\therefore \hat{SAB} = \hat{SA'B'}$$

โดยการสร้าง $SA : SA' = AB : A'B'$

$\therefore \triangle SAB \sim \triangle SA'B'$ (รูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมเท่ากันหนึ่งมุม ด้านที่ประกอบมุมเท่าเป็นสัดส่วนกัน รูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย)

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ASB} = \widehat{A'SB'}$$

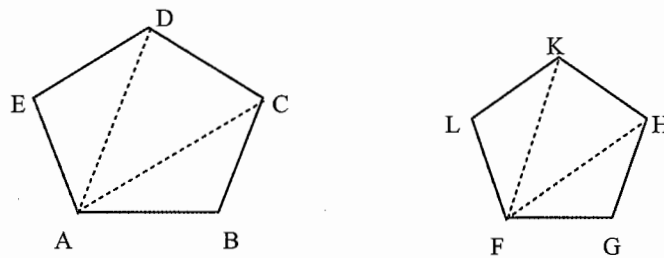
SB และ SB' อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือ BB' ผ่านจุด S

ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า CC' และ DD' ผ่านจุด S

นั่นคือ AA', BB', CC' และ DD' พบกันที่จุดจุดหนึ่ง

ทฤษฎีบท พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมเป็นสัดส่วนกับจัตุรัสบนด้านที่สมนัยกัน



กำหนดให้ ให้ ABCDE และ FGHLK เป็นรูปเหลี่ยมคล้ายกัน

ให้ $\overline{AB}$ และ $\overline{FG}$ เป็นด้านที่สมนัยกัน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ พื้นที่รูปเหลี่ยม ABCDE : พื้นที่รูปเหลี่ยม FGHLK = $AB^2 : FG^2$

พิสูจน์ ลาก AC, AD, FH และ FK

$\triangle ABC \sim \triangle FGH$ (รูปเหลี่ยมที่คล้ายกันแบ่งออกเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน)

$\triangle ACD \sim \triangle FHK$

และ $\triangle ADE \sim \triangle FKL$

$$\begin{aligned} \therefore \text{พื้นที่ } \triangle ABC : \text{พื้นที่ } \triangle FGH &= AC^2 : FH^2 \quad (\text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายเป็นสัดส่วนกับจัตุรัสบนด้านที่สมนัยกัน}) \\ &= \text{พื้นที่ } \triangle ACD : \text{พื้นที่ } \triangle FHK \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ACD : \text{พื้นที่ } \triangle FHK &= AD^2 : FK^2 \\ &= \text{พื้นที่ } \triangle ADE : \text{พื้นที่ } \triangle FKL \end{aligned}$$

$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle FGH} = \frac{\text{พื้นที่ } \triangle ACD}{\text{พื้นที่ } \triangle FHK} = \frac{\text{พื้นที่ } \triangle ADE}{\text{พื้นที่ } \triangle FHL}$$

$$\therefore \frac{\text{พื้นที่รูปเหลี่ยม ABCDE}}{\text{พื้นที่รูปเหลี่ยม FGHL}} = \frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle FGH} = \frac{AB^2}{FG^2}$$

(อัตราส่วนที่เท่ากัน อัตราส่วนแต่ละจำนวนจะเท่ากับผลบวกของอัตราส่วนย่อย)

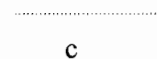
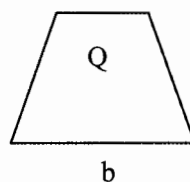
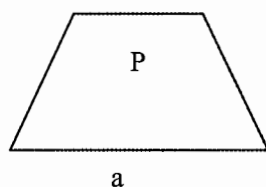
ให้ a, b และ c เป็นส่วนของเส้นตรงสามเส้นที่เป็นสัดส่วนกัน

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \text{ดังนั้น} \quad b^2 = ac$$

ถ้าส่วนของเส้นตรงสามเส้นเป็นสัดส่วนกัน

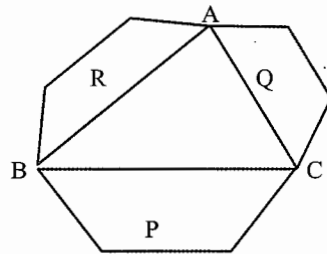
สร้างรูปเหลี่ยมคล้ายใด ๆ บนเส้นที่หนึ่งและเส้นที่สองแล้ว

$$\frac{\text{พื้นที่ของรูปเหลี่ยมรูปแรก}}{\text{พื้นที่ของรูปเหลี่ยมรูปที่สอง}} = \frac{\text{ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง}}{\text{ส่วนของเส้นตรงเส้นที่สาม}}$$



$$\begin{aligned} \frac{\text{พื้นที่ของ P}}{\text{พื้นที่ของ Q}} &= \frac{a^2}{b^2} \\ &= \frac{a^2}{ac} \\ &= \frac{a}{c} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ของรูปเชิงเส้นตรง (rectilinear figure) ซึ่งสร้างบนด้านตรงข้ามมุมฉาก จะเท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปเชิงเส้นตรงอีกสองรูป ที่ประกอบมุมฉาก



กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
BC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก
P, Q, R เป็นรูปเชิงเส้นตรง ซึ่งสร้างบน $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

พื้นที่ของรูปเชิงเส้นตรง P = พื้นที่ของรูปเชิงเส้นตรง Q + พื้นที่ของรูปเชิงเส้นตรง R

พิสูจน์ AB และ BC เป็นด้านที่สมนัยกับรูป R และรูป P

$$\therefore \frac{\text{พื้นที่รูป R}}{\text{พื้นที่รูป P}} = \frac{AB^2}{BC^2} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ทำนองเดียวกัน

$$\frac{\text{พื้นที่รูป Q}}{\text{พื้นที่รูป P}} = \frac{AC^2}{BC^2} \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) + (2) \quad \frac{\text{พื้นที่รูป R} + \text{พื้นที่รูป Q}}{\text{พื้นที่รูป P}} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2}$$

$$\text{แต่ } AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad (\text{ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส})$$

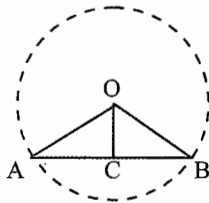
$$\text{ดังนั้น } \text{พื้นที่รูป P} = \text{พื้นที่รูป R} + \text{พื้นที่รูป Q}$$

แบบฝึกหัด 2.4

1. สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ $a = 8$ ซม., $b = 7$ ซม., $c = 6$ ซม.,
ให้ A เป็นจุดศูนย์กลางของความคล้าย สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแนบในรูปสามเหลี่ยม ให้จุดยอดสองจุด
อยู่บนฐาน BC และอีกสองจุดอยู่บน AB และ AC
2. สร้างรูปสามเหลี่ยม ABC ให้ $a = 2.6$ $\hat{B} = 110^\circ$ $\hat{C} = 35^\circ$
สร้างรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC โดย
 - i ด้านแรกขนานกับ BC
 - ii ด้านที่สองขนานกับด้านใดด้านหนึ่ง

วงกลม คอร์ดและเส้นสัมผัส

ทฤษฎีบท ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางของวงกลม ไปแบ่งครึ่งคอร์ด ซึ่งไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง ส่วนของเส้นตรงเส้นนั้น จะตั้งฉากกับคอร์ด



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB เป็นคอร์ด
ลาก OC แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C
 $AC = CB$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle ACO = \angle BCO = 90^\circ$

พิสูจน์ ในรูป $\triangle AOC$ และรูป $\triangle BOC$

$$\begin{cases} AO = BO & (\text{รัศมีของวงกลมเดียวกัน}) \\ AC = CB & (\text{กำหนดให้}) \\ OC & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\triangle AOC \cong \triangle BOC$$

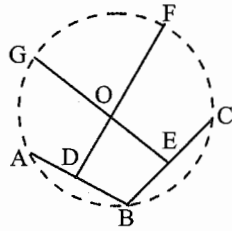
ดังนั้น $\angle ACO = \angle BCO = 90^\circ$ (มุมประชิดรวมกันเท่ากับ 180°)

บทกลับ ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางของวงกลม ไปตั้งฉากกับคอร์ดซึ่งไม่ผ่านจุดศูนย์กลาง ส่วนของเส้นตรงนั้นจะแบ่งครึ่งคอร์ด

บทแทรก 1 ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากแบ่งครึ่งคอร์ด และตั้งฉากกับคอร์ดจะผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

บทแทรก 2 เส้นตรงเส้นหนึ่งไม่สามารถตัดวงกลมวงหนึ่งได้มากกว่าสองจุด

ทฤษฎีบท วงกลมวงหนึ่งและวงเดียวเท่านั้นที่ผ่านจุดสามจุด ซึ่งไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกันได้



กำหนดให้ จุด A จุด B และจุด C เป็นจุดสามจุด ซึ่งไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ วงกลมวงหนึ่งและวงเดียวเท่านั้น
ที่ผ่านจุดสามจุด คือ จุด A จุด B และจุด C ได้

สร้าง แบ่งครึ่ง AB และ BC ที่จุด D และจุด E
แล้วลากเส้นตั้งฉาก DF และ EG ตัดกันที่จุด D

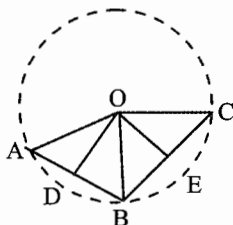
พิสูจน์ $\therefore$ DF แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB
ดังนั้น ทุก ๆ จุดบน DF จะห่างจากจุด A และจุด B เท่ากัน
 $\therefore$ EG แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC
ดังนั้น ทุก ๆ จุดบน EG จะห่างจากจุด B และจุด C เท่ากัน
 $\therefore OA = OB = OC$

จุด O เป็นจุดร่วม ซึ่งห่างจากจุด A จุด B และจุด C เป็นระยะทางเท่ากัน
และไม่มีจุดอื่น

ดังนั้น ถ้าใช้ O เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี OA จะผ่านจุด B และจุด C

ดังนั้น จะมีวงกลมเพียงวงเดียวเท่านั้น ที่ผ่านจุด A จุด B และจุด C ที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท จากจุดจุดหนึ่งในวงกลม ถ้าลากส่วนของเส้นตรงไปยังเส้นรอบวงให้ยาวเท่ากัน
ได้มากกว่าสองเส้นขึ้นไปแล้ว จุดนั้นจะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม



สิ่งที่กำหนดให้ O เป็นจุดภายในวงกลม

$$OA = OB = OC$$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

สร้าง

ลาก $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ให้ D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ และ $\overline{BC}$ ตามลำดับ

ลาก OD และ OE

พิสูจน์

ในรูป $\triangle AOD$ และ $\triangle BOD$

$$\begin{cases} AO = OB & (\text{กำหนดให้}) \\ AD = BD & (\text{สร้าง}) \\ OD & \text{เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\triangle AOD \cong \triangle BOD$$

$$\angle ADO = \angle BDO = 90^\circ \text{ (มุมประชิด)}$$

ดังนั้น OD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

OD ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

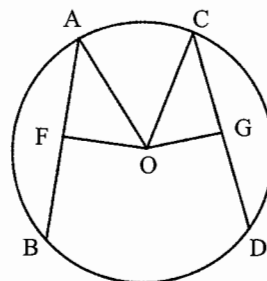
ทำนองเดียวกัน OE ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

 $\therefore$ O เป็นจุดร่วมเพียงจุดเดียวของ OD และ OE

ดังนั้น O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ทฤษฎีบท

คอร์ดที่ยาวเท่ากันย่อมอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะทางเท่ากัน



สิ่งที่กำหนดให้

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

AB และ CD เป็นคอร์ด $AB = CD$ $OF \perp AB$ และ $OG \perp CD$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

 $OF = OG$

สร้าง

ลาก OA และ OC

พิสูจน์

ใน $\triangle AFO$ และ $\triangle CGO$

$$\text{เพราะว่า } \begin{cases} AF = CG \\ AO = CO \\ \hat{AFO} = \hat{CGO} = 90^\circ \end{cases} \quad \begin{cases} AF = \frac{1}{2} AB \\ CG = \frac{1}{2} CD \\ AB = CD \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(รัศมีของวงกลม)} \\ \text{(กำหนดให้)} \end{matrix}$$

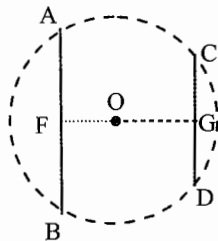
$$\triangle AFO \cong \triangle CGO \quad (\text{น. ค. ค.})$$

$$\text{ดังนั้น } OF = OG$$

นั่นคือ AB และ CD อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง O เป็นระยะทางเท่ากัน

บทกลับ คอร์ดที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะทางเท่ากัน ย่อมยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท คอร์ดที่อยู่ใกล้จุดศูนย์กลางย่อมยาวกว่าคอร์ดที่อยู่ไกลจุดศูนย์กลาง



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$ เป็นคอร์ด

$\overline{OF}$ และ $\overline{OG}$ เป็นเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด O มายัง $\overline{AB}$ และ $\overline{CD}$

- สิ่งที่ต้องพิสูจน์**
1. ถ้า $\overline{OF}$ สั้นกว่า $\overline{OG}$ แล้ว $\overline{AB}$ ยาวกว่า $\overline{CD}$
 2. ถ้า $\overline{AB}$ ยาวกว่า $\overline{CD}$ แล้ว $\overline{OF}$ สั้นกว่า $\overline{OG}$

พิสูจน์ เพราะ $\overline{OF} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{OF}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

ดังนั้น $\overline{AF}$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\overline{AB}$

ทำนองเดียวกัน $\overline{CG}$ เป็นครึ่งหนึ่งของ $\overline{CD}$

$$\text{แต่ } \overline{OA} = \overline{OC} \quad OA^2 = OC^2$$

$$\text{แต่ } \hat{OFA} = 90^\circ \text{ เพราะ } OA^2 = OF^2 + FA^2 \text{ (ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจตุรัสบน}$$

ด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของจตุรัสบนด้านสองด้านที่ประกอบมุมฉาก)

$$\text{ทำนองเดียวกัน } OC^2 = OG^2 + GC^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } OF^2 + FA^2 = OG^2 + GC^2$$

$$(1) \text{ ถ้า } \overline{OF} \text{ สั้นกว่า } \overline{OG}$$

$$OF^2 \text{ สั้นกว่า } OG^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } FA^2 \text{ ยาวกว่า } GC^2 \quad \text{นั่นคือ } FA \text{ ยาวกว่า } GC$$

$$\text{ดังนั้น } FA \text{ ยาวกว่า } CG$$

$$\text{นั่นคือ } AB \text{ ยาวกว่า } CD$$

$$(2) \text{ ถ้า } \overline{AB} \text{ ยาวกว่า } \overline{CD}$$

$$\text{ดังนั้น } FA \text{ ยาวกว่า } CG$$

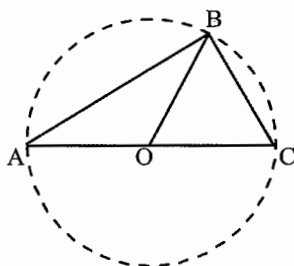
$$\text{จะได้ว่า } FA^2 \text{ ยาวกว่า } CG^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } OF^2 \text{ สั้นกว่า } OG^2$$

$$\text{ดังนั้น } OF \text{ สั้นกว่า } OG$$

บทแทรก คอร์ดที่ยาวที่สุดของวงกลม คือเส้นผ่านศูนย์กลาง

ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมเป็นมุมฉาก



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

$\triangle ABC$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle ABC = 90^\circ$

พิสูจน์ $\overline{OA}$ $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$ เป็นรัศมีของวงกลม

$$\angle OAB = \angle OBA \quad (\text{มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วย่อมเท่ากัน})$$

$$\angle OCB = \angle OBC$$

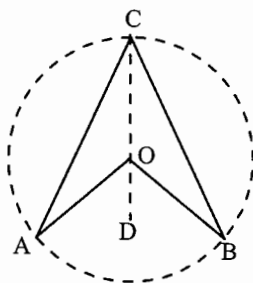
$$\begin{aligned}\widehat{OAB} + \widehat{OCB} &= \widehat{OBA} + \widehat{OBC} \\ &= \widehat{ABC}\end{aligned}$$

แต่ $\widehat{OAB} + \widehat{OCB} + \widehat{ABC} = 180^\circ$ (มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ
สองมุมฉาก)

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ABC} = 90^\circ$$

ทฤษฎีบท

ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมและมุมในส่วนโค้งของวงกลม รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันแล้ว มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลม



กำหนดให้

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$\widehat{AOB}$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

และ $\widehat{AOC}$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งตั้งอยู่บนส่วนโค้ง AB เดียวกัน

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\widehat{AOB} = 2 \widehat{ACB}$$

พิสูจน์

สร้าง ลากเส้น CD ต่อกออกมาถึงจุด D

$$\widehat{AOD} = \widehat{OAC} + \widehat{OCA} \quad (\text{ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไปมุมภายนอกจะเท่ากับมุมภายใน ที่ไม่ใช่มุมประชิดสองมุมรวมกัน})$$

$$\text{และ } \widehat{DOB} = \widehat{OCB} + \widehat{OBC}$$

$$\widehat{AOD} = 2 \widehat{OCA} \quad (\widehat{OAC} = \widehat{OCA} \text{ เพราะ } \triangle AOC \text{ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว})$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน } \widehat{DOB} = 2 \widehat{OCB}$$

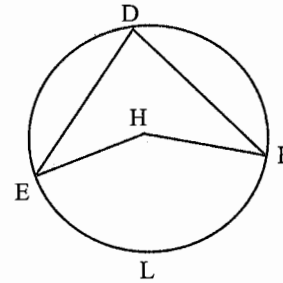
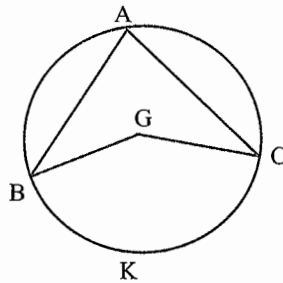
$$\widehat{AOD} + \widehat{DOB} = 2(\widehat{OCA} + \widehat{OCB})$$

$$\widehat{AOB} = 2 \widehat{ACB}$$

ทฤษฎีบท

ในวงกลมเดียวกันหรือวงกลมที่เท่ากัน

ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางหรือมุมที่เส้นรอบวงมีขนาดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้น จะยาวเท่ากัน

**กำหนดให้**

ABC และ DEF เป็นวงกลมสองวงที่เท่ากัน

$$\widehat{BGC} = \widehat{EHF}$$

หรือ $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

ส่วนโค้งของวงกลม BKC เท่ากับส่วนโค้งของวงกลม ELF

พิสูจน์

ยวงกลม ABC ซ้อนบนวงกลม DEF

ให้จุด G ทับจุด H

GB ทาบตาม HE

$$\therefore \widehat{BGC} = \widehat{EHF}$$

$$\therefore GC \text{ จะทาบตาม } HF$$

$$\therefore \text{วงกลมมีรัศมีเท่ากัน}$$

จุด B จะทับจุด E และจุด C ทับจุด F

เส้นรอบวงของวงกลมจะทับกัน

ส่วนโค้งของวงกลม BKC ทับส่วนโค้งของวงกลม ELF สนิท

ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลม BKC เท่ากับส่วนโค้งของวงกลม ELF

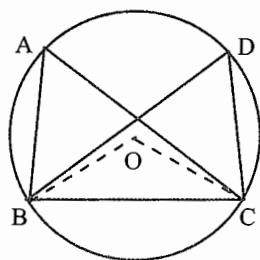
บทกลับ

ในวงกลมเดียวกันหรือวงกลมที่เท่ากัน

ถ้าส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางนั้นยาวเท่ากัน

มุมที่จุดศูนย์กลางหรือมุมที่เส้นรอบวงย่อมมีขนาดเท่ากัน

ทฤษฎีบท มุมในส่วนหนึ่งของวงกลมส่วนเดียวกันย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ $\widehat{BAC}$ และ $\widehat{BDC}$
ตั้งอยู่บนส่วนของวงกลม BC เดียวกัน

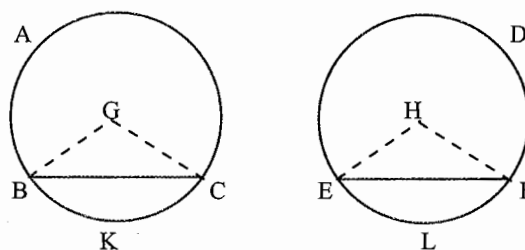
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

พิสูจน์ $\widehat{BOC}$ เท่ากับสองเท่าของ $\widehat{BAC}$ (มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้ง เดียวกัน)

และ $\widehat{BOC}$ เท่ากับสองเท่าของ $\widehat{BDC}$

ดังนั้น $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$

ทฤษฎีบท ในวงกลมเดียวกันหรือวงกลมที่เท่ากัน ถ้าคอร์ดเท่ากันแล้ว ส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับจะยาวเท่ากัน



กำหนดให้ ให้ ABC และ DEF เป็นวงกลมที่เท่ากัน และมี G และ H เป็นจุดศูนย์กลาง
คอร์ด BC เท่ากับคอร์ด EF

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\widehat{BKC} = \widehat{ELF}$
 $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

พิสูจน์ ลาก $\overline{BG}$ $\overline{GC}$ $\overline{EH}$ และ $\overline{HF}$

ใน $\triangle BGC$ และ $\triangle EHF$

$$\begin{cases} BG = EH & (\text{รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน}) \\ GC = HF & (\text{รัศมีของวงกลมที่เท่ากัน}) \\ BC = EF & (\text{กำหนดให้}) \end{cases}$$

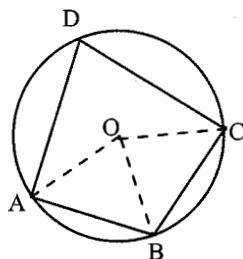
$$\triangle BGC \cong \triangle EHF$$

$$\therefore \hat{BGC} = \hat{EHF}$$

ทำนองเดียวกัน $\widehat{BKC} = \widehat{ELF}$
 $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

บทกลับ ถ้าส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับเท่ากันแล้ว คอร์ดจะยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท ขนาดของมุมที่อยู่ตรงข้ามของรูปสี่ด้านซึ่งแนบในวงกลม รวมกันแล้วเท่ากับสองมุมฉาก



กำหนดให้ ให้ ABCD เป็นรูปสี่ด้านซึ่งแนบในวงกลม ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\hat{ADC} + \hat{ABC} = 180^\circ$

$$\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180^\circ$$

พิสูจน์

ลาก $\overline{AO}$ และ $\overline{BO}$

$$\therefore \hat{ADC} = \frac{1}{2} \hat{AOC} \quad (\text{ตั้งอยู่บนส่วนโค้งของวงกลม ABC})$$

$$\text{และ } \hat{ABC} = \frac{1}{2} \hat{AOC} \quad (\text{มุมกลับ})$$

$$\begin{aligned} \hat{ADC} + \hat{ABC} &= \frac{1}{2} \hat{AOC} + \frac{1}{2} \hat{AOC} \quad (\text{มุมกลับ}) \\ &= \frac{1}{2} \text{ ของ } 360^\circ \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180^\circ$

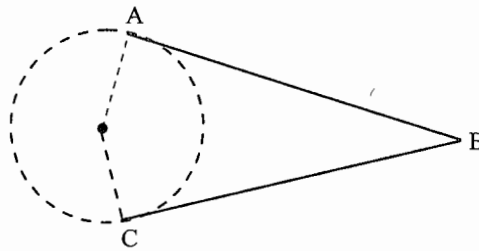
แบบฝึกหัด 3.1

1. เส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดกึ่งกลางของคอร์ดขนานสองเส้นของวงกลม จะผ่านจุดศูนย์กลาง
2. จงหาโลคัสของจุดกึ่งกลางของคอร์ดที่เท่ากันของวงกลม
3. ถ้าคอร์ดสองคอร์ดของวงกลมตัดซึ่งกันและกัน และทำมุมเท่ากับเส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดตัดกับจุดศูนย์กลาง คอร์ดสองเส้นนั้นจะเท่ากัน
4. ถ้าวงกลมสองวงตัดกัน เส้นขนานสองเส้นใด ๆ ซึ่งลากผ่านจุดตัด จะตัดวงกลมออกเท่ากัน
5. ถ้าลากเส้นจากจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมด้านหนึ่ง ไปยังเส้นรอบวงอีกด้านหนึ่ง เส้นที่ยาวที่สุด คือเส้นที่ลากผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม และสองเส้นใด ๆ เส้นซึ่งรองรับมุม ที่จุดศูนย์กลางที่มีขนาดโตกว่า จะเป็นเส้นที่ยาวกว่า
6. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่ง สามารถบรรจุในวงกลม สี่เหลี่ยมด้านขนานรูปนั้นจะเป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า
7. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่ง ลาก XY ขนานกับฐาน BC ตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด X และจุด Y จงแสดงว่า วงกลมผ่านจุด B จุด C จุด X และจุด Y
8. ถ้าต่อด้านหนึ่งด้านใดของรูปสี่ด้านซึ่งบรรจุในวงกลมออกไป มุมภายนอกจะเท่ากับมุมภายใน ซึ่งอยู่ตรงกันข้ามของรูปสี่ด้าน
9. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และจุด B จากจุด A ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง AP และ AQ ในแต่ละวงกลม จงแสดงว่า จุด P จุด B และจุด Q อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน
10. P เป็นจุดใด ๆ บนส่วนโค้งของวงกลม ซึ่งมี AB เป็นคอร์ด
จงแสดงว่า ผลบวกของขนาดของมุม $\widehat{PAB}$ และ $\widehat{PBA}$ มีค่าคงที่
11. PQ และ RS เป็นคอร์ดสองคอร์ดของวงกลมตัดกันที่จุด X
จงพิสูจน์ว่า รูปสามเหลี่ยม PXQ และรูปสามเหลี่ยม RXQ มีมุมเท่ากันสามมุม มุมต่อมุม
12. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และจุด B ลากเส้น PAQ และ XAY ผ่านจุด A และสิ้นสุดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง จงแสดงว่า PX และ QY รองรับมุมที่จุด B เท่ากัน
13. ผลบวกของส่วนโค้งซึ่งถูกตัดโดยคอร์ดสองคอร์ดที่ตั้งฉากกัน จะมีความยาวเท่ากับครึ่งหนึ่งของเส้นรอบวง
14. AB และ AC เป็นคอร์ดสองเส้นของวงกลม P และ Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้งที่ถูกตัดโดยคอร์ดทั้งสองนั้น ถ้าลาก PQ ตัด AB ที่จุด X และตัด AC ที่จุด Y จงพิสูจน์ว่า $AX = AY$
15. รูปสามเหลี่ยม ABC แนบในวงกลม เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามพบเส้นรอบวงที่จุด X จุด Y และจุด Z
จงแสดงว่า มุมของรูปสามเหลี่ยม XYZ เท่ากับ $90^\circ - \frac{A}{2}$, $90^\circ - \frac{B}{2}$ และ $90^\circ - \frac{C}{2}$ ตามลำดับ

16. เส้นตรงซึ่งเชื่อมจุดปลายของคอร์ดขนานในวงกลมวงหนึ่ง
- 1) เชื่อมจุดปลายข้างเดียวกัน
 - 2) เชื่อมจุดปลายที่อยู่ตรงกันข้าม
- จงแสดงว่าเส้นเชื่อมจุดปลายนั้นจะยาวเท่ากัน
17. วงกลมที่เท่ากันสองวงตัดกันที่จุด A ลากเส้น PAQ และ XAY ผ่านจุด A
- จงแสดงว่าคอร์ด PX เท่ากับคอร์ด QY
18. วงกลมที่เท่ากันสองวงตัดกันที่จุด A และจุด B ลากเส้น PAQ ผ่านจุด A และสิ้นสุดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง จงแสดงว่า BP เท่ากับ BQ
19. รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC ที่แนบในวงกลม เส้นแบ่งครึ่งมุมที่ฐานพบเส้นรอบวงที่จุด X และจุด Y
- จงแสดงว่า รูปเหลี่ยม BYAXC มีด้านสี่ด้านเท่ากัน
20. ABCD เป็นรูปสี่ด้านที่แนบในวงกลม ด้านตรงข้าม AB และ DC ต่อกันไปพบกันที่จุด P ด้าน CB และด้าน DA พบกันที่จุด Q ถ้าวางกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม PBC และรูปสามเหลี่ยม QAB ตัดกันที่จุด R จงแสดงว่า จุด P จุด R และจุด Q อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

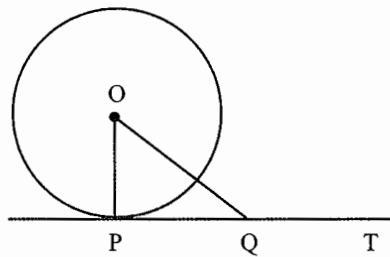
เส้นสัมผัสวงกลม

1. เส้นสัมผัสวงกลม คือ เส้นตรงซึ่งตัดวงกลมเพียงจุดเดียวเท่านั้น
2. จากจุดหนึ่งภายนอกวงกลม ลากเส้นสัมผัสมายังวงกลมได้เพียงสองเส้นเท่านั้น และเส้นสัมผัสนั้นยาวเท่ากัน



3. เส้นสัมผัสตั้งฉากกับเส้นรัศมี ซึ่งลากมาที่จุดสัมผัส
4. เส้นสัมผัสสองเส้นที่ลากมาจากริมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน

ทฤษฎีบท เส้นสัมผัสที่ลากมาสัมผัสวงกลม จะตั้งฉากกับรัศมีของวงกลมซึ่งลากมาที่จุดสัมผัส



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
ให้ PT เป็นเส้นสัมผัส ซึ่งลากมาสัมผัสวงกลมที่จุด P
สิ่งที่ต้องพิสูจน์ เส้นสัมผัส PT ตั้งฉากกับเส้นรัศมี OP
สร้าง ให้ Q เป็นจุดใด ๆ อยู่บน PT
ลาก OQ

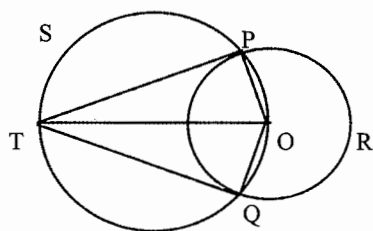
พิสูจน์ เมื่อ PT เป็นเส้นสัมผัส ทุก ๆ จุดที่อยู่บน PT
ยกเว้นจุด P จะอยู่นอกวงกลม
 $\therefore$ OQ ยาวกว่า OP

และเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จุด Q บน PT

$\therefore$ OP เป็นเส้นที่สั้นที่สุด ซึ่งลากจากจุด O มายัง PT

ดังนั้น OP ตั้งฉากกับ PT (เส้นที่ลากจากจุดหนึ่งมายังเส้นตรง เส้นตั้งฉากจะสั้นที่สุด)

ทฤษฎีบท ลากเส้นสัมผัสจากจุดภายนอกมาสัมผัสวงกลม ได้เพียงสองเส้นเท่านั้น



กำหนดให้ ให้ PQR เป็นวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง
T เป็นจุดจุดหนึ่งอยู่ภายนอกวงกลม

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ลากเส้นสัมผัสจากจุด T มาสัมผัสวงกลม PQR ได้เพียงสองเส้นเท่านั้น

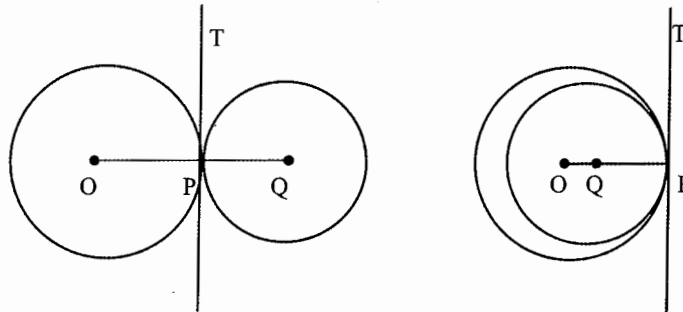
สร้าง ลาก OT สร้างวงกลม TSO โดยมี OT เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
ตัดวงกลม PQR ที่จุดสองจุด คือ จุด P และจุด Q ซึ่ง T เป็นจุดภายนอกวงกลม
และ O เป็นจุดภายในวงกลม PQR
ลากเส้น TP TQ OP และ OQ

พิสูจน์ $\hat{TPO} = \hat{TQO} = 90^\circ$ (มุมในครึ่งวงกลมเป็นหนึ่งมุมฉาก)
TP และ TQ ตั้งฉากกับรัศมี OP และ OQ ตามลำดับ
 $\therefore$ TP และ TQ เป็นเส้นสัมผัสที่จุด P และจุด Q (เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม
ซึ่งลากมาที่จุดสัมผัส)

บทแทรก เส้นสัมผัสสองเส้นที่ลากจากจุดภายนอกมายังวงกลมวงหนึ่ง จะยาวเท่ากัน และรองรับมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากัน

ทฤษฎีบท

ถ้าวงกลมสองวงสัมผัสกัน จุดศูนย์กลางและจุดสัมผัสจะอยู่ในเส้นตรงเดียวกัน



กำหนดให้ ให้วงกลมสองวงซึ่งมีจุดศูนย์กลาง O และจุดศูนย์กลาง Q สัมผัสกันที่จุด P

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จุด O จุด P และจุด Q อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

ลาก OP และ QP

พิสูจน์

เมื่อวงกลม O และวงกลม Q สัมผัสกันที่จุด P

วงกลมทั้งสองจะมีเส้นสัมผัสที่จุด P ร่วมกัน (วงกลมซึ่งสัมผัสซึ่งกันและกัน จะมีเส้นสัมผัสร่วมที่จุดสัมผัส)

สมมติ PT สัมผัสวงกลมทั้งสองที่จุด P

OP และ QP เป็นรัศมีซึ่งลากมาที่จุดสัมผัส P

$\therefore OP$ และ QP ต่างก็ตั้งฉากกับ PT

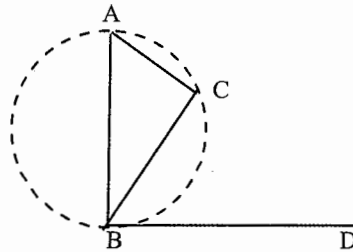
$\therefore OP$ และ QP อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน (ลากเส้นตรงสองเส้นมาพบกันที่จุดจุดหนึ่ง ทำให้มุมประชิดรวมกันเท่ากับสองมุมฉาก แล้ว เส้นตรงสองเส้นนั้นเป็นเส้นตรงเดียวกัน)

นั่นก็คือ จุด O จุด P และจุด Q อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

บทแทรก

1. ถ้าวงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอก ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางทั้งสอง จะเท่ากับ ผลรวมของรัศมี
2. ถ้าวงกลมสองวงสัมผัสกันภายใน ระยะห่างระหว่างจุดศูนย์กลางทั้งสอง จะเท่ากับ ผลต่างของรัศมี

ทฤษฎีบท มุมที่เกิดขึ้นจากเส้นสัมผัสตัดกับคอร์ดย่อมเท่ากับมุมที่อยู่ในส่วนของวงกลมตรงกันข้าม



กำหนดให้ ABC เป็นวงกลมที่กำหนดให้
 BC เป็นคอร์ด
 BD เป็นเส้นสัมผัส จดวงกลม ABC ที่จุด B

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\angle CBD = \angle BAC$

พิสูจน์ $\therefore \angle CBD + \angle ABC = 90^\circ$ (เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมีของวงกลม)
 และ $\angle BAC + \angle ABC = 90^\circ$ (เพราะ $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$
 และ $\angle ACB = 90^\circ$)

จะได้ว่า $\angle CBD + \angle ABC = \angle BAC + \angle ABC$

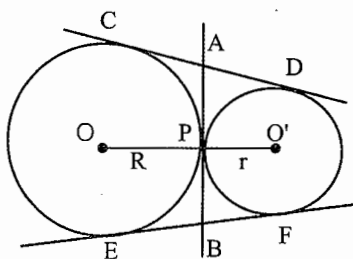
ดังนั้น $\angle CBD = \angle BAC$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จุด A เป็นจุดภายนอกวงกลม จากจุด A ลากเส้นสัมผัส AB และเส้นสัมผัส AC สัมผัสวงกลม O ที่จุด B และจุด C ตามลำดับ จงแสดงว่า AO แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC
2. เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง จะแบ่งครึ่งคอร์ดทุกคอร์ด ซึ่งลากขนานกับเส้นสัมผัสซึ่งสัมผัสวงกลม ที่จุดใดจุดหนึ่ง
3. วงกลมสองวงสัมผัสกันภายนอกที่จุด A ลากเส้น PAQ และ XAY ผ่านจุด A และสิ้นสุดที่เส้นรอบวงของวงกลมทั้งสอง จงพิสูจน์ว่า $\overline{PX}$ ขนานกับ $\overline{YQ}$
4. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และจุด B P เป็นจุดใดๆ บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง ลาก PAC และ PBD จงพิสูจน์ว่า CD ขนานกับเส้นสัมผัสที่จุด P
5. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB และ AC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B และจุด C จงแสดงว่า AO แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC

วงกลมสองวง

1. วงกลมสัมผัสกันภายนอก



วงกลม O และ O' สัมผัสกันภายนอกที่จุด P

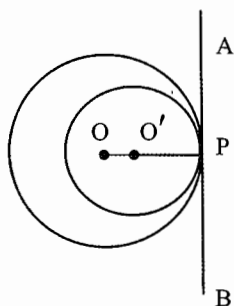
จุดศูนย์กลาง O, O' และจุดสัมผัส P อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

AB เป็นเส้นสัมผัสร่วม

OO' ตั้งฉากกับ AB มีความยาว $R + r$

AB แบ่งครึ่งเส้นสัมผัส CD และ EF

2. วงกลมสัมผัสกันภายใน



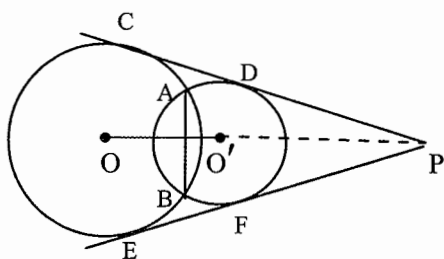
วงกลม O และ O' สัมผัสกันภายในที่จุด P

AB เป็นเส้นสัมผัสร่วม

OO' ต่อออกมาพบจุด P และตั้งฉากกับ AB

OO' ยาวเท่ากับ $R - r$

3. วงกลมตัดกัน



วงกลม O และ O' ตัดกัน

AB เป็นคอร์ดร่วม

ถ้าวงกลมไม่เท่ากัน

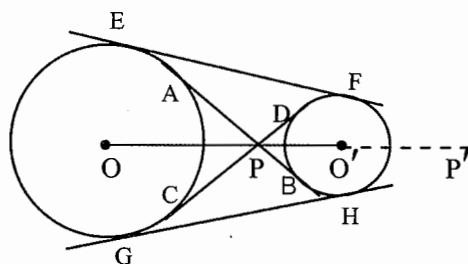
เส้นสัมผัส CD และ EF ต่อออกไป

ตัดกันที่จุด P

เส้น OO' แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

และต่อออกไปจะพบจุด P

4. วงกลมไม่ตัดกัน



วงกลม O และ O' มีเส้นสัมผัส

AB และ CD ตัดกันที่จุด P

เส้นตรง OO' ผ่านจุด P และจุด P'

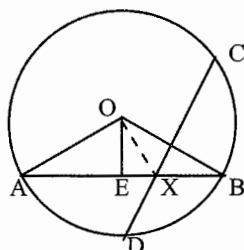
$AB = CD$

$EF = GH$

แบบฝึกหัด 3.3

1. ในวงกลม O คอร์ด $AB = DE$ และคอร์ด $BC = EF$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $\hat{B} = \hat{E}$
2. ถ้า BD และ CE เป็นคอร์ดที่ยาวเท่ากันในวงกลม ต่อดูออกไปพบกันภายนอกที่จุด A ต่อดู BC แล้ว จงแสดงว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
3. วงกลมสองวงตัดกันที่จุด A และจุด B M เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง ลาก MAX และ MBY พบอีกวงหนึ่งที่จุด X และจุด Y จงพิสูจน์ว่า เส้นสัมผัสที่จุด M ขนานกับ XY

ทฤษฎีบท คอร์ดสองคอร์ดตัดกันภายในวงกลม พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนตัดของคอร์ดย่อมเท่ากัน



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
AB และ CD เป็นคอร์ดตัดกันที่จุด X

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX \cdot XB = CX \cdot XD$

สร้าง ลาก $OE \perp AB$ (จะแบ่งครึ่ง AB)
ลาก AO และ OX

พิสูจน์

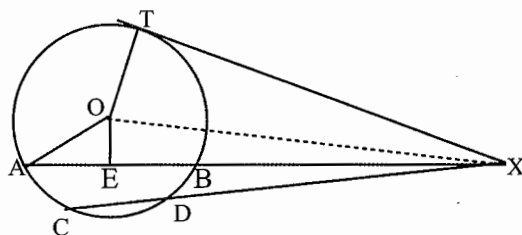
$$\begin{aligned} AX \cdot XB &= (AE + EX)(EB - EX) \\ &= (AE + EX)(AE - EX) \\ &= AE^2 - EX^2 \\ &= (AE^2 + OE^2) - (EX^2 + OE^2) \\ &= AO^2 - OX^2 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$CX \cdot XD = AO^2 - OX^2$$

นั่นคือ $AX \cdot XB = CX \cdot XD$

ทฤษฎีบท คอร์ดสองคอร์ดตัดกันภายนอกวงกลม พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยส่วนตัดของคอร์ดย่อมเท่ากัน และเท่ากับจัตุรัสบนเส้นสัมผัส



กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

AB และ CD เป็นคอร์ดตัดกันภายนอกที่จุด X XT เป็นเส้นสัมผัส

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $AX \cdot XB = CX \cdot XD = XT^2$

สร้าง ลาก $OE \perp AB$, ลาก AO, OX, OT

$$\begin{aligned} \text{พิสูจน์} \quad AX \cdot XB &= (EX + AE)(EX - EB) \\ &= (EX + AE)(EX - AE) \\ &= EX^2 - AE^2 \\ &= (EX^2 + OE^2) - (AE^2 + OE^2) \\ &= OX^2 - AO^2 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

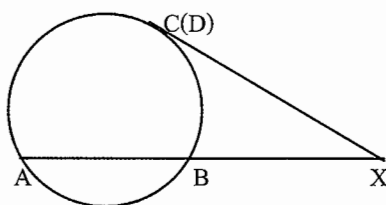
$$CX \cdot XD = OX^2 - AO^2$$

รัศมี $OT \perp XT$

$$\begin{aligned} XT^2 &= OX^2 - OT^2 \\ &= OX^2 - AO^2 \quad (OT = AO) \end{aligned}$$

นั่นคือ $AX \cdot XB = CX \cdot XD = XT^2$

ทฤษฎีบท จากจุดจุดหนึ่งภายนอกวงกลม ลากเส้นตัดวงกลม และลากอีกเส้นหนึ่งพบบวงกลม ถ้าพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมซึ่งประกอบด้วยเส้นตรงเส้นนั้น กับส่วนที่อยู่ภายนอกวงกลม เท่ากับจัตุรัสบนเส้นที่ลากมาพบบวงกลมแล้ว เส้นตรงเส้นนั้นจะเป็นเส้นสัมผัส



กำหนดให้ X เป็นจุดภายนอกวงกลม
ลากเส้น จากจุด X ตัดวงกลม ที่จุด B และจุด A
จาก XC พบบวงกลมที่จุด C
 $XA \cdot XB = XC^2$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ XC สัมผัสวงกลมที่จุด C

พิสูจน์ ให้ XC พบบวงกลมที่จุดอีกจุดหนึ่ง คือ จุด D

$$\begin{aligned} XA \cdot XB &= XC \cdot XD \\ XA \cdot XB &= XC^2 \end{aligned}$$

$$XC \cdot XD = XC^2$$

$$\therefore XD = XC$$

XC จะพบวงกลมอีกจุดหนึ่งไม่ได้

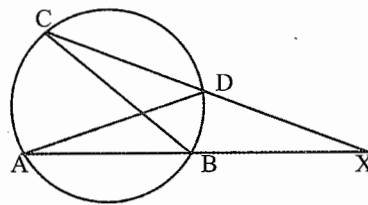
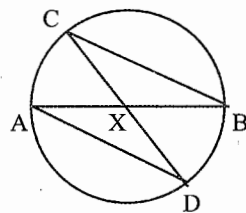
นอกจากจุดนั้นทับกัน

XC เป็นเส้นสัมผัสของวงกลม

แบบฝึกหัด 3.4

1. สร้างรูปครึ่งวงกลมรูปหนึ่งบน $\overline{AB}$ และจากจุด X ซึ่งเป็นจุดใด ๆ บน $\overline{AB}$ ลาก XM ตั้งฉากกับ AB ตัดเส้นรอบวงที่จุด M จงพิสูจน์ว่า $AX \cdot XB = MX^2$
2. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมี $\hat{A}CB$ เป็นมุมฉาก ลาก CD ตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉาก จงพิสูจน์ว่า $AD \cdot DB = CD^2$
3. สร้างรูปครึ่งวงกลมรูปหนึ่งบน AB AB และ CD เป็นคอร์ดสองเส้นตัดกันที่จุด P จงพิสูจน์ว่า $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$

รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากับวงกลม



กำหนดให้ คอร์ด AB และคอร์ด CD ตัดกันที่จุด X

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $XA \cdot XB = XC \cdot XD$

พิสูจน์ ใน $\triangle AXD$ และ $\triangle CXB$

$\hat{B}AD = \hat{B}CD$ อยู่บนส่วนโค้ง DB เดียวกัน

$\hat{A}DC = \hat{A}BC$ อยู่บนส่วนโค้ง AC เดียวกัน

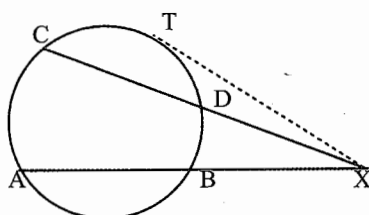
$\hat{A}XD = \hat{C}XB$ (มุมตรงข้าม)

$\triangle AXD \sim \triangle CXB$

$$\frac{XA}{XC} = \frac{XD}{XB}$$

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD$$

จากรูป XT เป็นเส้นสัมผัส ABX เป็นเส้นผ่านวง (secant)



สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$XA \cdot XB = XT^2$$

พิสูจน์

ให้ CDX เป็นเส้นผ่านวงอีกเส้นหนึ่ง

$$XA \cdot XB = XC \cdot XD \quad (\text{ทฤษฎีข้างต้น})$$

และเป็นจริงเสมอ ไม่ว่า CDX จะอยู่ในลักษณะใด

ให้ CDX เคลื่อนจนกระทั่งกลายเป็น XT

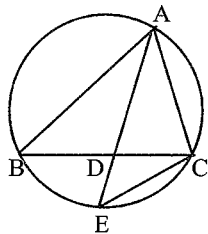
$$\text{ดังนั้น } XC \cdot XD = XT \cdot XT$$

$$= XT^2$$

$$\text{นั่นคือ } XA \cdot XB = XT^2$$

ทฤษฎีบท

ถ้าลากเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งลากมาตัดฐานพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งประกอบด้วยด้านประกอบมุมยอด จะมีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนแบ่งรวมกับจัตุรัสบนเส้นที่ลากจากมุมยอดมายังฐาน



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

AD แบ่งครึ่ง $\widehat{BAC}$ พบ BC ที่จุด Dสิ่งที่ต้องพิสูจน์ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $AB \cdot AC =$ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $BD \cdot AC + AD^2$ พิสูจน์ สร้างวงกลมล้อมรอบ $\triangle ABC$ ต่อ AD ไปพบเส้นรอบวงที่จุด E ลาก EC

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$$

$$\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$$

$$\angle ADB = \angle AEC$$

$$\triangle ABD \sim \triangle AEC$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$$

$$AB \cdot AC = AE \cdot AD$$

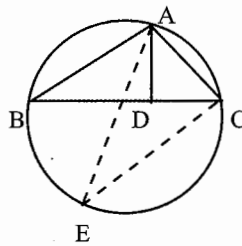
$$= (AD + DE) AD$$

$$= AD^2 + AD \cdot DE$$

$$\text{แต่ } AD \cdot DE = BD \cdot DC \quad (\text{กอร์ดตัดกันภายในวงกลม})$$

$$\text{ดังนั้น } AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2$$

ทฤษฎีบท ถ้าลากเส้นจากมุมยอดของรูปสามเหลี่ยมมาตั้งฉากกับฐาน พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยด้านประกอบมุมยอด จะเท่ากับพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนั้น กับเส้นตั้งฉากที่ลากมายังฐาน



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
AD ตั้งฉากกับ BC EA เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $AB \cdot AC =$ พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $AE \cdot AD$

พิสูจน์ ใน $\triangle ABD, \triangle AEC$

$$\angle ABD = \angle AEC$$

$$\angle ADB = \angle AEC = 90^\circ$$

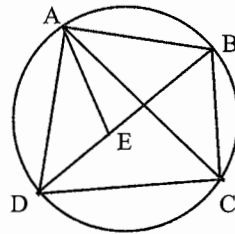
$$\angle BAD = \angle EAC$$

$$\triangle ABD \sim \triangle AEC$$

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AC}$$

$$AB \cdot AC = AE \cdot AD$$

ทฤษฎีบท พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งประกอบขึ้นด้วยเส้นทแยงมุมของรูปสี่ด้าน (quadrilateral) ซึ่งบรรจุในวงกลม จะเท่ากับผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยด้านตรงข้ามของรูปสี่ด้านนั้น (Ptolemy's Theorem)



กำหนดให้ ให้ ABCD เป็นรูปสี่ด้านซึ่งบรรจุในวงกลม
AC และ BD เป็นเส้นทแยงมุม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า $AC \cdot BD$ = พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า $AB \cdot CD$ +
พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า $BC \cdot AD$

พิสูจน์ สร้าง $\hat{DAE} = \hat{BAC}$
 $\hat{DAE} + \hat{CAE} = \hat{BAC} + \hat{CAE}$
 $\hat{DAC} = \hat{EAB}$
 $\hat{ACD} = \hat{ABD}$ (อยู่บนกอร์ด AD เดียวกัน)
 $\triangle ADC \sim \triangle AEB$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD}$$

$$AB \cdot CD = AC \cdot BE \quad (1)$$

ทำนองเดียวกัน $\triangle ADE \sim \triangle ACB$

$$\frac{DA}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$BC \cdot DA = AC \cdot DE \quad (2)$$

(1)+(2) จะได้ว่า

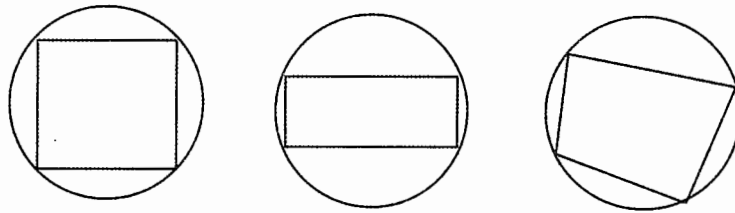
$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BE + AC \cdot DE$$

$$= AC(BE + DE)$$

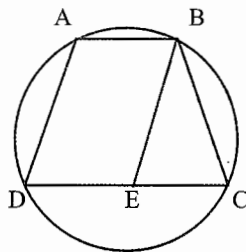
$$= AC \cdot BD$$

รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม (cyclic quadrilateral)

รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม หมายถึง รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมเดียวกัน
รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม ได้แก่ รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส รูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่า
ที่มุมตรงข้ามรวมกันได้เท่ากับสองมุมฉาก



ทฤษฎีบท รูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลมได้



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว $AB \parallel DC$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จุด A จุด B จุด C และจุด D อยู่บนเส้นรอบวงเดียวกัน

พิสูจน์ ลาก $BE \parallel AD$ พบ DC ที่จุด E

ABED เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$\hat{BAD} = \hat{BED}$$

$$\hat{BAD} = 180^\circ - \hat{BEC}$$

$$= 180^\circ - \hat{BCE}$$

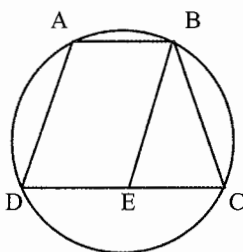
$$\hat{BAD} + \hat{BCE} = 180^\circ$$

วงกลมล้อมรอบ $\square ABCD$ ได้

นั่นคือ จุด A จุด B จุด C และจุด D อยู่บนเส้นรอบวงเดียวกัน

บทแทรก ด้านที่ขนานกันของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู หน้าจั่วย่อมตัดส่วนโค้งของวงกลมล้อมรอบระหว่าง ด้านคู่ขนานเป็นส่วนโค้งที่ยาวเท่ากัน

ทฤษฎีบท รูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านขนานกันคู่หนึ่ง จะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่วงกลมล้อมรอบได้ ก็ต่อเมื่อรูปสี่เหลี่ยมนั้น เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากหรือรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มี $AB \parallel DC$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ ABCD มีวงกลมล้อมรอบได้ก็ต่อเมื่อ
ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก หรือรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

พิสูจน์ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากและรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่วเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมตรงข้ามรวมกันเป็น 180° จึงจะมีวงกลมล้อมรอบได้

ถ้ารูปสี่เหลี่ยม ABCD มีด้าน AB ขนานกับด้าน CD

จะได้ $\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$ และ $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

ดังนั้น $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D}$

$$\hat{C} = \hat{D}$$

ถ้ามุมหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็น 90°

จะได้มุมแต่ละมุมอีกสามมุมเป็น 90°

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

ให้ B เป็นมุมป้าน ลาก BE ขนานกับ AD ตัด CD ที่จุด E

จะได้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น $\hat{B} = \hat{AED}$

แต่ $\hat{AED} = \hat{BCE}$

ดังนั้น $\hat{B} = \hat{BCE}$

รูปสามเหลี่ยม BEC จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

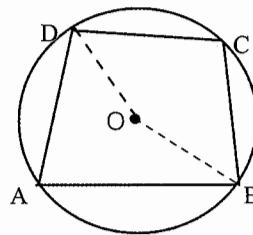
$$BC = BE$$

แต่ $BE = AD$

ดังนั้น $AD = BC$

รูปสี่เหลี่ยม ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมูหน้าจั่ว

ทฤษฎีบท ถ้ารูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลม มุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันได้ 180°



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\hat{BAD} + \hat{BCD} = 180^\circ$

พิสูจน์ $\hat{BAD} = \frac{1}{2} \hat{DOB}$ (ตั้งอยู่บนส่วนโค้ง DCB)

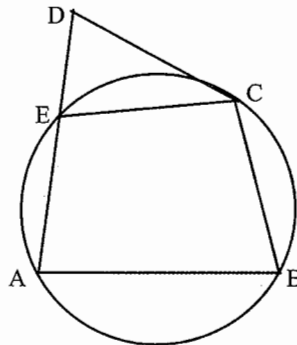
$\hat{BCD} = \frac{1}{2} \hat{DOB}$ (มุมกลับตั้งอยู่บนส่วนโค้ง DAB)

$$\hat{BAD} + \hat{BCD} = \frac{1}{2} (\hat{DOB} + \text{มุมกลับ } \hat{DOB})$$

$$= \frac{1}{2} \times 360^\circ$$

$$= 180^\circ$$

ถ้ามุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมรวมกันได้ 180° รูปสี่เหลี่ยมนั้นแนบในวงกลม



กำหนดให้ $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ รูปสี่เหลี่ยม ABCD แนบในวงกลมได้

พิสูจน์

สร้างวงกลมผ่านจุด A จุด B และจุด C

จุด D อาจจะอยู่นอกหรือในวงกลมหรือบนเส้นรอบวง

สมมติให้จุด D อยู่นอกวงกลม $\overline{AD}$ ตัดเส้นรอบวงที่จุด E ลาก $\overline{EC}$

ดังนั้น $\angle ABC + \angle AEC = 180^\circ$

แต่ $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ (กำหนดให้)

$\therefore \angle AEC = \angle ADC$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะ $\angle AEC$ โตกว่า $\angle ADC$ (ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกย่อมโตกว่ามุมภายในมุมใดมุมหนึ่งที่อยู่ตรงข้าม)

ดังนั้น การที่ให้จุด D อยู่นอกวงกลม จึงเป็นไปไม่ได้

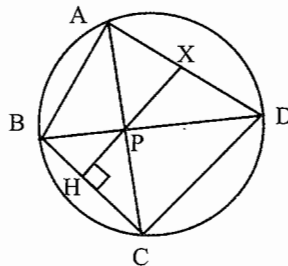
ทำนองเดียวกันจุด D อยู่ในวงกลมไม่ได้

จุด D ต้องอยู่บนเส้นรอบวง

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยม ABCD แนบในวงกลมได้

หมายเหตุ คำว่า รูปสี่เหลี่ยม (quadrilateral) ในพจนานุกรมศัพท์ราชบัณฑิตใช้คำว่า “รูปสี่ด้าน”

ถ้ารูปสี่เหลี่ยมซึ่งแนบในวงกลมมีเส้นทแยงมุมตัดตั้งฉากซึ่งกันและกันที่จุด P เส้นที่ลากผ่านจุด P ซึ่งตั้งฉากกับด้านใดด้านหนึ่ง จะแบ่งครึ่งด้านตรงข้าม



กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งแนบในวงกลม
เส้นทแยงมุม BD และ AC ตัดกันที่จุด P
ลาก XH ผ่านจุด P ให้ $XH \perp BC$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $XA = XD$

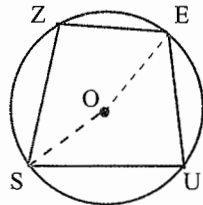
พิสูจน์ $\therefore BD \perp AC$ ที่จุด P
 $XH \perp BC$
ดังนั้น $\hat{DPX} = \hat{BPH}$ (มุมตรงข้าม)
 $\hat{BPX} = \hat{PCH}$ ($\triangle BPC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก)
 $= \hat{ACB}$
 $= \hat{ADB}$
 $= \hat{XDP}$
 $\therefore \hat{DPX} = \hat{BPH} = \hat{PCH} = \hat{ACB} = \hat{ADB} = \hat{XDP}$
 $\therefore \triangle PXD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 $XP = XD$

ทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $\triangle XAP$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$XP = XA$
ดังนั้น $XA = XD$

แบบฝึกหัด 4.1

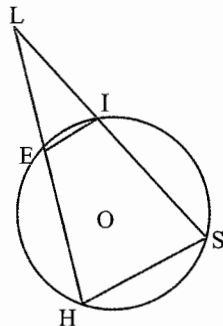
1.



จากรูป ZEUS เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบใน
วงกลม

- $\widehat{UEZ} + \widehat{USZ}$ มีขนาดกึ่งศา
- ถ้ามุม $\widehat{EOU} = 60^\circ$ และ $\widehat{SOU} = 130^\circ$
 $\widehat{EOS}$ มีขนาดเท่ากับกึ่งศา

2.



จากรูป $\overline{LH}$ และ $\overline{LS}$ เป็นเส้นผ่านวง
ของวงกลม O

$$\widehat{HEI} = (10x + 3)^\circ$$

$$\widehat{EIS} = (9x - 2)^\circ$$

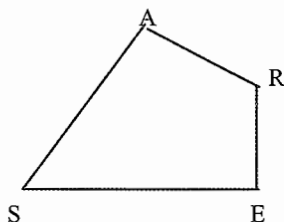
$$\widehat{HSI} = (4x + 9)^\circ$$

จงหาว่า x มีขนาดเท่ากับกึ่งศา

$\widehat{EHS}$ และ $\widehat{HLS}$ มีขนาดเท่ากับกึ่งศา

หมายเหตุ คำว่า เส้นผ่านวง (secant) ศัพท์ราชบัณฑิต เรียกว่า เส้นตัด

3.

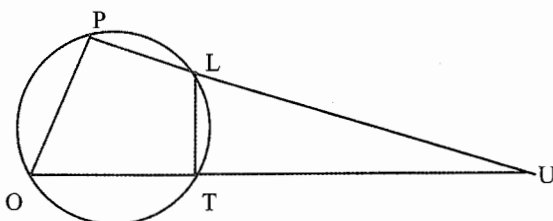


จากรูป

$$\overline{AS} \perp \overline{AR} \text{ และ } \overline{ER} \perp \overline{ES}$$

จงพิสูจน์ว่า ARES แนบในวงกลม

4.

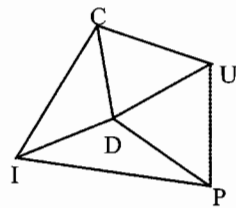


จากรูป

PLTO แนบในวงกลม

จงพิสูจน์ว่า $\triangle POU \sim \triangle TLU$

5.



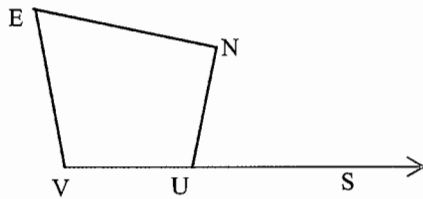
จากรูป

ICUP เป็นรูปสี่เหลี่ยม

$$DC = DU = DP = DI$$

จงพิสูจน์ว่า $\hat{ICU} + \hat{UPI} = 180^\circ$

6.



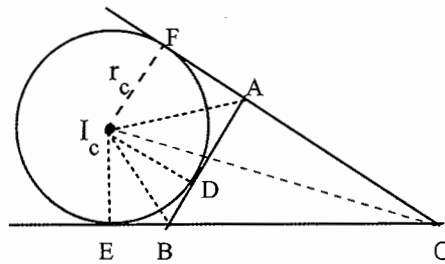
จากรูป

$$\hat{NUS} = \hat{VEN}$$

จงพิสูจน์ว่า VUNE แนบในวงกลม

วงกลมแนบนอก (escribed circle) รูปสามเหลี่ยม

บทนิยาม กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC วงกลมที่สัมผัสด้านหนึ่งและส่วนต่อของอีกสองด้าน เรียกว่า วงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม ABC รัศมีของวงกลมเรียกว่า รัศมีแนบนอก (exradius)



แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบนอกที่อยู่ตรงข้าม มุม A มุม B และ มุม C ด้วย I_a , I_b และ I_c ตามลำดับ

และแทนรัศมีแนบนอกเหล่านั้นด้วย r_a , r_b , r_c ตามลำดับ

ให้วงกลมแนบนอกที่มีจุดศูนย์กลาง I_c สัมผัสด้าน AB ส่วนต่อของด้าน CB และส่วนต่อของด้าน CA ที่จุด D จุด E และจุด F ตามลำดับ

$$\text{เนื่องจาก } I_c F = I_c D$$

$$\text{ดังนั้น } \triangle I_c F A \cong \triangle I_c D A \quad (\text{ค.จ.ค.})$$

$$\text{เส้น } I_c A \text{ แบ่งครึ่งมุมภายนอกของ } \hat{BAC}$$

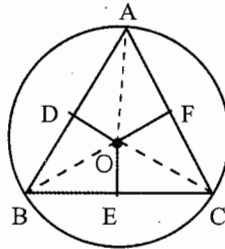
$$\text{ทำนองเดียวกัน แสดงได้ว่า } I_c B \text{ แบ่งครึ่งมุมภายนอกของ } \hat{ABC}$$

$$\text{และ } I_c C \text{ แบ่งครึ่ง } \hat{ACB}$$

นั่นคือ จุดศูนย์กลางแนบนอกเป็นจุดที่เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในเส้นหนึ่งกับเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของอีกสองมุมพบกัน

ทฤษฎีบท

ส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง จุดนั้นเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม



สร้าง

ลาก OD, OE แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB และ BC ตัดกันที่จุด O
 ลาก OF แบ่งครึ่ง AC
 ลาก OA OB และ OC

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

- i OF ตั้งฉากกับ AC
- ii $OA = OB = OC$ (รัศมีของวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม)

พิสูจน์

ใน $\triangle ODA$ และ $\triangle ODB$

$$\begin{cases} AD = DB \\ OD \text{ เป็นด้านร่วม} \\ \hat{A}DO = \hat{O}DB = 90^\circ \end{cases}$$

$$\triangle ODA \cong \triangle ODB \quad (\text{ด.ม.ด.})$$

$$OA = OB$$

ทำนองเดียวกัน $\triangle BOE \cong \triangle OEC$ (ด.ม.ด.)

$$OB = OC$$

ดังนั้น $OA = OB = OC$ (รัศมีของวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม)

ใน $\triangle AOF$ และ $\triangle OFC$

$$\begin{cases} OA = OC \\ OF \text{ เป็นด้านร่วม} \\ AF = FC \end{cases}$$

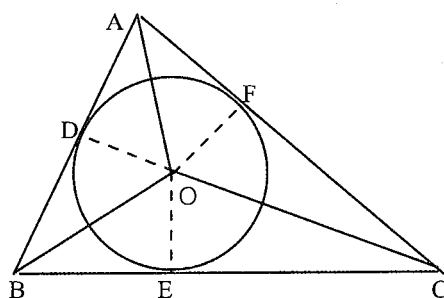
$$\triangle AOF \cong \triangle OFC \quad (\text{ด.ด.ด.})$$

$$\hat{A}FO = \hat{O}FC = 90^\circ \quad (\text{มุมประชิด})$$

นั่นคือ OF ตั้งฉากกับ AC

วงกลมแนบใน (in – circle หรือ inscribed circle)

ทฤษฎีบท เส้นแบ่งครึ่งมุมยอดของรูปสามเหลี่ยม จะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง จุดนั้นเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมนั้น



สร้าง ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม
BO และ CO พบกันที่จุด O
ลาก AO
ลาก OD OE และ OF ตั้งฉากกับ AB BC และ CA ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

1. OA แบ่งครึ่ง $\angle BAC$
2. $OD = OE = OF$

พิสูจน์

ใน $\triangle BOD$ และ $\triangle BOE$

$$\begin{cases} \hat{DBO} = \hat{EBO} & (\text{BO แบ่งครึ่ง } \angle DBE) \\ \hat{ODB} = \hat{OEB} = 90^\circ \\ OB \text{ เป็นด้านร่วม} \end{cases}$$

$$\triangle BOD \cong \triangle BOE \quad (\text{ม.ม.ด.})$$

$$OD = OE$$

ทำนองเดียวกัน

$$\triangle EOC \cong \triangle FOC \quad (\text{ม.ม.ด.})$$

$$OE = OF$$

$$\text{ดังนั้น } OD = OE = OF$$

ใน $\triangle DOE$ และ $\triangle AOF$

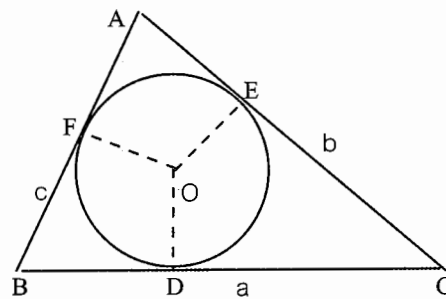
$$\begin{cases} AO \text{ เป็นด้านร่วม} \\ OD = OF \\ \angle ODA = \angle OFA = 90^\circ \end{cases}$$

$$\triangle DOA \cong \triangle AOF$$

ดังนั้น OA แบ่งครึ่ง $\angle BAC$

ตัวอย่าง กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC โดย $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ และ $s = \frac{a+b+c}{2}$
 จงหาความยาว $s-a$, $s-b$ และ $s-c$

วิธีทำ



สร้างวงกลมแนบในสัมผัสด้าน BC CA และ AB ที่จุด D จุด E และ จุด F ตามลำดับ

จากสมบัติของเส้นสัมผัสจะได้ $AE = AF$, $BD = BF$ และ $CD = CE$

ดังนั้น $AE + BD + CD = AF + BF + CE$

แต่ $AE + BD + CD + AF + BF + CE = a + b + c$

ดังนั้น $2(AE + BD + CD) = a + b + c$

$$\begin{aligned} AE + BD + CD &= \frac{1}{2}(a + b + c) \\ &= s \end{aligned}$$

แต่ $BD + CD = a$

ดังนั้น $AE + a = s$

$$AE = s - a$$

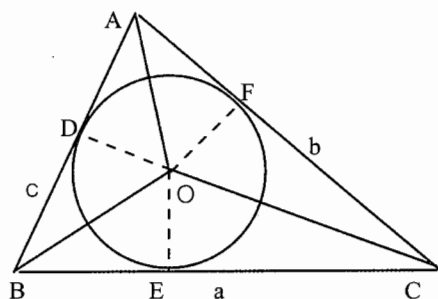
$$AF = s - a$$

ในทำนองเดียวกัน $BD = BF = s - b$

$$CE = CD = s - c$$

ทฤษฎีบท รัศมีของวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว a , b และ c คือ

$$r = \frac{2\Delta}{a+b+c}$$



พิสูจน์

$$\text{พื้นที่รูป } \triangle ABC = \triangle BOC + \triangle AOC + \triangle AOB$$

$$= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$$

$$= \frac{1}{2} r(a+b+c)$$

$$r = \frac{2\Delta}{a+b+c}$$

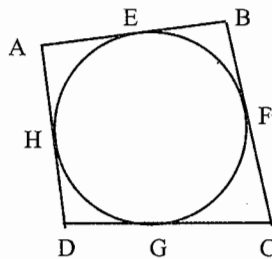
เนื่องจาก $s = \frac{a+b+c}{2}$

ดังนั้น $r = \frac{\Delta}{s}$

หรือ $r = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

วงกลมแนบในรูปสี่เหลี่ยม

บทนิยาม เรียกวงกลมที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม และสัมผัสด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมว่า วงกลมแนบในรูปสี่เหลี่ยม



ทฤษฎีบท 1 รูปสี่เหลี่ยมจะมีวงกลมแนบในได้ก็ต่อเมื่อ ผลบวกของความยาวของด้านตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมยาวเท่ากัน

พิสูจน์

ตอนที่ 1 รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีวงกลมแนบในได้ ให้วงกลมสัมผัสด้าน AB, BC, CD และ DA ที่จุด E, F, G และ H ตามลำดับ โดยมีสมบัติของเส้นสัมผัส

$$AE = AH$$

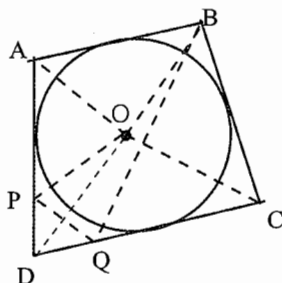
$$EB = BF$$

$$DG = DH$$

และ $GC = CF$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad AB + CD &= AE + EB + DG + GC \\ &= AH + BF + DH + CF \\ &= (AH + DH) + (BF + CF) \\ &= AD + BC \end{aligned}$$

ตอนที่ 2 ถ้ารูปสี่เหลี่ยม ABCD มี $AB + CD = AD + BC$ ในกรณีที่ AB สั้นกว่า AD จะได้ BC สั้นกว่า CD ให้ P เป็นจุดบน AD ซึ่ง $AP = AB$ และ Q เป็นจุดบน CD ซึ่ง $CQ = CB$



จะได้ $\triangle ABP$ และ $\triangle BCQ$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้น เส้นแบ่งครึ่งมุม A และ C จะเป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากกับ PB และ BQ ของสามเหลี่ยม BPQ

$$\text{อนึ่ง จาก} \quad AB + CD = AD + BC$$

$$\text{จะได้} \quad CD - BC = AD - AB$$

$$\text{นั่นคือ} \quad DQ = PD$$

$\triangle DPQ$ จึงเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เส้นแบ่งครึ่งมุม D จะเป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากกับด้าน PQ ของสามเหลี่ยม BPQ เช่นเดียวกัน

โดยที่เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากของรูปสามเหลี่ยมพบกันที่จุดจุดหนึ่ง จะได้เส้นแบ่งครึ่งมุม A, D และ C พบกันที่จุด O ลากเส้นตั้งฉากจาก O ไปยังด้าน AB, AD, CD และ BC ที่จุด X, Y, Z ตามลำดับ

$$\text{จะได้} \quad \triangle AOX \cong \triangle AOY$$

$$\triangle DOY \cong \triangle DOZ$$

$$\text{และ} \quad \triangle COZ \cong \triangle COW$$

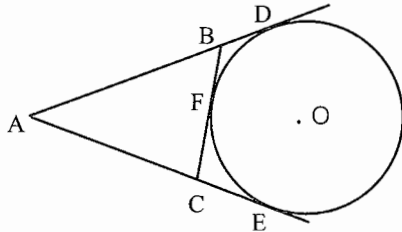
นั่นคือ ได้ $OX = OY$, $OY = OZ$ และ $OZ = OW$ (ม.ม.ด.)

ดังนั้น จุด O จะเป็นจุดศูนย์กลางแนบในสี่เหลี่ยม $ABCD$

คำถาม เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม ซึ่งวงกลมล้อมรอบได้ จะพบกันที่จุดจุดหนึ่งหรือไม่

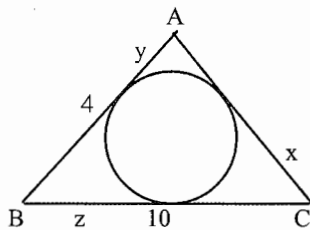
แบบฝึกหัด 4.2

1.



ถ้าวงกลม O รัศมี 5 ซม. แนวนอกรูปสามเหลี่ยม ABC โดยสัมผัสด้าน BC และ $AO = 13$ ซม. จงหาความยาวเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC

2.



จากรูป ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีเส้นรอบรูปยาว 30 ซม.

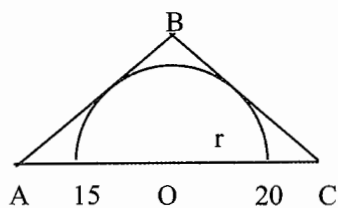
จงหา x, y และ z

3. ถ้า r เป็นรัศมีแนบในของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ซึ่งมีมุมฉากที่ C

จงพิสูจน์ ก. $r = \frac{ab}{a+b+c}$

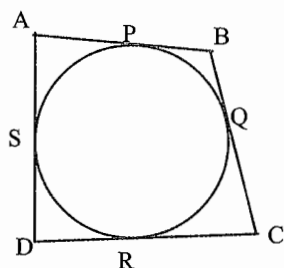
ข. $r = \frac{a+b-c}{2}$

4.



จากรูป จงหา r

5.

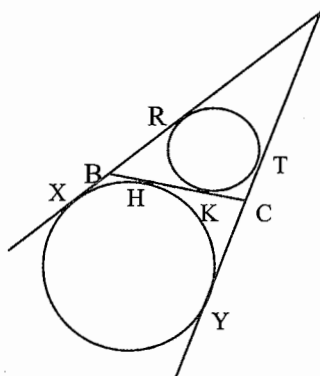


วงกลมแนบในรูปสี่เหลี่ยม $\triangle ABCD$ สัมผัสด้าน AB, BC, CD และ AD ที่จุด P, Q, R และ S ตามลำดับ ถ้า $AP = 3$ ซม. $DS = 4$ ซม., $PB = 6$ ซม. และ $BC = 10$ ซม. จงหา DC และ RC

6. ด้าน BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า R, r แทนรัศมีล้อมรอบและรัศมีแนบในรูปสามเหลี่ยม ABC จงหา $\frac{r}{R}$ เมื่อ $\frac{b}{c} = \sqrt{3}$

7. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี $AB = AC$ วงกลมวงหนึ่งสัมผัสด้าน AB, AC และสัมผัสวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ที่จุด P, Q และ R ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า จุดกึ่งกลางของ $\overline{PQ}$ เป็นจุดศูนย์กลางแนบในของรูปสามเหลี่ยม ABC

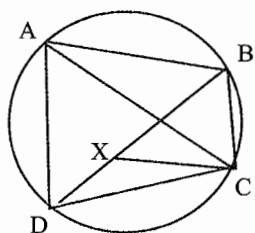
8.



จากรูป จงพิสูจน์ว่า

1. $AX = s$
2. $HK = c - b$
3. $RX = TY = BC$
4. $BH = CK = s - c$

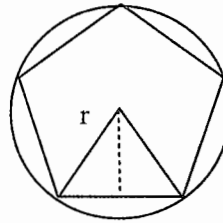
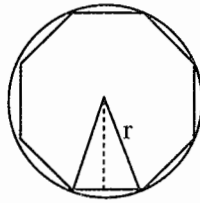
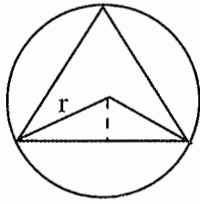
9.



ในรูปสามเหลี่ยม $ABCD$ ซึ่งวงกลมล้อมรอบได้ลากเส้น CX ขนานกับด้าน AB ตัดเส้นทแยงมุม BD ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า AC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม CXD

พื้นที่รูปหลายเหลี่ยมด้านเท่าแนบในและแนบนอกวงกลม

ลากเส้นจากจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบไปยังจุดยอดมุมของรูป n เหลี่ยม ด้านเท่ามุมเท่า มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับแต่ละด้านจะเท่ากับ $\frac{360}{n}$ องศา



จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีความสูง

$$r \cos \frac{180^\circ}{n}$$

ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วยาว

$$2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปจะมีพื้นที่} &= \frac{1}{2} \left(2r \sin \frac{180^\circ}{n} \right) \left(r \cos \frac{180^\circ}{n} \right) \\ &= \left(\sin \frac{180^\circ}{n} \right) \left(\cos \frac{180^\circ}{n} \right) r^2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น พื้นที่รูป } n \text{ เหลี่ยมด้านเท่าแนบในวงกลมคือ } n \left(\sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} \right) r^2$$

เมื่อ n คือ จำนวนด้านของรูป

r คือ รัศมีวงกลมล้อมรอบ

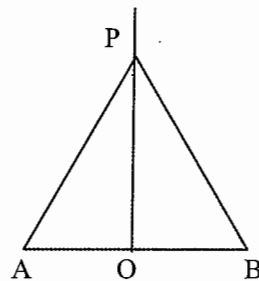
ตัวอย่าง	เมื่อ	$n = 4$	พื้นที่คือ	$4(\sin 45^\circ \cos 45^\circ) r^2 = 2r^2$
		$n = 6$	พื้นที่คือ	$6(\sin 30^\circ \cos 30^\circ) r^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$
		$n = 8$	พื้นที่คือ	$8(\sin \frac{45^\circ}{2} \cos \frac{45^\circ}{2}) r^2 = 2\sqrt{2} r^2$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสแนบในวงกลม เมื่อกำหนดรัศมีของวงกลมเป็น 8 หน่วย
2. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าแนบในวงกลม เมื่อความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็น 18 หน่วย
3. กำหนดให้ความยาวของด้านของรูปหกเหลี่ยมด้านเท่าแนบในวงกลมเป็น 5 หน่วย จงหาพื้นที่ของรูปหกเหลี่ยมนั้น

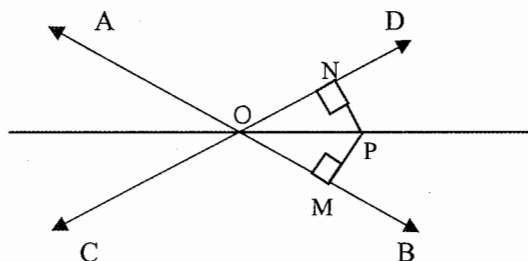
จุด เส้นตรง ที่เกี่ยวข้องกับรูปสามเหลี่ยม

ต้องการหาโลคัสของจุดจุดหนึ่ง ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปจะมีระยะห่างจากจุดสองจุดที่คงที่เท่ากันเสมอ



- กำหนดให้ P เป็นจุดจุดหนึ่ง
A และ B เป็นจุดสองจุดซึ่งคงที่
- ต้องการหา โลคัสของจุด P เมื่อเคลื่อนที่ไป
จะห่างจากจุด A และจุด B เท่ากันเสมอ
- วิธีหา สมมติ P เป็นตำแหน่งใด ๆ ที่จุดเคลื่อนที่ไป
โดยที่ $PA = PB$, O เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB
ลากเส้นเชื่อม OP
ใน $\triangle APO$ และ $\triangle POB$
PO เป็นด้านร่วม
 $PA = PB$ (ตามสมมติฐาน)
 $OA = OB$
 $\triangle APO \cong \triangle POB$
 $\therefore \angle POA = \angle POB$
ดังนั้น PO ตั้งฉากกับ AB
นั่นก็คือ ทุกตำแหน่งของจุด P ซึ่งเคลื่อนที่ไป
โดยที่ระยะห่างจากจุด A และจุด B เท่ากันเสมอ
จุด P จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นตรงซึ่งแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ และตั้งฉากกับ $\overline{AB}$

ต้องการหาโลค์สของจุดจุดหนึ่ง ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไป ระยะตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังเส้นตรงสองเส้น จะเท่ากันเสมอ



กำหนดให้ P เป็นจุดใด ๆ ที่ทำให้
ระยะตั้งฉาก $PM =$ ระยะตั้งฉาก PN
ลาก $\overline{PO}$

วิธีหา ใน $\triangle PMO$ และ $\triangle PNO$

$$\hat{PMO} = \hat{PNO}$$

OP เป็นด้านร่วม

$$PM = PN$$

$$\triangle PMO \cong \triangle PNO \quad (\text{จ.ด.ด.})$$

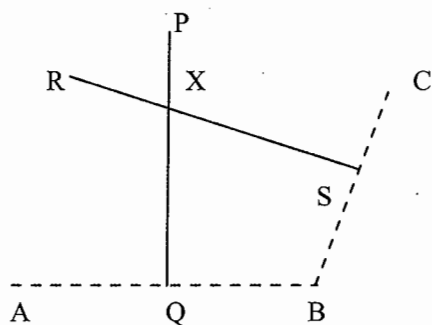
$$\text{ดังนั้น } \hat{POM} = \hat{PON}$$

ดังนั้น จุด P จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{BOD}$

และถ้า P อยู่ภายใน $\hat{AOD}$ จุด P ก็จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นแบ่งครึ่ง $\hat{AOD}$

นั่นก็คือ โลค์สของจุด P ใด ๆ จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นซึ่งแบ่งครึ่งมุมของ AB และ CD ที่ตัดกัน

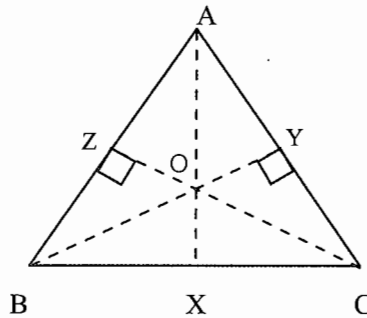
ต้องการหาตำแหน่งของจุดจุดหนึ่ง ซึ่งห่างจากจุดสามจุดเท่ากันเสมอ



X เป็นตำแหน่งของจุดที่ต้องการ

การจวบกันของเส้นตรงในรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากจากจุดกึ่งกลาง และตั้งฉากกับด้านสามด้านของรูปสามเหลี่ยมจะจวบกัน (concurrency แปลว่า จวบกัน)



กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม
 X, Y และ Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน
 BC, CA และ AB ตามลำดับ
 จาก Z และ Y ลากเส้นตั้งฉากกับ AB และ AC ตัดกันที่จุด O
 ลาก $\overline{OX}$

สิ่งที่ต้องการพิสูจน์ $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$

วิเคราะห์ ลาก $\overline{OA}$ $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$

เรียบเรียงการพิสูจน์

เพราะว่า $\overline{YO}$ ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AC}$

ดังนั้น $OA = OC$ (โลคัสของจุดห่างจากจุด A และจุด C เท่ากัน)

ทำนองเดียวกัน

$\overline{ZO}$ ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

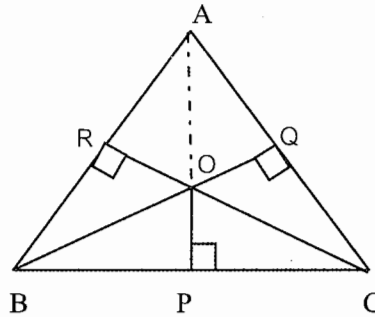
เพราะฉะนั้น $OA = OB$

ดังนั้น $OB = OC$

O เป็นโลคัสของจุดซึ่งอยู่ห่างจากจุด B และจุด C เท่ากัน

ดังนั้น $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงซึ่งลากมาแบ่งครึ่งมุมของรูปสามเหลี่ยมจะจบกัน



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
แบ่งครึ่ง $\hat{A}BC$ และ $\hat{B}CA$
พบกันที่จุด O ลาก $\overline{AO}$

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{OA}$ แบ่งครึ่ง $\hat{B}AC$

วิเคราะห์แนวคิด จาก O ลาก $\overline{CP}$, $\overline{OQ}$
และ $\overline{OR}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$, $\overline{CA}$
และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ

เรียบเรียงการพิสูจน์

เพราะว่า $\overline{OB}$ แบ่งครึ่ง $\hat{A}BC$

ดังนั้น $OP = OR$ (โลคัสของจุดซึ่งห่างจาก AB และ BC เท่ากันเสมอ)

ทำนองเดียวกัน

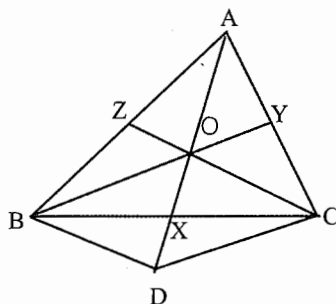
$OP = OQ$ (โลคัสของจุดซึ่งห่างจาก BC และ AC เท่ากันเสมอ)

ดังนั้น $OR = OQ$

O อยู่บนโลคัสของจุดซึ่งห่างจาก $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ เท่ากัน

นั่นคือ $\overline{OA}$ แบ่งครึ่ง $\hat{B}AC$

ทฤษฎีบท เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมจะจwabกัน



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
จุด Y และจุด Z เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$ และ $\overline{AB}$ ตามลำดับ
ลาก $\overline{BY}$ และ $\overline{CA}$ ตัดกันที่จุด O
ลาก $\overline{AO}$ ต่อออกไปพบ $\overline{BC}$ ที่จุด X

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $BX = XC$

สร้าง ลาก $\overline{BD} // \overline{ZC}$
พบ $\overline{AX}$ ที่ต่อออกไปที่จุด D
ลาก $\overline{DC}$

พิสูจน์ ในรูป $\triangle ABD$ $\overline{BD} // \overline{ZC}$
 Z เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$
ดังนั้น O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AD}$
ในรูป $\triangle ADC$
 O เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AD}$
 Y เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AC}$
ดังนั้น $\overline{OY} // \overline{DC}$
หรือ $\overline{BY} // \overline{DC}$

$BOCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$BX = XC$ (เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน)

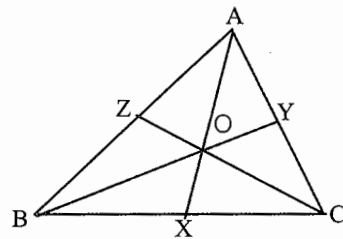
นั่นคือ เส้นมัธยฐานพบกันที่จุดจุดหนึ่ง

ทฤษฎีบท เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมจะแบ่งซึ่งกันและกันออกเป็นอัตราส่วน 2 : 1
หรือจะแบ่งเป็นอัตราส่วน 1 : 3 จากรูปข้างต้น

พิสูจน์

$$\begin{aligned} AO &= OD \\ OX &= \frac{1}{2} OD \\ AO : OX &= 2 : 1 \\ \text{จาก } OX &= \frac{1}{2} OD \\ &= \frac{1}{2} AO \\ OX &= \frac{1}{3} AX \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท รูปสามเหลี่ยมซึ่งถูกแบ่งโดยเส้นมัธยฐานเป็นรูปสามเหลี่ยมเล็ก ๆ 6 รูป จะมีพื้นที่เท่ากัน



พิสูจน์

ในรูป $\triangle ABX$

AO เป็นสองเท่าของ OX

พื้นที่ $\triangle AOB$ เป็นสองเท่าของพื้นที่ $\triangle BXO$ ซึ่งมีส่วนสูงเท่ากัน

พื้นที่ $\triangle AOB$ ประกอบด้วย $\triangle AOZ$ และ $\triangle ZOB$ ซึ่งมีส่วนสูงเท่ากัน

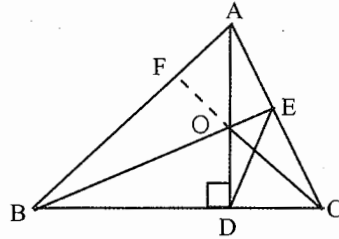
ฐานเท่ากัน ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

$$\therefore \text{พื้นที่ } \triangle BXO = \text{พื้นที่ } \triangle AOZ = \text{พื้นที่ } \triangle ZOB$$

ในทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle BXO &= \text{พื้นที่ } \triangle AOZ = \text{พื้นที่ } \triangle ZOB = \text{พื้นที่ } \triangle AOY \\ &= \text{พื้นที่ } \triangle OYC = \text{พื้นที่ } \triangle XOC \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท เส้นตั้งฉากซึ่งลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้ามจะจบกัน



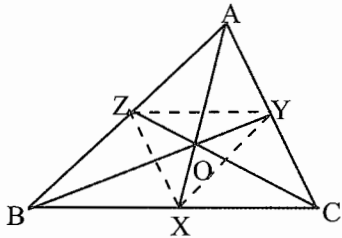
กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
 $\overline{AD}$ และ $\overline{BE}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$ และ $\overline{AC}$ ตามลำดับ
 ให้ $\overline{AD}$ และ $\overline{BE}$ ตัดกันที่จุด O
 ลาก $\overline{CO}$ ต่อไปพบ $\overline{AB}$ ที่ F

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{CF} \perp \overline{AB}$

สร้าง ลาก $\overline{DE}$

พิสูจน์ $\because \widehat{OEC}$ และ $\widehat{ODC}$ เป็นมุมฉาก
 $\therefore$ OECD วงกลมล้อมรอบได้
 $\therefore \widehat{DEC} = \widehat{DOC} = \widehat{FOA}$
 $\because \widehat{AEB} = \widehat{ADB}$ เป็นมุมฉาก
 $\therefore$ AEDB วงกลมล้อมรอบได้
 $\therefore \widehat{DEB} = \widehat{DAB}$ หรือ $\widehat{OAF}$
 $\therefore \widehat{FOA} + \widehat{OAF} = \widehat{DEC} + \widehat{DEB} = 90^\circ$
 ดังนั้น $\widehat{AFO} = 90^\circ$ (ใน $\triangle AFO$)
 $\overline{CF} \perp \overline{AB}$
 นั่นก็คือ เส้นตรง AD, BE และ CF พบกันที่จุด O

หมายเหตุ

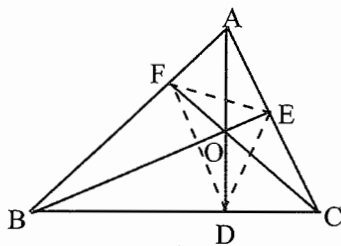


AX , BY และ CZ เป็นเส้นมัธยฐาน

เรียกรูปสามเหลี่ยม XYZ ว่า

รูปสามเหลี่ยมมีเดียน (Medial triangle)

เรียกจุด O ว่า เซนทรอยด์ (Centroid)



AD , BE และ CF เป็นเส้นตั้งฉาก

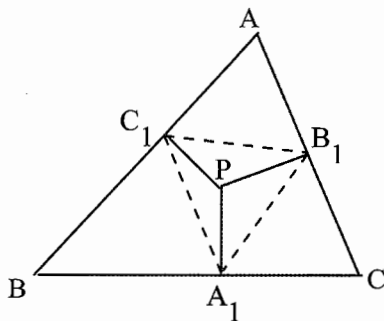
เรียกรูปสามเหลี่ยม DEF ว่า

รูปสามเหลี่ยมพีเดล (Pedal triangle)

หรือรูปสามเหลี่ยมออร์โทเซนตริก (Orthocentric triangle)

เรียกจุด O ว่า จุดออร์โทเซนเตอร์ (Orthocentre)

จากหนังสือ Geometry Revisited by H.S.M. Corcoran and S.L., Greitzer (1967) เรียกรูปสามเหลี่ยม DEF ว่า รูปสามเหลี่ยมออร์ทิก (Orthic triangle) สำหรับรูปสามเหลี่ยมพีเดลนั้น อาจจะมีลักษณะดังต่อไปนี้ก็ได้



ให้ P เป็นจุดใด ๆ ภายในรูปสามเหลี่ยม ABC

ให้ PA_1 , PB_1 และ PC_1 ตั้งฉากกับด้าน BC , CA

และ AB ตามลำดับ

ลาก A_1B_1 , B_1C_1 และ C_1A_1 เรียกรูปสามเหลี่ยม

$A_1B_1C_1$ ว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมพีเดล (Pedal triangle)

และ P เป็นจุดพีเดล (Pedal point)

พิจารณา

AB_1P และ AC_1P เป็นมุมฉาก รูป AB_1PC_1 วงกลมล้อมรอบได้

และมี AP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

หรือ P อยู่บนเส้นรอบวงซึ่งล้อมรอบรูป AB_1C_1

ใช้กฎของไซน์ (Law of sine) กับรูป $\triangle AB_1C_1$ และ $\triangle ABC$ จะได้ว่า

$$\frac{B_1C_1}{\sin A} = AP$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

$$B_1C_1 = a \frac{AP}{2R}$$

ทำนองเดียวกัน

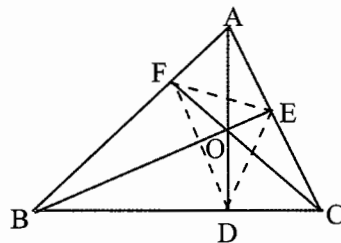
$$C_1A_1 = b \frac{BP}{2R}$$

$$A_1B_1 = c \frac{CP}{2R}$$

ทฤษฎีบท ถ้าจุดพีเคิลมีระยะห่าง x, y และ z จากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC

รูปสามเหลี่ยมพีเคิลจะมีด้านเป็น $\frac{ax}{2R}, \frac{by}{2R}, \frac{cz}{2R}$

ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม เส้นตั้งฉากซึ่งลากจากจุดยอดไปยังด้านตรงข้าม จะแบ่งครึ่งมุมของรูปสามเหลี่ยมพีเคิลซึ่งเส้นนั้นผ่าน



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

AD, BE, CF เป็นเส้นตั้งฉากกับด้าน BC, AC และ AB ตามลำดับ

และตัดกันที่จุด O

ลาก $\overline{DE}, \overline{DF}$ และ $\overline{EF}$

$\triangle DEF$ เป็นรูปสามเหลี่ยมพีเคิล

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ AD, BE, CF แบ่งครึ่ง $\widehat{FDE}, \widehat{DEF}$ และ $\widehat{EFD}$ ตามลำดับ

พิสูจน์ รูป $\square ODCE$ วงกลมล้อมรอบได้
 $\widehat{ODE} = \widehat{OCE}$ (มุมในส่วนของวงกลม)
 รูป $\square ODBF$ วงกลมล้อมรอบได้

$$\widehat{ODF} = \widehat{OBF}$$

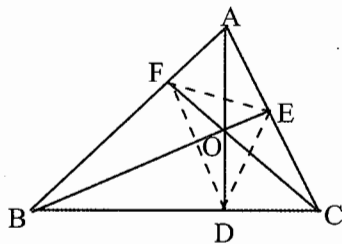
แต่ $\widehat{OCE} = \widehat{OBF}$ (เพราะต่างก็รวมกับ $\widehat{BAC}$ ได้ 90°)

$\therefore \widehat{ODE} = \widehat{ODF}$ นั่นคือ AD แบ่งครึ่ง $\widehat{FDE}$

ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

BE และ CF แบ่งครึ่ง $\widehat{DEF}$ และ $\widehat{EFD}$ ตามลำดับ

บทแทรก 1 ทุก ๆ สองด้านของรูปสามเหลี่ยมพีคัล จะทำมุมกับด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิมเท่ากัน



สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\widehat{EDC} = \widehat{FDB}$$

$$\widehat{DEC} = \widehat{FEA}$$

$$\widehat{DFB} = \widehat{EFA}$$

พิสูจน์ $\widehat{EDC} + \widehat{ODE} = 90^\circ$
 $\widehat{EDC} + \widehat{OCE} = 90^\circ$ ($\widehat{ODE} + \widehat{OCE}$)
 $\widehat{EDC} + \widehat{OCE} = \widehat{OCE} + \widehat{BAC}$
 $\widehat{EDC} = \widehat{BAC}$

ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\widehat{FDB} = \widehat{BAC}$$

$$\therefore \widehat{EDC} = \widehat{FDB} = \widehat{BAC} \quad \therefore \widehat{EDC} = \widehat{FDB}$$

ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\widehat{DEC} = \widehat{FEA} = \widehat{ABC} \quad \therefore \widehat{DEC} = \widehat{FEA}$$

$$\widehat{DFB} = \widehat{EFA} = \widehat{ACB} \quad \therefore \widehat{DFB} = \widehat{EFA}$$

บทแทรก 2 รูป $\triangle DEC$, $\triangle AEF$ และ $\triangle DBF$ คล้ายซึ่งกันและกัน และคล้ายกับ $\triangle ABC$

พิสูจน์

รูป $\square OECD$ วงกลมล้อมรอบได้

$$\hat{DEC} = \hat{DOC} \quad (\text{มุมในส่วนหนึ่งของวงกลมส่วนเดียวกัน})$$

รูป $\square FODB$ วงกลมล้อมรอบได้

$$\hat{FOD} + \hat{FBD} = 180^\circ$$

$$\hat{FOD} + \hat{DOC} = 180^\circ$$

$$\therefore \hat{FBD} = \hat{DOC} = \hat{DEC}$$

ในรูป $\triangle DEC$, $\triangle DBF$

$$\hat{DEC} = \hat{FBD} \quad (\text{พิสูจน์มาแล้ว})$$

$$\hat{EDC} = \hat{FDB} \quad (\text{บทแทรก 1})$$

$$\therefore \hat{DCE} = \hat{BFD}$$

$$\triangle DEC \sim \triangle DBF$$

ในทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า

$$\triangle BFD \sim \triangle EFA$$

$$\text{ดังนั้น } \triangle DEC \sim \triangle DBF \sim \triangle EFA$$

พิจารณา $\triangle DEC$ กับ $\triangle ABC$

$$\hat{ECD} = \hat{BCA}$$

$$\hat{DEC} = \hat{FBD} \text{ หรือ } \hat{ABC} \quad (\text{พิสูจน์แล้ว})$$

$$\therefore \hat{EDC} = \hat{BAC}$$

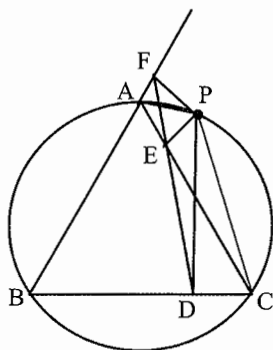
$$\triangle DEC \sim \triangle ABC$$

$$\text{นั่นคือ } \triangle DEC \sim \triangle DBF \sim \triangle EFA \sim \triangle ABC$$

แบบฝึกหัด 5.1

1. ถ้า O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle ABC$ และเส้นตั้งฉาก AD ต่อบน BC ไปพบเส้นรอบวงซึ่งล้อมรอบรูป $\triangle ABC$ ที่จุด G จงพิสูจน์ว่า $OD = DG$
2. ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ด้านสามด้านของรูปสามเหลี่ยมจะเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของรูปสามเหลี่ยมพีคัล และในรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน ด้านซึ่งประกอบมุมป้านจะเป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในที่สมนัยกันของรูปสามเหลี่ยมพีคัล
3. ถ้า O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม ABC แล้ว จุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดคือจุด O , จุด A , จุด B และจุด C จะเป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดประกอบด้วยสามจุดที่เหลือ
4. ถ้า O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูปสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่า $\angle BOC$ และ $\angle BAC$ เป็นมุมประกอบสองมุมฉาก
5. วงกลมสามวงซึ่งผ่านจุดสองจุดของรูปสามเหลี่ยม และจุดออร์โทเซนเตอร์ แต่ละวงจะเท่ากับวงกลมซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนั้น
6. ระยะจากจุดยอดแต่ละยอดของรูปสามเหลี่ยมถึงจุดออร์โทเซนเตอร์เป็นสองเท่าของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยมรูปนั้น ไปยังด้านตรงกันข้าม

ทฤษฎีบท จากจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ลากเส้นจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับด้านทั้งสาม เส้นเชื่อมจุดปลายเส้นตั้งฉากจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



กำหนดให้ ให้ P เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวงซึ่งล้อมรอบ $\triangle ABC$
 ลาก $\overline{PD}$, $\overline{PE}$ และ $\overline{PF}$ ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ และ $\overline{BA}$ ที่จุด D, E, F ตามลำดับ

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จุด D, จุด E และจุด F อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

สร้าง ลาก $\overline{FE}$ และ $\overline{ED}$ ลาก $\overline{PA}$ และ $\overline{PC}$

พิสูจน์ $\therefore \angle PEA$ และ $\angle PFA$ ต่างก็เท่ากับ 90°

$\therefore$ รูป $\square AFPE$ วงกลมล้อมรอบได้

$\angle PEF$ และ $\angle PAF$ (อยู่ในส่วนของวงกลมเดียวกัน)

$$\angle PAF + \angle PAB = 180^\circ$$

$$\angle PAB + \angle PCD = 180^\circ$$

$$\therefore \angle PAF = \angle PCD$$

และ $\angle PEF = \angle PCD$

รูป $\square APCB$ วงกลมล้อมรอบได้

$$\angle PEC = \angle PDC = 90^\circ$$

รูป $\square PEDC$ วงกลมล้อมรอบได้

$$\angle PED + \angle PCD = 180^\circ$$

$$\angle PED + \angle PEF = 180^\circ$$

$\therefore FE$ และ ED อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

นั่นคือ จุด D, E, F อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

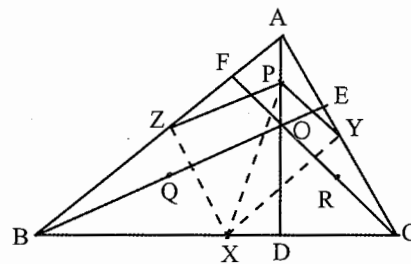
หมายเหตุ เรียกเส้น FED ว่า เส้นพีเดล หรือเส้นซิมป์สัน (Pedal or Simpson's line) ของรูปสามเหลี่ยม ABC สำหรับจุด P

แบบฝึกหัด 5.2

1. จากจุด P ใด ๆ บนวงกลมซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC ลากเส้นตั้งฉาก PD, PF ไปยัง BC และ AB ถ้า FD หรือ FD ที่ต่อออกไป ตัด AC ที่จุด E จงแสดงว่า PE ตั้งฉากกับ AC
2. จงหาโลคัสของจุด ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปจะทำให้เส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากจุดนั้น ไปตั้งฉากกับด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม มีจุดปลายของเส้นตั้งฉากอยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

วงกลมเก้าจุด (The nine points circle)

ทฤษฎีบท ในรูปสามเหลี่ยมใด ๆ จุดปลายของส่วนสูง จุดกึ่งกลางของด้านสามด้าน และจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดทั้งสามกับจุดออร์โทเซนเตอร์ จะอยู่บนเส้นรอบวงเดียวกัน เรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมเก้าจุด



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
 X, Y และ Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ
 D, E และ F เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉาก ซึ่งลากจากจุด A, B และ C ตามลำดับ
 O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์
 P, Q และ R เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นที่ลากจากจุดยอดถึงจุดออร์โทเซนเตอร์

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จุด X, Y, Z, D, E, F, P, Q และ R อยู่บนเส้นรอบวงเดียวกัน
 ลาก XY, XZ, XP, ZP, YP

พิสูจน์ ในรูป $\triangle ABO$
 $AZ = ZB$ (Z เป็นจุดกึ่งกลาง)
 $AP = PO$
 $\therefore ZP \parallel BO$
 ในรูป $\triangle ABC$
 $BZ = ZA$
 $BX = XC$
 $\therefore ZX \parallel AC$
 แต่ BO ต่อกออกไปทำมุมฉากกับ AC ที่จุด E
 $\therefore \angle XZP = 90^\circ$

ทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า $X\hat{Y}P$ เป็นมุมฉาก

$\therefore$ วงกลมผ่านจุด X, Z, P และ Y ซึ่งมี XP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

ทำนองเดียวกันอาจพิสูจน์ได้ว่า วงกลมผ่านจุด Q และจุด R

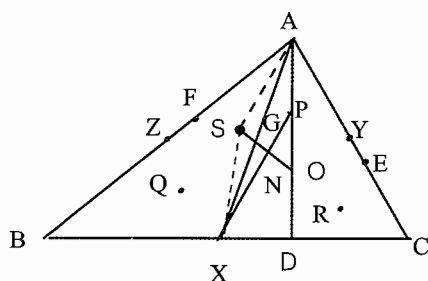
$$\therefore \angle PDX = 90^\circ$$

ดังนั้น วงกลมจะผ่านจุด P, D และ X และมี PX เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

ทำนองเดียวกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า วงกลมผ่านจุด E และจุด F

$\therefore$ วงกลมผ่านจุด X, Y, Z, D, E, F, P, Q และ R

บทแทรก 1. จุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุด คือจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม



กำหนดให้ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง

X, Y และ Z เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA

และ AB ตามลำดับ

D, E และ F เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉากที่ลากมาจากจุดยอด

O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์

S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$

N เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุด

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ N เป็นจุดกึ่งกลางของ SO

สร้าง ลาก XP ตัด SO ที่จุด N

ลาก XA ตัด SO ที่จุด G

ลาก XS, SA

พิสูจน์ เส้นที่ลากจากจุดกึ่งกลางของ XD และตั้งฉากกับ XD จะแบ่งครึ่ง SO (เส้นขนานมีเส้นตัด ถ้าส่วนตัดยาวเท่ากันแล้ว จะแบ่งเส้นตัดอีกเส้นหนึ่งมีอัตราส่วนเท่ากัน)

$$SN = NO$$

ทำนองเดียวกัน เส้นที่ลากจากจุดกึ่งกลางของ YE และตั้งฉากกับ YE จะแบ่งครึ่งเส้น SO

XP และ EY เป็นคอर्डของวงกลมเก้าจุด

$\therefore$ เส้นซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ XD และ EY จะตัดกันที่จุด N

ดังนั้น N เป็นจุดกึ่งกลางของ SO

บทแทรก 2 รัศมีของวงกลมแก้อู๊ด เป็นครึ่งหนึ่งของรัศมีของวงกลมซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนั้น

พิสูจน์ จากที่พิสูจน์มาแล้ว XP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมแก้อู๊ด
จุดกึ่งกลางของ XP คือจุดศูนย์กลาง
แต่จุดกึ่งกลางของ SO เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมแก้อู๊ด (พิสูจน์แล้ว)
 XP และ SO แบ่งครึ่งซึ่งกันและกันที่จุด N
ใน $\triangle SNX$ และ $\triangle ONP$

$$SN = ON$$

$$NX = NP$$

$$\hat{SNX} = \hat{ONP}$$

$$\therefore SX = OP$$

$$= AP$$

และ SX ขนานกับ AP

$$\therefore SA = XP$$

แต่ SA เป็นรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม

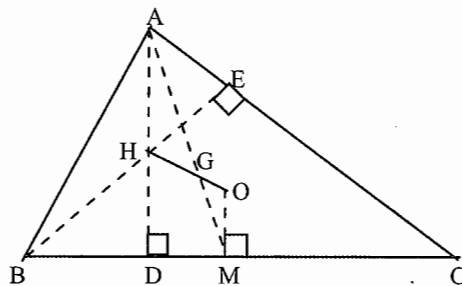
และ XP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมแก้อู๊ด

$\therefore$ รัศมีของวงกลมแก้อู๊ดจะเป็นครึ่งหนึ่งของรัศมีของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม

รูปสามเหลี่ยมมีเดียนและเส้นออยเลอร์ (The Medial Triangle and Euler Line)

ทฤษฎีบท ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

- (i) จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งล้อมรอบจุดออร์โทเซนเตอร์และจุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยมนั้น จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน เรียกเส้นตรงนี้ว่า เส้นออยเลอร์ (Euler line)
- (ii) จุดเซนทรอยด์จะแบ่งระยะจากจุดออร์โทเซนเตอร์ถึงเส้นรอบวงออกเป็นอัตราส่วน 2 : 1



กำหนดให้ ให้ H, G และ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ จุดเซนทรอยด์ และจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$

AM เป็นมัธยฐาน (HGO เป็นเส้นออยเลอร์)

- สิ่งที่ต้องพิสูจน์**
- (i) จุด H, G, O อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน
 - (ii) จุด G จะแบ่งระยะจากจุด H ถึงเส้นรอบวงออกเป็นอัตราส่วน 2 : 1

พิสูจน์ ให้ H, G และ O เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ จุดเซนทรอยด์ และจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ $\triangle ABC$

AM เป็นมัธยฐาน

$\overline{AH}$ และ $\overline{OM}$ ต่างก็ตั้งฉากกับ $\overline{BC}$

$\therefore \overline{AH} \parallel \overline{OM}$

$$\hat{HAG} = \hat{OMG} \quad (\text{มุมแย้ง})$$

$$AG = 2GM \quad (G \text{ เป็นจุดเซนทรอยด์})$$

$$\frac{AG}{AH} = \frac{GM}{OM}$$

$$\triangle AGH \sim \triangle MGO$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{HGA} = \hat{OGM}$$

H, G, O อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

ผลจากรูปสามเหลี่ยมคล้าย $AH = 2OM$

จะได้ $HG = 2GO$

การแบ่งแบบฮาร์โมนิก และการสร้าง

ก่อนที่จะกล่าวถึงการแบ่งแบบฮาร์โมนิก ซึ่งจะสัมพันธ์ไปถึงมัชฌิมฮาร์โมนิก (Harmonic mean) ใคร่ขอกล่าวถึงลำดับเลขคณิต ลำดับเรขาคณิต ลำดับฮาร์โมนิก ในทางพีชคณิตเพื่อนำไปสู่มัชฌิมเลขคณิต มัชฌิมเรขาคณิต และมัชฌิมฮาร์โมนิก ในทางเรขาคณิตต่อไป

ให้ a, b, c เป็นจำนวนสามจำนวน

ลำดับเลขคณิต

$$c - b = b - a \quad b \text{ เป็นมัชฌิมเลขคณิตระหว่าง } a \text{ และ } c$$

ลำดับเรขาคณิต

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{a} \quad b \text{ เป็นมัชฌิมเรขาคณิตระหว่าง } a \text{ และ } c$$

ลำดับฮาร์โมนิก

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c} \quad b \text{ เป็นมัชฌิมฮาร์โมนิกระหว่าง } a \text{ และ } c$$

$$\text{จาก } \frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$$

$$\frac{b-c}{c} = \frac{a-b}{a}$$

$$\text{หรือ } \frac{b-c}{bc} = \frac{a-b}{ab}$$

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

ดังนั้น $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ อยู่ในลำดับเลขคณิต

กำหนดจำนวนสองจำนวน a และ b

มัธยิมเลขคณิต (Arithmetic mean เขียนย่อว่า A.M.)

$$\text{A.M.} = \frac{a+b}{2}$$

มัธยิมเรขาคณิต (Geometric mean เขียนย่อว่า G.M.)

$$\text{G.M.} = \sqrt{ab}$$

มัธยิมฮาร์โมนิก (Harmonic mean เขียนย่อว่า H.M.)

$$\text{H.M.} = \frac{2ab}{a+b}$$

ความหมายทางเรขาคณิตของมัธยิมเลขคณิต และมัธยิมเรขาคณิต

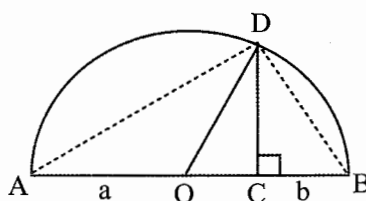
กำหนดส่วนของเส้นตรงยาว a และ b

$\overline{a}$

$\overline{b}$

$$\text{มัธยิมเลขคณิต} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{มัธยิมเรขาคณิต} = \sqrt{ab} \quad \text{ดังนี้}$$



เขียนส่วนของเส้นตรงยาว $a+b$ สร้างครึ่งวงกลมบนส่วนของเส้นตรงนี้โดย

$$AC = a \text{ และ } CB = b$$

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$\overline{CD} \perp \overline{AB}$ พบเส้นรอบวงที่ D

ลาก $\overline{OD}$, $\overline{AD}$, $\overline{DB}$

$$\text{จะได้ } OD = \frac{a+b}{2} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$\triangle ADB$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\angle CDB = \angle DAC$$

$$\triangle ACD \sim \triangle DCB$$

$$\frac{a}{CD} = \frac{CD}{b}$$

$$CD^2 = ab$$

$$CD = \sqrt{ab} \dots\dots\dots(2)$$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า

OD เป็นมัธยิมเลขคณิตของ a, b

CD เป็นมัธยิมเรขาคณิตของ a, b

เนื่องจาก $\triangle OCD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

มีด้าน OD เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

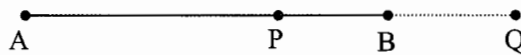
จะได้ว่า $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$

ดังนั้นสรุปได้ว่า $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

และจะเท่ากันในกรณีที่ $a = b$ เท่านั้น

การแบ่งแบบฮาร์มอนิก (Harmonic Section)

ส่วนของเส้นตรงที่ถูกแบ่งทั้งภายในและภายนอก ออกเป็นอัตราส่วนที่เท่ากันเรียกว่า เป็นการแบ่งแบบฮาร์มอนิก



$\overline{AB}$ ถูกแบ่งแบบฮาร์มอนิกที่จุด P และจุด Q

ดังนั้น $AP : PB = AQ : BQ$

P และ Q เป็นสังยุคฮาร์มอนิก (Harmonic conjugate) ของ A และ B

จาก $AP : PB = AQ : BQ$

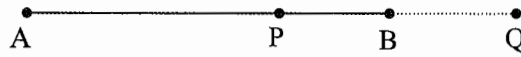
เขียนได้เป็น $AP : AQ = PB : BQ$

จะเห็นว่า ถ้า P และ Q แบ่ง AB ภายในและภายนอกออกเป็นอัตราส่วนเดียวกัน

A และ B จะเป็นสังยุคฮาร์มอนิกของ P และ Q หรืออีกนัยหนึ่ง

ถ้า AB ถูกแบ่งแบบฮาร์มอนิกที่จุด P และจุด Q แล้ว PQ จะถูกแบ่งแบบฮาร์มอนิกที่จุด A และจุด B

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า AB ถูกแบ่งภายในที่จุด P และแบ่งภายนอกที่จุด Q ในอัตราส่วนเดียวกันแล้ว AB จะเป็นมัชฌิมฮาร์โมนิก ระหว่าง AQ และ AP



$$AQ : QB = AP : PB \quad (\text{การแบ่งแบบฮาร์โมนิก})$$

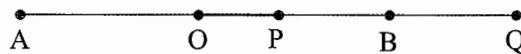
$$AQ : AP = QB : PB$$

$$AQ : AP = AQ - AB : AB - AP$$

$$\therefore AQ, AB, AP \text{ อยู่ในลำดับฮาร์โมนิก}$$

นั่นคือ AB เป็นมัชฌิมฮาร์โมนิก ระหว่าง AQ และ AP

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า AB ถูกแบ่งแบบฮาร์โมนิกที่จุด P และจุด Q O เป็นจุดกึ่งกลางของ AB แล้ว

$$OP \cdot OQ = OA^2$$


AB ถูกแบ่งแบบฮาร์โมนิกที่จุด P และจุด Q

$$\therefore AP : PB = AQ : QB$$

$$\frac{AP - PB}{AP + PB} = \frac{AQ - QB}{AQ + QB}$$

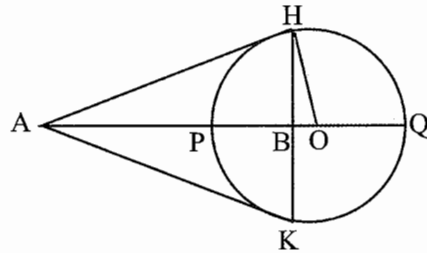
$$\text{หรือ} \quad \frac{2OP}{2OA} = \frac{2OQ}{2OA}$$

$$OP \cdot OQ = OA^2$$

ในทางกลับกัน อาจพิสูจน์ได้ว่า $AP : PB = AQ : QB$

นั่นคือ AB ถูกแบ่งแบบฮาร์โมนิกที่จุด P และจุด Q

ตัวอย่างที่ 3 มัชฌิมเลขคณิต มัชฌิมเรขาคณิต และมัชฌิมฮาร์โมนิก ของส่วนของเส้นตรงสองเส้น



ให้ AP และ AQ เป็นส่วนของเส้นตรงซึ่งสามารถหา A.M., G.M. และ H.M.

สร้างวงกลมบน PQ

จากจุด A ลากเส้นสัมผัส AH และ AK

ลากคอร์ด HK ไปที่จุดสัมผัส ตัด AQ ที่ B

ลาก $\overline{OH}$

i. AO เป็น A.M. ระหว่าง AP และ AQ

$$AO = \frac{1}{2}(AP + AQ)$$

ii AH เป็น G.M. ระหว่าง AP และ AQ

$$AH^2 = AP \cdot AQ \quad (\text{ลากเส้นตัดวงกลม จัตุรัสบนเส้นสัมผัสเท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าของเส้นตัดและส่วนที่อยู่ภายนอก})$$

iii AB เป็น H.M. ระหว่าง AP และ AQ

จาก รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก AOH และ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก HOB

$$\begin{aligned} OH \cdot OB &= OH^2 \\ &= OP^2 \end{aligned}$$

$\therefore$ PQ ถูกแบ่งแบบฮาร์โมนิกที่จุด P และจุด Q

นั่นคือ AB เป็นฮาร์โมนิกระหว่าง AP และ AQ

และจาก $\triangle OAH \sim \triangle HAB$

$$AO \cdot OB = AH^2$$

นั่นก็คือ G.M. ระหว่างส่วนของเส้นตรงสองเส้นเป็นสัดส่วนมัชฌิม (Mean proportional)

ระหว่าง A.M. และ H.M.

แบบฝึกหัด 6.1

1. $\overline{AB}$ ถูกแบ่งแบบฮาร์โมนิกที่จุด X และจุด Y จงแสดงว่า

i
$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{AY}$$

ii
$$\frac{2}{XY} = \frac{1}{BY} + \frac{1}{AY}$$

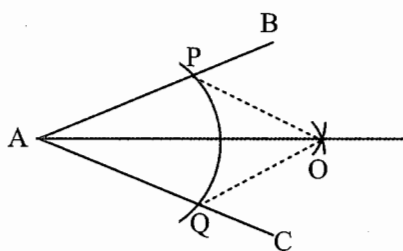
2. ลากส่วนของเส้นตรงจากจุดกึ่งกลางของฐานของรูปสามเหลี่ยมตัดด้านด้านหนึ่งและตัดอีกด้านหนึ่งซึ่งต่อออกไป ลากเส้นผ่านจุดยอดขนานกับฐานส่วนของเส้นตรงนั้นจะถูกแบ่งแบบฮาร์โมนิก
3. P และ Q เป็นสังยุคฮาร์โมนิก ของ A, B และ C เป็นจุดภายนอก
ถ้ามุม PCQ เป็นมุมฉาก แสดงว่า CP และ CQ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมภายในและมุมภายนอกของมุม ACB

การสร้าง (Construction)

การสร้างในวิชาเรขาคณิตเป็นการสร้างรูปเรขาคณิตตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มา ซึ่งจะได้แยกรายละเอียดของการสร้างดังนี้

1. การสร้างเกี่ยวกับเส้นและมุม

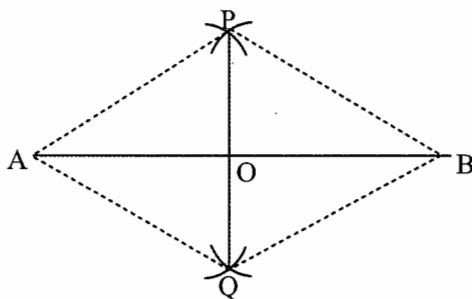
1.1) การแบ่งครึ่งมุมที่กำหนดให้



วิธีสร้าง

1. ใช้ A เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดแขนของมุมที่จุด P และจุด Q
2. ใช้จุด P และ จุด Q เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด O
- 3.ลาก $\overline{AO}$ ได้เส้นแบ่งครึ่งมุมตามต้องการ

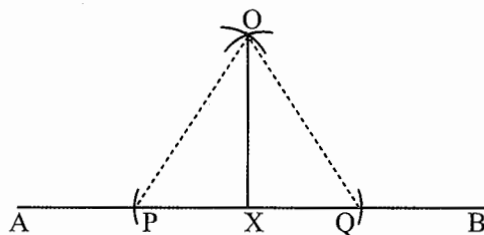
1.2) การแบ่งครึ่งเส้นตรง



วิธีสร้าง

1. ใช้จุด A และจุด B เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดทั้งบนและล่างที่จุด P และจุด Q
2. ต่อ $\overline{PQ}$ ตัด $\overline{AB}$ ที่จุด O
3. จะได้ว่า $AO = OB$
จะได้ว่าจุด O แบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงตามต้องการ

1.3) ลากเส้นตั้งฉากจากจุดภายในเส้นตรง

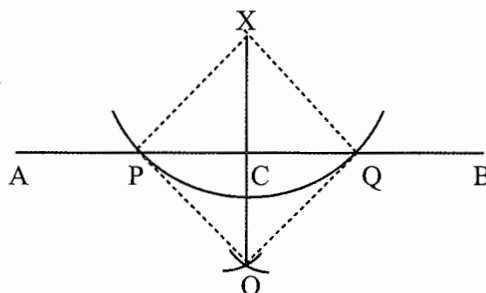


วิธีสร้าง

1. ใช้จุด X เป็นจุดศูนย์กลางตัด $\overline{AB}$ ออกยาวเท่ากันที่จุด P จุด Q
2. ใช้จุด P และจุด Q เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด O
3. ลาก $\overline{OX}$

จะได้ว่า $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ตามต้องการ

1.4) ลากเส้นตั้งฉากจากจุดภายนอกเส้นตรง

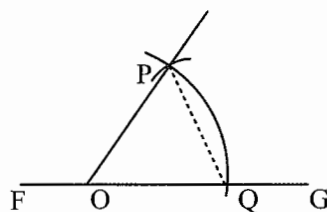
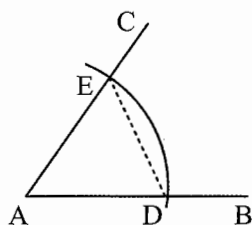


วิธีสร้าง

1. ใช้จุด X เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัด $\overline{AB}$ ที่จุด P และจุด Q
2. ใช้จุด P และจุด Q เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด O
3. ลาก $\overline{OX}$

จะได้ว่า $\overline{XC}$ เป็นเส้นตั้งฉากตามต้องการ

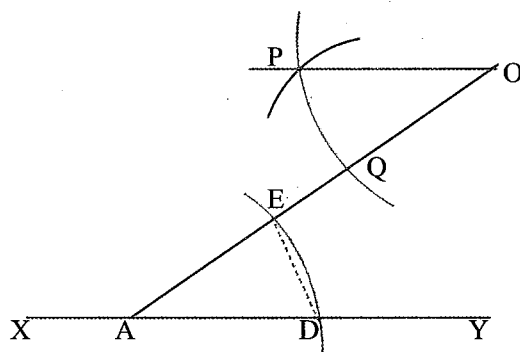
1.5) สร้างมุมเท่ากับมุมที่กำหนดให้



วิธีสร้าง

1. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งตัดแขนของมุม AB และ AC ที่จุด D และจุด E ตามลำดับ เขียนส่วนโค้งขนาดเดียวกัน บนเส้นตรง FG โดยใช้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางตัด $\overline{FG}$ ที่จุด Q
2. ใช้จุด Q เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ DE เขียนส่วนโค้งตัดส่วนโค้งเดิมที่จุด P
3. ต่อ $\overline{OP}$
จะได้ว่า มุม POG เท่ากับมุม CAB ตามต้องการ

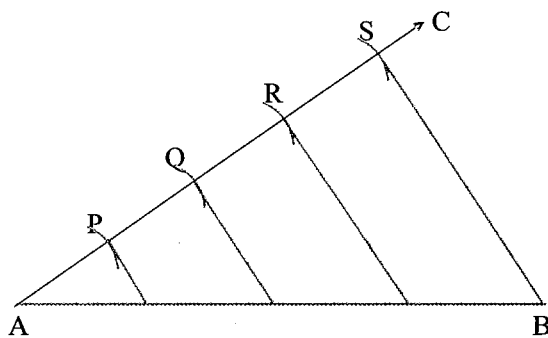
1.6) ลากเส้นตรงขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้ โดยผ่านจุดที่กำหนดให้



วิธีสร้าง

1. ให้จุด A เป็นจุดบนเส้นตรง XY ลาก $\overline{OA}$
2. สร้างมุม $\angle YAO = \angle AOP$ ตามวิธีสร้างมุมเท่ากัน
จะได้ว่า $\overline{OP} \parallel \overline{XY}$ ตามต้องการ

1.7) แบ่งเส้นตรงออกเป็นส่วน ๆ เท่ากัน

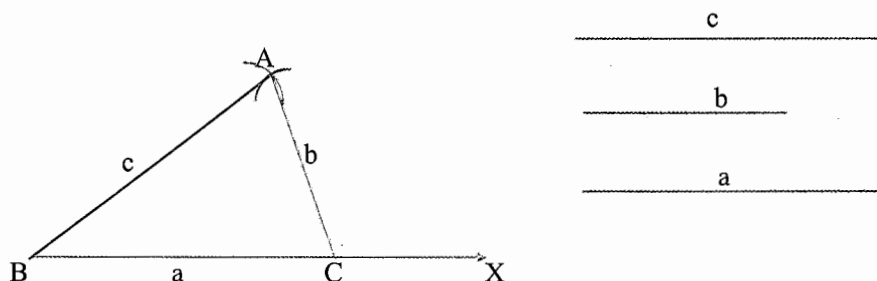


วิธีสร้าง

1. ลากรังสี AC ยาวพอสมควร
2. เขียนส่วนโค้งตัด $\overrightarrow{AC}$ ออกเป็นส่วน ๆ เท่ากันที่จุด P จุด Q จุด R และจุด S
3. ต่อ $\overline{SB}$
4. ที่จุด P จุด Q และจุด R ลากเส้นขนานกับ SB พบ AB
จะได้ว่า AB ถูกแบ่งออกเป็นสี่ส่วนเท่ากัน

2. การสร้างเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม

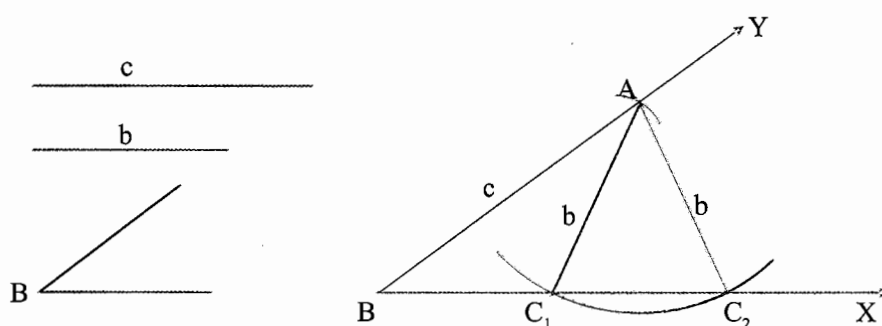
2.1) สร้างรูปสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดด้านให้มาสามด้าน



วิธีสร้าง

1. ลากรังสี BX
 2. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ a เขียนส่วนโค้งตัด BX ที่จุด C
 3. ใช้จุด B และจุด C เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี c และ b ตามลำดับ เขียนส่วนโค้ง ตัดกันที่จุด A
 4. ต่อ $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$
- จะได้ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

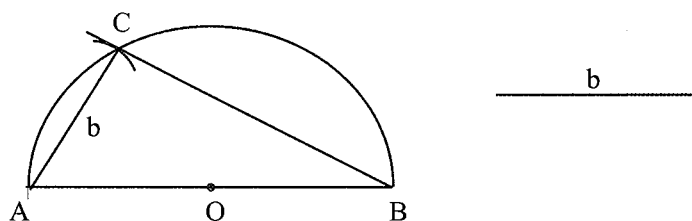
2.2) สร้างรูปสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดมุมหนึ่งมุม และด้านสองด้าน



วิธีสร้าง

1. ลาก $\overline{BX}$
 2. สร้างมุม YBX เท่ากับมุม B ที่กำหนดให้
 3. ใช้จุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ c เขียนส่วนโค้งตัด BY ที่จุด A
 4. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ b เขียนส่วนโค้งตัด BX ที่จุด C_1 , จุด C_2
 5. ลาก $\overline{AC_1}$ และ $\overline{AC_2}$
- จะได้ว่า $\triangle ABC_1$ และ $\triangle ABC_2$ เป็นรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

2.3) สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเมื่อกำหนดด้านตรงข้ามมุมฉากและด้านประกอบมุมฉากหนึ่งด้าน

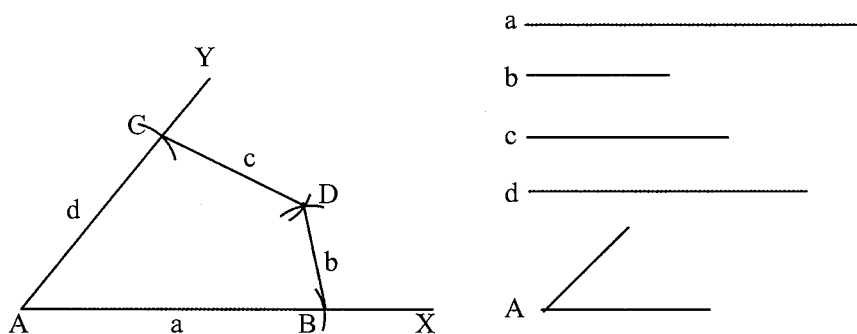


วิธีสร้าง

1. เขียนครึ่งวงกลมบนด้าน AB โดยการแบ่งครึ่งส่วนของเส้นตรงที่จุด O จะได้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม
 2. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมีเท่ากับ b ตัดเส้นรอบวงที่จุด C
 3. ต่อ $\overline{AC}$ และ $\overline{CB}$
- จะได้ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามต้องการ

3. การสร้างรูปสี่เหลี่ยม

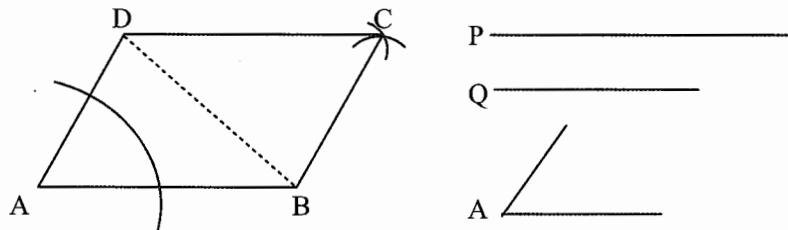
3.1) สร้างรูปสี่เหลี่ยมเมื่อกำหนดด้านสี่ด้าน และมุมหนึ่งมุม



วิธีสร้าง

1. สร้างมุม XAY เท่ากับมุม A
 2. ใช้จุด A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ a และ d ตัด $\overrightarrow{AX}$ ที่จุด B และตัด $\overrightarrow{AY}$ ที่จุด C ตามลำดับ
 3. ใช้จุด B และจุด C เป็นจุดศูนย์กลางเขียนส่วนโค้งรัศมี b และ c ตัดกันที่จุด D
 4. ต่อ $\overline{DC}$ และ $\overline{BC}$
- จะได้ว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมตามต้องการ

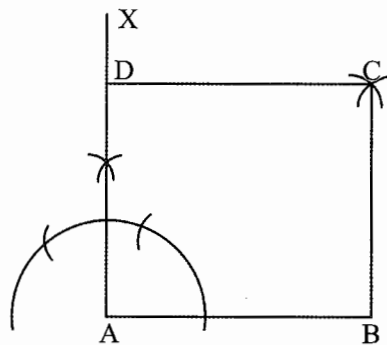
3.2) สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยการกำหนดด้านประชิดและมุมระหว่างด้านทั้งสอง



วิธีสร้าง

1. สร้าง $\overline{AB}$ ยาวเท่ากับ P ทำมุม BAD เท่ากับมุม A ลาก AD ยาวเท่ากับ Q
 2. ใช้จุด D และจุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ AB และ AD ตามลำดับตัดกันที่จุด C
 3. ต่อ $\overline{DC}$ และ $\overline{BC}$
- จะได้ว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามต้องการ

3.1) สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านที่กำหนดให้

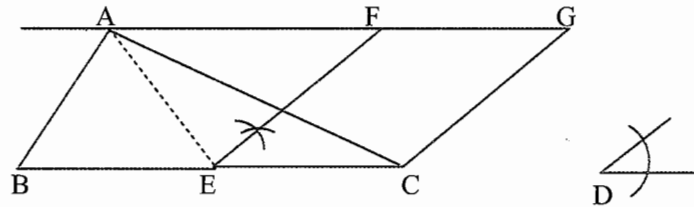


วิธีสร้าง

1. สร้าง $\overline{AX} \perp \overline{AB}$ ตัด $\overline{AX}$ ที่จุด D ให้ $AD = AB$
 2. ใช้จุด B และจุด D เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวเท่ากับ AB เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด C
 3. ต่อ $\overline{DC}$ และ $\overline{BC}$
- จะได้ว่า $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ตามต้องการ

4. การสร้างเกี่ยวกับพื้นที่

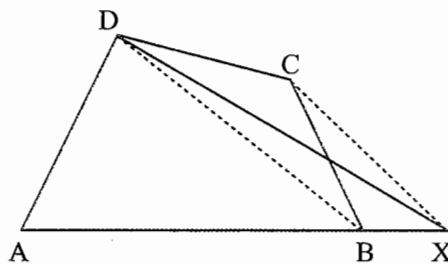
4.1) สร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยม โดยกำหนดมุมประชิดให้



วิธีสร้าง

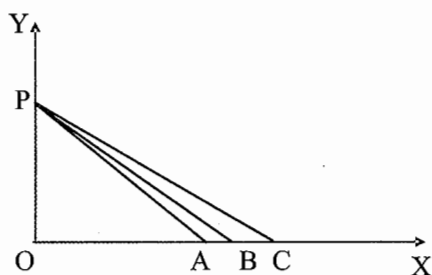
1. แบ่งครึ่ง $\overline{BC}$ ที่จุด E
 2. ที่จุด E ทำมุม CEF เท่ากับมุม D
 3. ลาก $\overline{AFG} \parallel \overline{BC}$
 4. ที่จุด C ลาก $\overline{CG} \parallel \overline{EF}$
- จะได้ว่า $\square EFGC$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานตามต้องการ

4.2) สร้างรูปสามเหลี่ยมเท่ากับรูปสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้



วิธีสร้าง

1. ลาก $\overline{BD}$
 2. ที่จุด C ลาก $\overline{CX}$ ขนานกับ $\overline{BD}$ พบ $\overline{AB}$ ที่ต่อออกไปที่จุด X
 3. ลาก $\overline{DX}$
- จะได้ว่า $\triangle DAX$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ



จากรูป

$$\begin{aligned}
 PA^2 &= OP^2 + OA^2 \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2 \\
 PA &= \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

บน OX สร้าง OB ยาวเท่ากับ PA ลาก PB

$$\begin{aligned}
 PB^2 &= OP^2 + OB^2 \\
 &= 1 + (\sqrt{2})^2 \\
 &= 1 + 2 \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

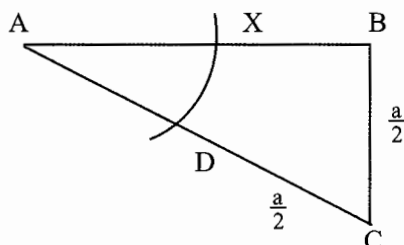
$$\therefore PB = \sqrt{3}$$

บน OX สร้าง OC ยาวเท่ากับ PB และลาก PC

$$\begin{aligned}
 PC^2 &= OP^2 + OC^2 \\
 &= 1 + (\sqrt{3})^2 \\
 &= 1 + 3 \\
 &= 4 \\
 PC &= \sqrt{4}
 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน อาจหาความยาวของด้านเป็น $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \dots$

- 4.5) แบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ โดยที่พื้นที่รูปสามเหลี่ยมผืนผ้าที่ประกอบด้วยส่วนทั้งหมด และส่วนแบ่งส่วนหนึ่งเท่ากับจัตุรัสบนส่วนแบ่งอีกส่วนหนึ่ง



ให้ AB เป็นเส้นตรงซึ่งถูกแบ่งที่จุด X ทำให้ $AB \cdot BX = AX^2$

วิธีสร้าง

ลาก $\overline{AB}$ ให้ยาว a

ลาก $\overline{BC} \perp \overline{AB}$ และยาว $\frac{a}{2}$

ลาก $\overline{AC}$ ตัด $\overline{AC}$ ที่จุด D ให้ $CD = \frac{a}{2}$

ให้ A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี AD เขียนส่วนโค้งตัด $\overline{AB}$ ที่จุด X
 X เป็นจุดแบ่งตามต้องการ

พิสูจน์

ให้ AX ยาว x หน่วย

XB ยาว $a - x$ หน่วย

$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= (AC - BC)(AC + BC)$$

$$a^2 = \left(x + \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)$$

$$= x\left(x + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)$$

$$= x(x + a)$$

$$= x^2 + ax$$

$$a^2 - ax = x^2$$

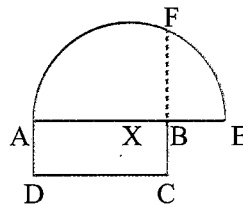
$$a(a - x) = x^2$$

$$AB \cdot BX = AX^2$$

หมายเหตุ

การแบ่งดังข้างต้นเรียกว่า ภาคตัดมัธยะ (Medial section) มีความหมายเหมือนกับ Golden section

4.6) สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่กำหนดให้



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

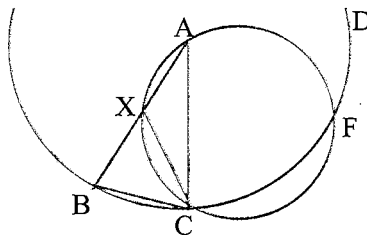
สร้าง ต่อ $\overline{AB}$ ไปทางจุด B ถึงจุด E

ให้ $BE = BC$

สร้างครึ่งวงกลมบน $\overline{AE}$ ต่อ $\overline{CB}$ ไปพบเส้นรอบวงที่จุด F
BF เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ต้องการ

5. การสร้างทั่วไป

5.1 สร้างรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ให้มีมุมที่ฐานใดเป็นสองเท่าของมุมยอด



สร้าง ลากเส้น AB และแบ่ง AB ที่จุด X ให้ $AB \cdot BX = AX^2$

ให้ A เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี AB เขียนวงกลม BCD

ลากคอร์ด BC เท่ากับคอร์ด AX

ลาก $\overline{AC}$

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ

พิสูจน์ ลาก $\overline{XC}$ สร้างวงกลมล้อมรอบจุด A จุด X และจุด C

$$\begin{aligned} BA \cdot BX &= AX^2 && \text{(สร้าง)} \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

BC สัมผัสวงกลม AXC ที่จุด C

$$\therefore \widehat{BCX} = \widehat{XAC}$$

$$\widehat{BCX} + \widehat{XCA} = \widehat{XAC} + \widehat{XCA}$$

$$\widehat{BCA} = \widehat{XAC} + \widehat{XCA}$$

$$= \widehat{CXB}$$

$$\text{และ } \widehat{BCA} = \widehat{CBA} \quad \text{เพราะ } AB = AC$$

$$\therefore \widehat{CBA} = \widehat{CXB}$$

$$\widehat{CBX} = \widehat{CXB}$$

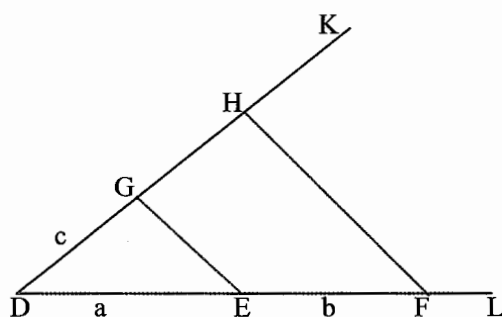
$$\therefore CB = CX = AX$$

$$\therefore \widehat{XAC} = \widehat{XCA}$$

$$\therefore \widehat{XAC} + \widehat{XCA} = 2\widehat{BAC}$$

$$\begin{aligned} \text{แต่ } \widehat{BCA} = \widehat{CBA} &= \widehat{XAC} + \widehat{XCA} \\ &= 2\widehat{BAC} \end{aligned}$$

5.2) หาสัดส่วนที่สี่เมื่อกำหนดเส้นตรงสามเส้นให้



a
b
c

สร้าง

สร้างมุม KDL

$$\text{ให้ } DE = a$$

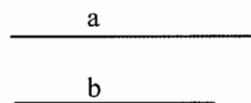
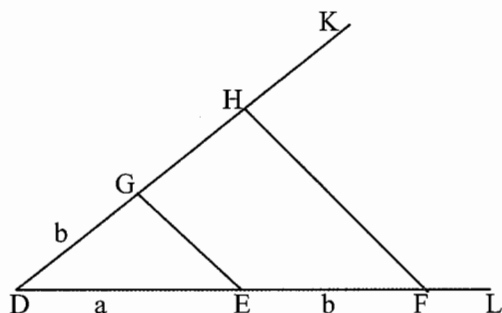
$$EF = b$$

$$DG = c \quad \text{ลาก } EG, FH \parallel EG$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{GH}$$

GH เป็นสัดส่วนที่สี่

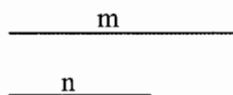
5.3) หาสัดส่วนที่สามเมื่อกำหนดเส้นตรงสองเส้นให้



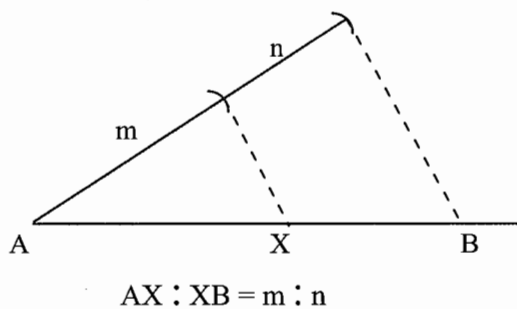
จะได้ $\frac{a}{b} = \frac{b}{GH}$

GH เป็นสัดส่วนที่สาม

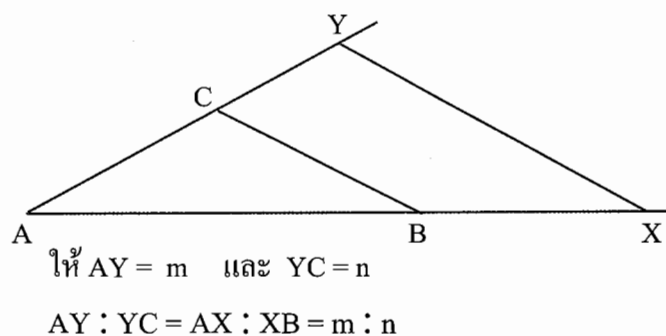
5.4) แบ่งเส้นตรงที่กำหนดให้ออกเป็นภายในและภายนอกตามอัตราส่วนที่กำหนดให้



ก. แบ่งภายในเส้นตรง AB เป็นอัตราส่วน $m:n$

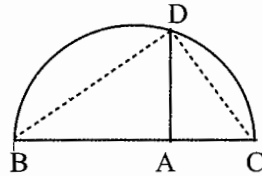


ข. แบ่งภายนอกเส้นตรง AB เป็นอัตราส่วน $m:n$



5.5) สัดส่วนมัชฌิม (Mean proportional)

หาสัดส่วนมัชฌิมระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้

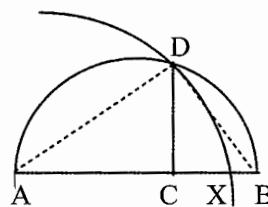


กำหนดให้ AB และ AC เป็นเส้นตรงสองเส้น

สร้าง สร้างครึ่งวงกลมบน $\overline{BC}$
จากจุด A ลากเส้น $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ตัดวงกลมที่จุด D
AD เป็นสัดส่วนมัชฌิมระหว่างเส้นตรง AB และ AC

พิสูจน์ ลาก $\overline{BD}$ และ $\overline{DC}$
 $\triangle ABD \sim \triangle ADC$
 $AB : AD = AD : AC$
AD เป็นสัดส่วนมัชฌิมระหว่าง AB และ AC

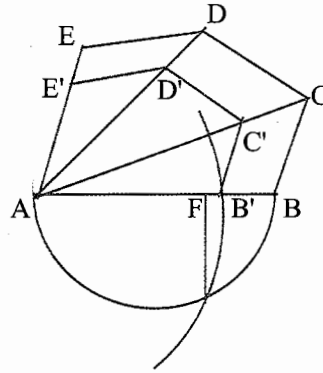
หมายเหตุ ถ้าเส้นตรง AB และ AC ซ้อนกัน จะหาสัดส่วนมัชฌิมดังนี้



AX เป็นสัดส่วนมัชฌิมระหว่าง AC และ AB

พิสูจน์ $\triangle ABX \sim \triangle CXB$
 $AB : CX = CX : CB$
 $AB : AX = AX : AC$

- 5.6) สร้างรูปเชิงเส้นตรง(Rectilinear figure) ให้คล้ายกับรูปเชิงเส้นตรงที่กำหนดให้ และมีพื้นที่เท่ากับเศษส่วนที่กำหนดให้



กำหนดให้ รูปเชิงเส้นตรง ABCDE

ต้องการสร้าง รูปเชิงเส้นตรง $AB'C'D'E'$ ให้มีพื้นที่เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ของพื้นที่ ABCDE

วิธีสร้าง ให้ $AF = \frac{3}{4}$ ของ AB

บน AB ตัด AB' ซึ่งเป็นสัดส่วนมัธยม ระหว่าง AF และ AB

บน AB' สร้างรูปเชิงเส้นตรง $AB'C'D'E'$ คล้ายกับรูปเชิงเส้นตรง ABCDE

จะได้ว่า $AB'C'D'E' = \frac{3}{4} ABCDE$

พิสูจน์ $AB'^2 = AF \cdot AB$

รูป ABCDE และรูป $AB'C'D'E'$ คล้ายกัน

AB และ AB' เป็นด้านที่สมนัยกัน

$$\frac{\text{รูป } AB'C'D'E'}{\text{รูป } ABCDE} = \frac{AB'^2}{AB^2}$$

$$= \frac{AF \cdot AB}{AB^2}$$

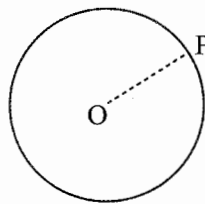
$$= \frac{AF}{AB}$$

$$= \frac{3}{4}$$

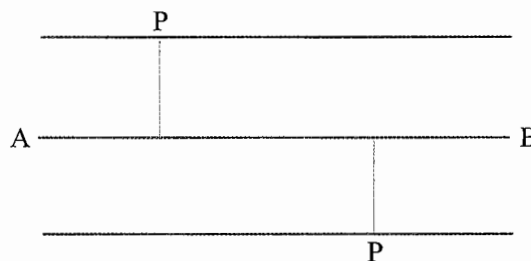
6. โลไซ (Loci)

บทนิยาม โลไค์ของจุดจุดหนึ่ง หมายถึง ทางเดินของจุดที่เคลื่อนที่ไปตามกฎเกณฑ์ที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 1 จงหาโลไค์ของจุด P ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปที่ใดก็ตาม จะห่างจากจุดคงที่เท่ากันเสมอ
โลไค์ของจุด P ก็คือ เส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมีระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันเสมอ

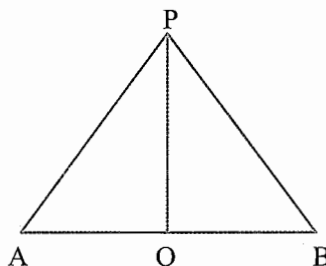


ตัวอย่างที่ 2 จงหาโลไค์ของจุด P ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปที่ใดก็ตาม จะห่างจากเส้นตรงที่คงที่เท่ากันเสมอ



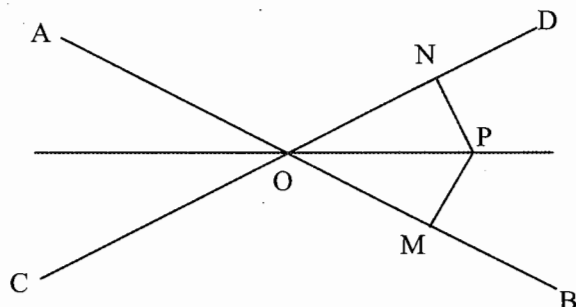
โลไค์ของจุด P ก็คือ ทางเดินของจุดที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่กำหนดให้

6.1) จงหาโลไค์ของจุดจุดหนึ่งซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปที่ใดก็ตาม จะมีระยะห่างจากจุดคงที่สองจุดเท่ากันเสมอ



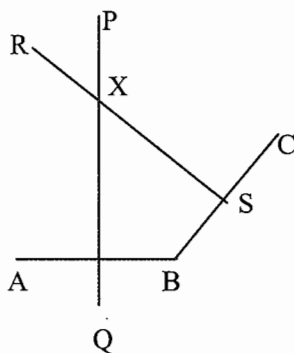
โลไค์ของจุด P ซึ่งห่างจากจุด A และจุด B เท่ากันเสมอ จะเดินไปบนส่วนของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากและแบ่งครึ่ง AB ที่จุด O

- 6.2) จงหาโลศของจุดจุดหนึ่ง ซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปในที่ใดก็ตามจะมีระยะห่างจากเส้นตรงสองเส้นเท่ากันเสมอ



โลศของจุด P จะเดินไปบนเส้นแบ่งครึ่งมุม ระหว่างเส้นตรง AB และ CD
ซึ่งทำให้ระยะ $PN = PM$

- 6.3) จงหาโลศของจุดจุดหนึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปในที่ใดก็ตาม จะมีระยะห่างจากจุดสามจุดคือจุด A จุด B และจุด C ซึ่งไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน

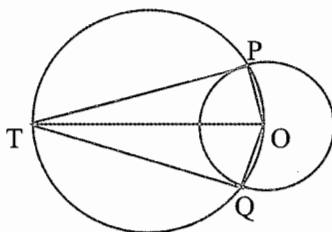


โลศของจุดซึ่งห่างจากจุด A และจุด B เท่ากันจะเคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง PQ ซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB โลศของจุดซึ่งห่างจากจุด B และจุด C เท่ากัน จะเคลื่อนที่ไปบนเส้นตรง RS ซึ่งแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC ดังนั้น X ซึ่งเป็นจุดตัดของ PQ และ RS จะมีระยะห่างจากจุด A จุด B และจุด C เท่ากัน

สร้าง ลาก $\overline{AB}$ แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C ลากเส้นตั้งฉาก CD ตัดส่วนโค้งของวงกลม

$$\widehat{AB} = \widehat{DB}$$

7.3) จากจุดภายนอกวงกลมลากเส้นสัมผัสสองเส้น



กำหนดให้ ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้

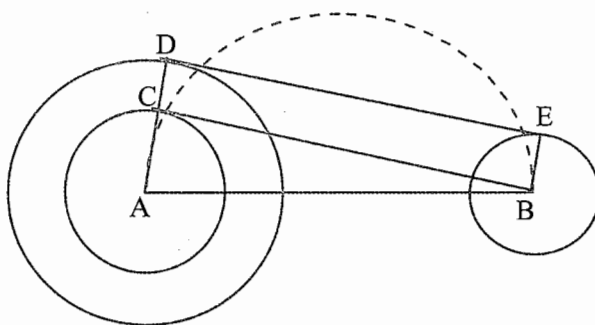
T เป็นจุดภายนอกวงกลม

สร้าง ลาก $\overline{TO}$ สร้างวงกลมบน $\overline{TO}$ ตัดวงกลม O ที่จุด P และจุด Q

ลาก $\overline{TP}$ และ $\overline{TQ}$

TP และ TQ เป็นเส้นสัมผัส

7.4) ลากเส้นสัมผัสร่วม ให้สัมผัสวงกลมสองวง



สร้าง A และ B เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวง

ที่จุด A สร้างวงกลมรัศมีเท่ากับผลต่างระหว่างรัศมีวงกลม A และวงกลม B

สร้างครึ่งวงกลมบน AB ลากเส้นสัมผัส BC

ลาก $\overline{AC}$ ต่อไปพบวงกลม A ที่จุด D

ลาก $\overline{BE}$ ขนานกับ $\overline{CD}$

ลาก $\overline{DE}$

DE เป็นเส้นสัมผัสร่วมของวงกลม A และวงกลม B

สร้าง แบ่งครึ่ง $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ พบกันที่จุด S

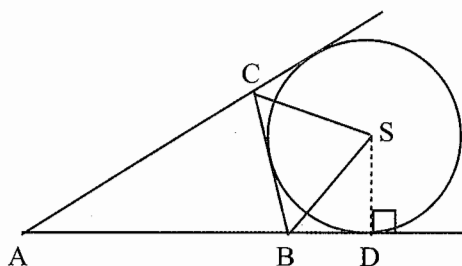
ลาก $\overline{SD} \perp \overline{BC}$

S เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

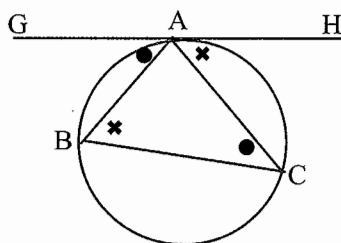
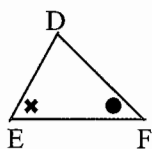
SD เป็นรัศมีของวงกลม

สร้างวงกลมบรรจุภายในรูปสามเหลี่ยมตามต้องการ

7.8) สร้างวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้



7.9) สร้างรูปสามเหลี่ยมแนบในวงกลม ให้มีมุมเท่ากับมุมของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้



สร้าง ให้ A เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวง

ลาก $\overline{GH}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A

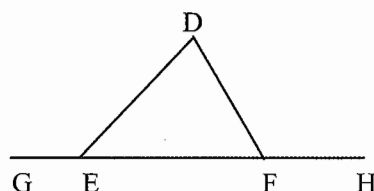
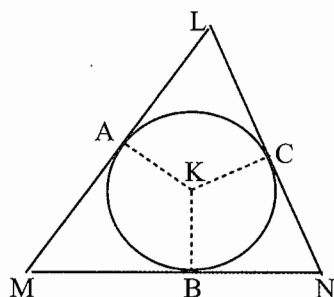
ที่จุด A ทำมุม $\hat{GAB} = \hat{F}$

และทำมุม $\hat{HAC} = \hat{E}$

ลาก $\overline{BC}$

ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมบรรจุในวงกลมตามต้องการ

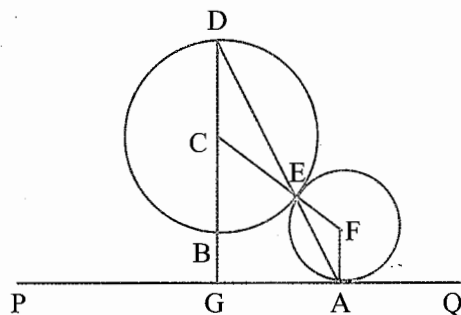
7.10) สร้างรูปสามเหลี่ยมแนบนอกวงกลม ให้มีมุมเท่ากับมุมของรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้



สร้าง แบ่งครึ่ง $\widehat{ABC}$ และ $\widehat{BCD}$ พบกันที่จุด O

O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่แนบในและแนบนอกรูปหลายเหลี่ยมปกติ

ตัวอย่างที่ 1 สร้างวงกลมวงหนึ่งสัมผัสวงกลมที่กำหนดให้ และสัมผัสเส้นตรง PQ ที่กำหนดให้ ที่จุด A



วิธีสร้าง ที่จุด A ลาก $\overline{AF} \perp \overline{PQ}$

ดังนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการจะอยู่บน $\overline{AF}$

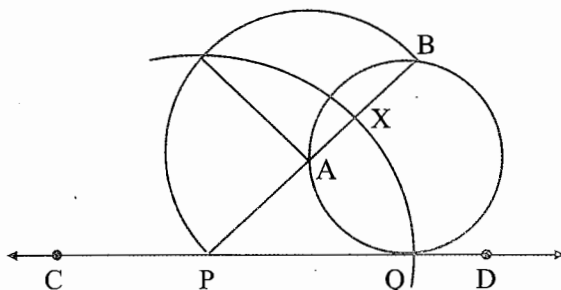
ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่กำหนดให้

ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง $\overline{DB} \perp \overline{PQ}$ ที่จุด G ลาก $\overline{AD}$ ตัดเส้นรอบวงที่จุด E

ลาก $\overline{CE}$ และต่อออกมาตัด $\overline{AF}$ ที่จุด F

F จะเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ และมีรัศมียาวเท่ากับ FA

ตัวอย่างที่ 2 สร้างวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดสองจุด A และจุด B ที่กำหนดให้ และสัมผัสกับเส้นตรง CD



วิธีสร้าง ลาก $\overline{BA}$ ต่อไปพบ $\overline{CD}$ ที่จุด P

หา PX ซึ่งเป็นสัดส่วนมัธยม ระหว่าง PA และ PB

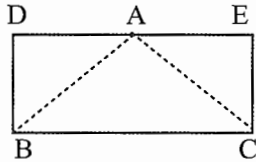
(สร้างครึ่งวงกลมบน PB จากจุด A ลากเส้นตั้งฉาก) ตัด $PQ = PX$

วงกลมที่ผ่านจุด A, B และ Q จะสัมผัส CD ที่จุด Q

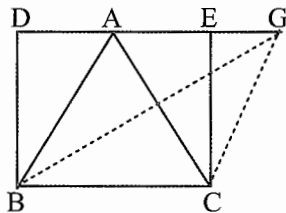
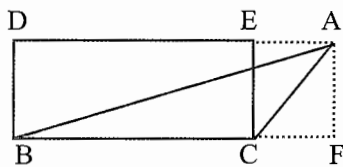
แบบฝึกหัด 6.2

1. จากจุด P และจุด Q ซึ่งอยู่บนข้างเดียวกันของ $\overline{AB}$ ลากส่วนของเส้นตรงสองเส้นพบกันบน $\overline{AB}$ และทำมุมเท่ากัน
2. จงหาจุดจุดหนึ่งซึ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปจะห่างจากจุดสามจุด ซึ่งไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน เท่ากันเสมอ
3. จงสร้างรูปสามเหลี่ยม ให้ $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ เท่ากับ $\hat{L}$ และ $\hat{M}$ ที่กำหนดให้ และเส้นตั้งฉากจากจุด A ซึ่งลากมายัง $\overline{BC}$ เท่ากับเส้นตรง P ที่กำหนดให้
4. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ และมีส่วนสูงเท่าที่กำหนดให้
5. จงแบ่งครึ่งพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม โดยลากเส้นตรงผ่านจุดที่กำหนดให้ ซึ่งอยู่บนด้านใดด้านหนึ่ง
6. จงแบ่งพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมออกเป็นสามส่วนเท่า ๆ กัน โดยลากเส้นตรงจากจุดที่กำหนดให้ ซึ่งอยู่บนด้านใดด้านหนึ่ง

พื้นที่

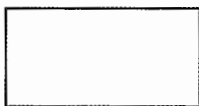


พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
ซึ่งตั้งอยู่บนฐานเดียวกัน และมีส่วนสูงเท่ากัน



พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งตั้งอยู่ระหว่างคู่ขนานเดียวกัน
ย่อมมีพื้นที่เท่ากัน

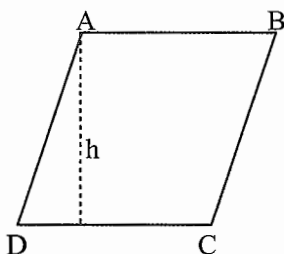
สูตรการหาพื้นที่



1. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า = ความกว้าง $\times$ ความยาว



2. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส = (ด้าน)²

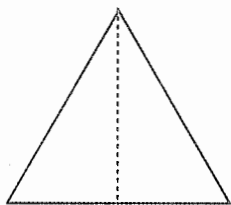


3. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน = ความยาวของฐาน $\times$ ความสูง
จากรูป ให้ $\overline{AD}$ ยาว a $\overline{DC}$ ยาว b ส่วนสูงยาว h
พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD

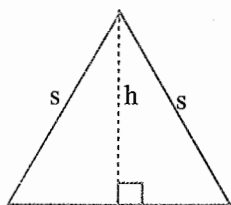
$$= bh$$

$$= b \times a \sin D \text{ (ดู } \triangle ADE \text{)}$$

$$= ab \sin D$$



4. พื้นที่รูปสามเหลี่ยม = $\frac{1}{2} \times \text{ความยาวของฐาน} \times \text{ความสูง}$



5. พื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า = $\frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}$

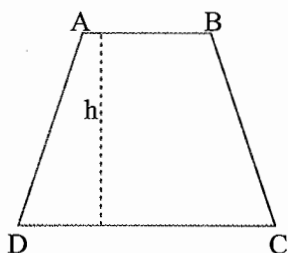
หรือพื้นที่รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า = $\frac{1}{3} h^2 \sqrt{3}$

6. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านยาว a, b และ c ตามลำดับ

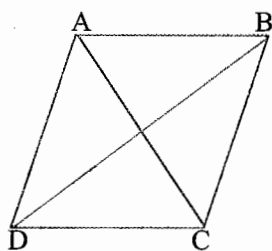
จะมีพื้นที่ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ตารางหน่วย

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

7. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมคางหมู = $\frac{1}{2} (\text{ผลบวกของความยาวของด้านคู่ขนาน} \times \text{สูง})$
 $= \frac{1}{2} h (AB + DC)$



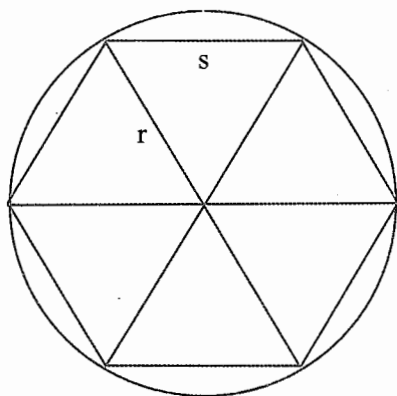
8. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ABCD = พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC + พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ADC



9. รูปสี่เหลี่ยม ABCD ซึ่งมีด้านยาว a, b, c และ d ตามลำดับ

จะมีพื้นที่ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - acd \cos^2\left(\frac{A+C}{2}\right)}$ เมื่อ $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

10. พื้นที่รูปหกเหลี่ยม



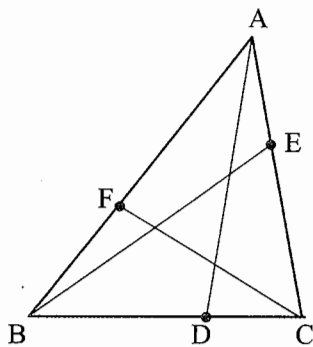
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่รูปหกเหลี่ยม} &= 6\left(\frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}\right) \\ \text{หรือ} &= 6\left(\frac{1}{4} r^2 \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

11. มุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 360 องศา
12. ผลรวมของมุมภายในของรูป n เหลี่ยม เท่ากับ $180(n-2)$ องศา

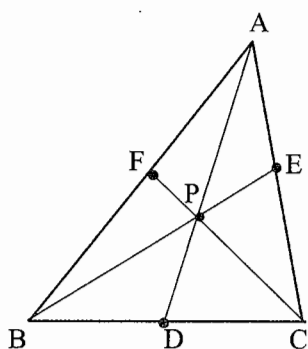
ทฤษฎีบทของเซวา และทฤษฎีบทของเมเนลอส

ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมกับจุดที่กำหนดให้ใด ๆ บนด้านตรงข้าม เรียกว่า **เซเวียน (Cevian)** ชื่อนี้ตั้งขึ้นเพื่อเป็นเกียรติให้แก่ Giovanni Ceva (1647 – 1734) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลี

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ D, E และ F เป็นจุดใด ๆ บน BC, CA และ AB ของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป



AD, BE และ CF เป็นเซเวียน
แต่ไม่พบกันที่จุดจุดหนึ่ง



AD, BE และ CF เป็นเซเวียน
และพบกันที่จุดจุดหนึ่ง คือจุด P

ในปี ค.ศ. 1678 Ceva ได้แสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับเซเวียนทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม พบกันที่จุดจุดหนึ่งดังทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 (ทฤษฎีบทของเซวา)

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ และกำหนด D, E และ F เป็นจุดบน BC, CA และ AB ตามลำดับ

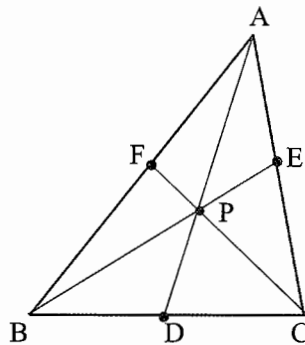
ถ้าเซเวียนทั้งสาม AD, BE และ CF พบกันที่จุดหนึ่ง แล้ว

$$\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} \cdot \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = 1$$

เมื่อสัญลักษณ์ $\vec{AF}$ แทนความยาวของส่วนของเส้นตรง AF และมีเครื่องหมาย + เมื่อวัดจาก A ไป F

ดังนั้น $\vec{AF} = -\vec{FA}$

พิสูจน์ สมมุติว่าเซเวียนทั้งสาม AD, BE และ CF พบกันที่จุด P ดังรูป



จะแสดงว่า $\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} \cdot \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = 1$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACF และรูปสามเหลี่ยม BCF จะได้ว่า

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\frac{1}{2} \times AF \times \text{ความสูง}}{\frac{1}{2} \times FB \times \text{ความสูง}} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle ACF}{\text{พ.ท. } \triangle BCF}$$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณารูปสามเหลี่ยม APF และรูปสามเหลี่ยม BPF จะได้ว่า

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle APF}{\text{พ.ท. } \triangle BPF}$$

ดังนั้น

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle ACF - \text{พ.ท. } \triangle APF}{\text{พ.ท. } \triangle BCF - \text{พ.ท. } \triangle BPF} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle ACP}{\text{พ.ท. } \triangle BCP}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle ABP}{\text{พ.ท. } \triangle ACP}$$

และ

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle BCP}{\text{พ.ท. } \triangle ABP}$$

ดังนั้น

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle ACP}{\text{พ.ท. } \triangle BCP} \cdot \frac{\text{พ.ท. } \triangle ABP}{\text{พ.ท. } \triangle ACP} \cdot \frac{\text{พ.ท. } \triangle BCP}{\text{พ.ท. } \triangle ABP} = 1$$

ต่อไปพิจารณาเครื่องหมาย

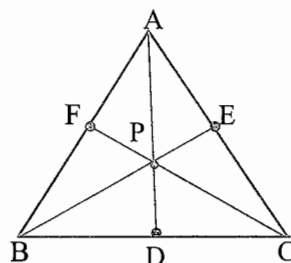
$$\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} > 0, \quad \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} > 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} > 0$$

ดังนั้น

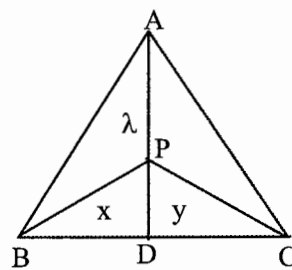
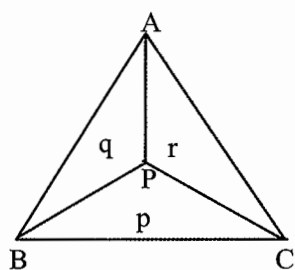
$$\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} \cdot \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = 1$$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า AD, BE และ CF เป็นเซวียนของรูปสามเหลี่ยม ABC พบกันที่จุด P ภายในรูปสามเหลี่ยม จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} \geq 6$$



พิสูจน์ ให้ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม PBC เท่ากับ p ตารางหน่วย
 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม APB เท่ากับ q ตารางหน่วย
 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม APC เท่ากับ r ตารางหน่วย
 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม PBD เท่ากับ x ตารางหน่วย
 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม PDC เท่ากับ y ตารางหน่วย



ดังนั้น $p = x + y$

ให้ $\frac{AP}{PD} = \lambda$ นั่นคือ $AP = \lambda PD$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABP และรูปสามเหลี่ยม PBD

$$\frac{q}{x} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle ABP}{\text{พ.ท. } \triangle PBD} = \frac{\frac{1}{2} \times \text{ความสูง} \times AP}{\frac{1}{2} \times \text{ความสูง} \times PD} = \lambda$$

ดังนั้น $q = \lambda x$

ในทำนองเดียวกัน พิจารณารูปสามเหลี่ยม APC และรูปสามเหลี่ยม PDC

จะได้ $r = \lambda y$

ดังนั้น $q + r = \lambda(x + y) = \lambda p$

และ $\lambda = \frac{q + r}{p}$

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ $\frac{BP}{PE} = \mu$ และ $\frac{CP}{PF} = v$

แล้วจะได้ $\mu = \frac{p + q}{r}$ และ $v = \frac{r + p}{q}$

ต่อไปอาศัยสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต-เรขาคณิต แสดงว่า สำหรับจำนวนจริงบวก a และ b ใด ๆ
 จะได้ว่า

$$\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 1$$

ดังนั้น
$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} \frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PE} &= \lambda + \mu + \nu \\ &= \frac{q+r}{p} + \frac{p+q}{r} + \frac{r+p}{q} \\ &= \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right) + \left(\frac{q}{r} + \frac{r}{q}\right) + \left(\frac{r}{p} + \frac{p}{r}\right) \\ &\geq 2+2+2 = 6 \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PE} \geq 6$$

ทฤษฎีบท 2 ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และกำหนด D, E และ F เป็นจุดบน BC, CA และ AB ตามลำดับ

ถ้า $\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} \cdot \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = 1$ แล้ว เซวียนทั้งสาม AD, BE และ CF พบกันที่จุดจุดหนึ่ง

พิสูจน์

สมมุติว่า AD และ BE ตัดกันที่จุด P

ลากเซวียนผ่านจุด C และ P พบ AB ที่จุด F'

ดังนั้น เซวียน AD, BE และ CF' พบกันที่จุด P

โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า
$$\frac{\vec{AF'}}{\vec{F'B}} \cdot \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = 1$$

แต่
$$\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} \cdot \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = 1$$

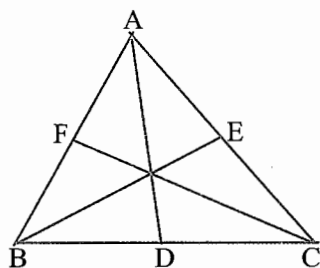
ดังนั้น
$$\frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} = \frac{\vec{AF'}}{\vec{F'B}}$$

จะได้ว่า F และ F' เป็นจุดเดียวกัน

ดังนั้น AD, BE และ CF พบกันที่จุด P

ตัวอย่างที่ 3 จงพิสูจน์ว่า เส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ย่อมพบกันที่จุดจุดหนึ่ง

พิสูจน์ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม และ AD, BE และ CF เป็นเส้นมัธยฐาน



ดังนั้น $AF = FB$, $BD = DC$ และ $CE = EA$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{\vec{AF}}{\vec{FB}} \cdot \frac{\vec{BD}}{\vec{DC}} \cdot \frac{\vec{CE}}{\vec{EA}} = 1$$

โดยทฤษฎีบท 2 จะได้ว่า AD, BE และ CF พบกันที่จุดจุดหนึ่ง

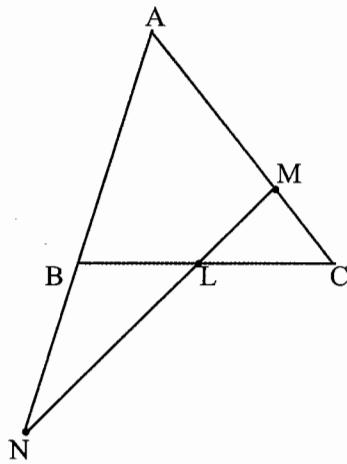
หมายเหตุ จุดที่มัธยฐานพบกันเรียกว่า จุดเซนทรอยด์ของรูปสามเหลี่ยม (centroid of a triangle)

Menelaus of Alexandria ได้แสดงเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอ สำหรับจุดสามจุดจะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

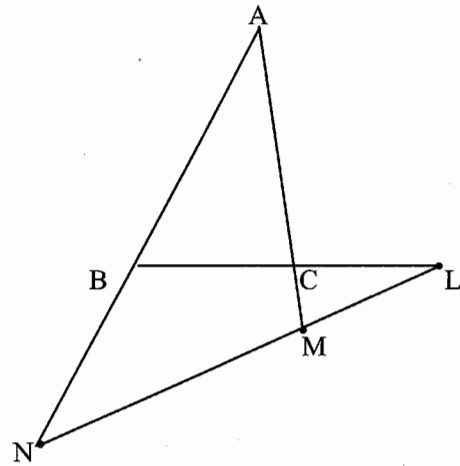
ทฤษฎีบท 3 (ทฤษฎีบทของเมนเนลอส)

ถ้าจุด L, M และ N อยู่บนด้าน BC, CA และ AB หรือส่วนที่ต่อออกไปตามลำดับ ของรูปสามเหลี่ยม ABC และจุดทั้งสามอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน แล้ว

$$\frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} \cdot \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} \cdot \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} = -1$$



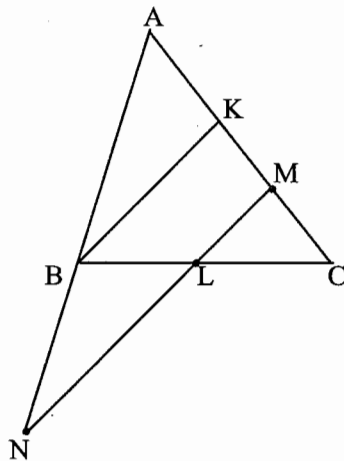
รูปที่ 1



รูปที่ 2

ข้อสังเกต ส่วนของเส้นตรงตัดผ่านด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมอย่างภายใน และอีกด้านหนึ่งอย่างภายนอก ดังรูปที่ 1 หรือส่วนของเส้นตรงตัดด้านทั้งสามอย่างภายนอก ดังรูปที่ 2

พิสูจน์ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ANM ลาก BK ขนานกับ NM พบด้าน AM ที่จุด K ดังรูป



$$\text{ดังนั้น } \frac{AB}{BN} = \frac{AK}{KM} \quad \text{หรือ} \quad \frac{AB}{AK} = \frac{BN}{KM}$$

$$\text{เนื่องจาก } \triangle ABK \sim \triangle ANM \quad \text{ดังนั้น } \frac{AB}{AK} = \frac{AN}{AM}$$

$$\text{จะได้ว่า } \frac{AN}{AM} = \frac{BN}{KM} \quad \text{หรือ} \quad \frac{AN}{BN} = \frac{AM}{KM}$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } \frac{LB}{CL} = \frac{MK}{CM}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} \cdot \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} \cdot \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} = \frac{\vec{AM}}{\vec{KM}} \cdot \frac{\vec{MK}}{\vec{CM}} \cdot \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} = 1$$

พิจารณาเครื่องหมาย จากข้อสังเกต ในรูปที่ 1 จะได้ว่า

$$\frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} < 0 \quad \text{แต่} \quad \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} > 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} > 0$$

$$\text{ส่วนในรูปที่ 2 จะได้ว่า } \frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} < 0, \quad \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} < 0 \quad \text{และ} \quad \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} < 0$$

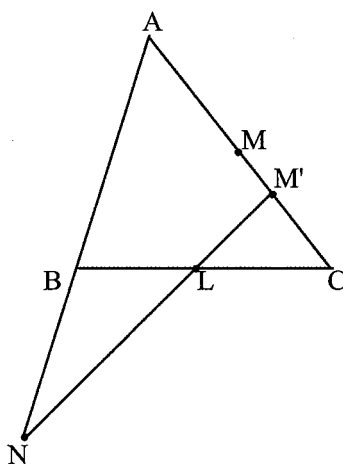
$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} \cdot \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} \cdot \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} = -1$$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า L, M และ N เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB หรือส่วนที่ต่อออกไป ตามลำดับ โดยที่

$$\frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} \cdot \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} \cdot \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} = -1$$

แล้วจุด L, M และ N อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

พิสูจน์ ต่อ NL ไปตัดด้าน CA ที่ M'



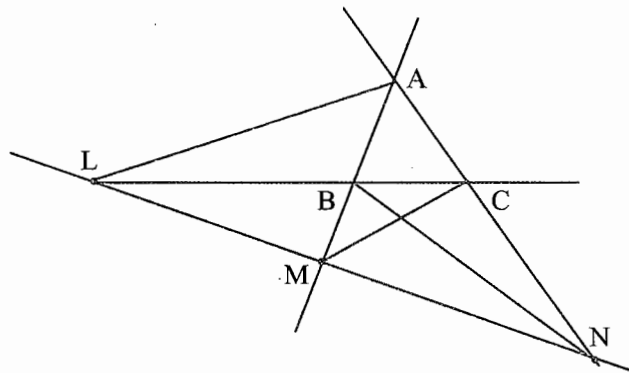
โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $\frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} \cdot \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} \cdot \frac{\vec{CM'}}{\vec{M'A}} = -1$

แต่ $\frac{\vec{AN}}{\vec{NB}} \cdot \frac{\vec{BL}}{\vec{LC}} \cdot \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}} = -1$

ดังนั้น $\frac{\vec{CM'}}{\vec{M'A}} = \frac{\vec{CM}}{\vec{MA}}$ จะได้ว่า M และ M' เป็นจุดเดียวกัน

เพราะฉะนั้น L, M และ N อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

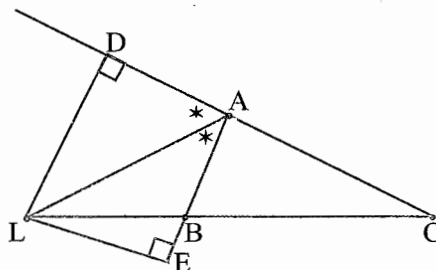
ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า จุดที่เกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกทั้งสาม ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ตัดกับด้านตรงข้ามหรือส่วนที่ต่อออกไป อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน



พิสูจน์ ให้ L, M และ N เป็นจุดที่เกิดจากเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม ABC ตัดกับด้านตรงข้ามดังรูป

จะแสดงว่า จุด L, M และ N อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ให้ความยาวของด้าน BC, CA และ AB เท่ากับ a, b และ c ตามลำดับ



ลาก LD ตั้งฉากกับ AC ที่จุด D และลาก LE ตั้งฉากกับ AB ที่จุด E

เนื่องจาก $\angle LAD = \angle LAE$, $\angle LDA = \angle LEA$ และ LA เป็นด้านร่วม

ดังนั้น $\triangle LDA$ และ $\triangle LAE$ เท่ากันทุกประการ

จะได้ว่า $LD = LE$

พิจารณา $\triangle ABL$ และ $\triangle ALC$

$$\frac{LB}{LC} = \frac{\text{พ.ท. } \triangle ABL}{\text{พ.ท. } \triangle ALC} = \frac{\frac{1}{2} \times AB \times LE}{\frac{1}{2} \times AC \times LD} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

โดยการพิจารณาเครื่องหมาย จะได้ว่า $\frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} < 0$

$$\frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} = -\frac{c}{b}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} = -\frac{b}{a} \quad \text{และ} \quad \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = -\frac{a}{c}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = \left(-\frac{b}{a}\right) \left(-\frac{c}{b}\right) \left(-\frac{a}{c}\right) = -1$$

เพราะฉะนั้น จุด L , M และ N อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

แบบฝึกหัด 7.1

1. กำหนดให้ AD, BE และ CF เป็นเซวียนของรูปสามเหลี่ยม ABC พบกันที่จุด P ภายในรูปสามเหลี่ยม

จงพิสูจน์ว่า

$$(ก) \quad \frac{AP}{PD} \cdot \frac{BP}{PE} \cdot \frac{CP}{PF} \geq 8$$

$$(ข) \quad \frac{AD}{PD} \cdot \frac{BE}{PE} \cdot \frac{CF}{PF} \geq 27$$

$$(ค) \quad \frac{AD}{AP} + \frac{BE}{BP} + \frac{CF}{CP} \geq \frac{9}{2}$$

2. จงพิสูจน์ว่า เส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมไปยังด้านตรงข้าม จะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง
3. จงพิสูจน์ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม จะพบกันที่จุดจุดหนึ่ง
4. จงพิสูจน์ว่า เส้นแบ่งครึ่งมุมภายในสองมุม และเส้นแบ่งครึ่งมุมภายนอกของมุมที่เหลือ ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ตัดกับด้านตรงข้ามทั้งสาม ณ จุดสามจุด จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
5. ถ้าเส้นสัมผัสที่จุด A, B และ C สัมผัสวงกลมแนบนอกรูปสามเหลี่ยม ABC พบด้านตรงข้ามที่จุด D, E และ F ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า จุด D, E และ F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

6. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และให้ D, E และ F เป็นจุดบนด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ โดยที่ $AD \perp BC$ $AF = FB$ และ BE แบ่งครึ่ง $\hat{B}$

จงพิสูจน์ว่า AD, BE และ CF พบกันที่จุดจุดหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ

$$a^2(a-c) = (b^2 - c^2)(a+c)$$

เมื่อ $a = BC$, $b = CA$ และ $c = AB$

7. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ สมมติว่า O เป็นจุดภายในของรูปสามเหลี่ยม และ AO, BO, CO พบด้านตรงข้ามที่จุด D, E, F ตามลำดับ

$$\text{จงแสดงว่า } \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{AO}{OD}$$

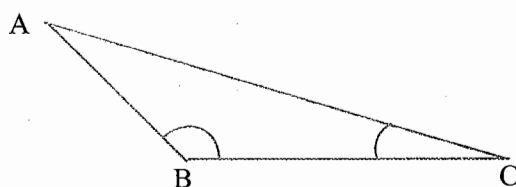
8. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ต่อด้าน BC ผ่านจุด C ไปยังจุด D ที่ทำให้ $CD = AC$
 ให้ P เป็นจุดตัดที่สองของวงกลมล้อมรูปสามเหลี่ยม ACD กับวงกลมที่มี BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
 ให้ BP และ AC พบกันที่จุด E และให้ CP และ AB พบกันที่จุด F
 จงพิสูจน์ว่า D, E, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

อสมการเรขาคณิต

จากการศึกษาเรขาคณิตเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม เราทราบว่าถ้าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมมีความยาวเท่ากัน แล้วมุมตรงข้ามของด้านทั้งสองนั้น มีขนาดเท่ากัน ในทางกลับกัน ถ้ามุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดเท่ากัน แล้วด้านตรงข้ามของมุมทั้งสองนั้นมีความยาวเท่ากัน

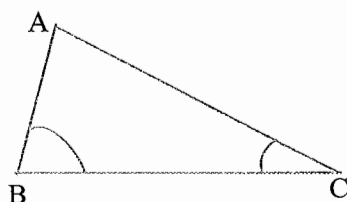
ในบทนี้เราจะหาเงื่อนไขที่ทำให้ด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมยาวกว่าอีกด้านหนึ่ง หรือมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดโตกว่าอีกมุมหนึ่ง เพื่อความสะดวกต่อการเขียนอสมการเรขาคณิต จะใช้เครื่องหมาย $>$ แทนขนาดของมุมที่โตกว่า หรือแทนความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ยาวกว่า และใช้เครื่องหมาย $<$ แทนขนาดของมุมที่เล็กกว่า หรือแทนความยาวของส่วนของเส้นตรงที่สั้นกว่า ในทำนองเดียวกัน ใช้เครื่องหมาย $\geq$ แทนขนาดของมุมที่โตกว่าหรือเท่ากับ หรือแทนความยาวของส่วนของเส้นตรงที่ยาวกว่าหรือเท่ากับ และใช้เครื่องหมาย $\leq$ แทนขนาดของมุมที่เล็กกว่าหรือเท่ากับ หรือแทนความยาวของส่วนของเส้นตรงที่สั้นกว่าหรือเท่ากับ

ก่อนอื่นขอพิจารณารูปสามเหลี่ยมที่มีด้านสองด้านมีความยาวไม่เท่ากัน เราจะพิจารณาว่ามุมตรงข้ามกับด้านทั้งสองนั้นมีความเกี่ยวข้องกันอย่างไร พิจารณาได้จาก วาดรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่ AC ยาวกว่า AB หรือ $AC > AB$



จากรูป จะเห็นว่า $\angle B > \angle C$

หรือ



จากรูป จะเห็นว่า $\angle B > \angle C$

ดังนั้น เราคาดคะเนว่าข้อความต่อไปนี้ น่าจะเป็นจริง

ถ้าด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมไม่เท่ากัน แล้วมุมตรงข้ามกับด้านทั้งสองไม่เท่ากัน และ
ถ้าด้านหนึ่งยาวกว่าอีกด้านหนึ่ง แล้ว มุมตรงข้ามกับด้านที่ยาวกว่า มีขนาดโตกว่ามุมตรงข้ามกับ
ด้านที่สั้นกว่า

ก่อนที่จะศึกษาอสมการระหว่างด้านสองด้านหรือมุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยม จะขอทบทวนกฎและทฤษฎีบท
พื้นฐานของอสมการของจำนวนจริง โดยไม่พิสูจน์ ดังต่อไปนี้

กฎไตรวิภาค (Trichotomy law)

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง แล้ว $x < y$ หรือ $x = y$ หรือ $x > y$ เป็นจริงเพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

กฎการถ่ายทอด (Transitivity law)

สำหรับ x, y และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

กฎการบวก

สำหรับ a, b, x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

ถ้า $a < b$ และ $x \leq y$ แล้ว $a + x < b + y$

กฎการคูณ

สำหรับ a, x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

ถ้า $x < y$ และ $a > 0$ แล้ว $ax < ay$

ทฤษฎีบท

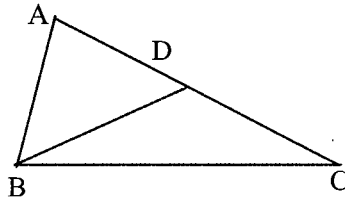
สำหรับ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

ถ้า $a = b + c$ และ $c > 0$ แล้ว $a > b$

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ แสดงอสมการระหว่างด้านสองด้าน หรือมุมสองมุมของรูปสามเหลี่ยม

ทฤษฎีบท 1

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $AC > AB$ แล้ว $\hat{A}BC > \hat{A}CB$

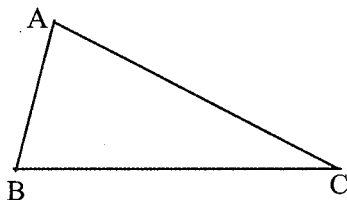


สร้างเพื่อการพิสูจน์ กำหนดจุด D บนด้าน AC โดยที่ $AB = AD$

พิสูจน์ เนื่องจาก $AB = AD$ ดังนั้น $\hat{A}BD = \hat{A}DB$
 แต่ $\hat{A}DB > \hat{D}CB$ และ $\hat{D}CB = \hat{A}CB$
 ดังนั้น $\hat{A}BD > \hat{A}CB$
 แต่ $\hat{A}BC > \hat{A}BD$
 เพราะฉะนั้น $\hat{A}BC > \hat{A}CB$

ทฤษฎีบท 2

ในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\hat{A}BC > \hat{A}CB$ แล้ว $AC > AB$

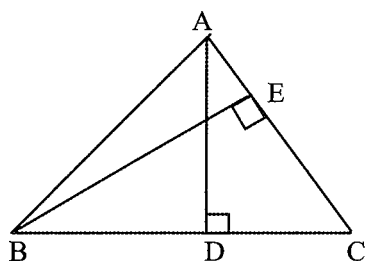


พิสูจน์ สมมติว่า $AC \leq AB$
 ถ้า $AC = AB$ แล้ว $\hat{A}BC = \hat{A}CB$ ซึ่งขัดแย้งกับ $\hat{A}BC > \hat{A}CB$
 ถ้า $AC < AB$ โดยทฤษฎีบท 1 จะได้ว่า $\hat{A}BC < \hat{A}CB$ ซึ่งขัดแย้งกับ $\hat{A}BC > \hat{A}CB$
 ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $AC > AB$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ มีด้านของรูปสามเหลี่ยมอย่างมากหนึ่งด้าน สั้นกว่าส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่วัดจากจุดยอดตรงข้ามกับด้านนั้น

พิสูจน์ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม

สมมติว่า AD และ BE เป็นส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่ยาวจาก A และ B ตามลำดับ



ในรูป $\triangle ADC$ $\angle ADC = 90^\circ > \angle ACD$

โดยทฤษฎีบท 2 $CA > AD$

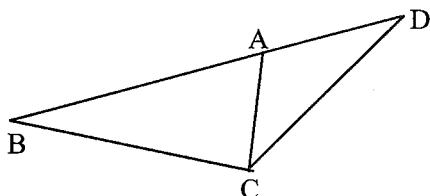
ในทำนองเดียวกัน ในรูป $\triangle BCE$ จะได้ว่า $BC > BE$

ดังนั้น $AD > BC > BE > CA > AD$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น ในรูปสามเหลี่ยม จะมีด้านของรูปสามเหลี่ยมอย่างมากหนึ่งด้านที่สั้นกว่าส่วนสูงของรูปสามเหลี่ยมที่วัดจากจุดยอดตรงข้ามกับด้านนั้น

ทฤษฎีบท 3 (อสมการสามเหลี่ยม)

ในรูปสามเหลี่ยม ABC $BA + AC > BC$



สร้างเพื่อการพิสูจน์ ลากเส้นตรงต่อจาก BA ไปยังจุด D โดยที่ $AD = AC$
โยง DC

พิสูจน์ เนื่องจาก $AD = AC$ ดังนั้น $\angle ACD = \angle ADC$

แต่ $\angle BCD > \angle ACD$

ดังนั้น $\widehat{BCD} > \widehat{ADC}$ และ $\widehat{ADC} = \widehat{BDC}$

จะได้ว่า $\widehat{BCD} > \widehat{BDC}$

โดยทฤษฎีบท 2 ในรูป $\triangle BDC$ จะได้ว่า $BD > BC$

แต่ $BD = BA + AD = BA + AC$

ดังนั้น $BA + AC > BC$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า ด้านใด ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมีความยาวน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูป

พิสูจน์ ให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม คือ a, b และ c

โดยทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $a < b + c$

ดังนั้น $2a = a + a < a + b + c$

นั่นคือ $a < \frac{1}{2}(a+b+c)$

ตัวอย่างที่ 3 ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $AC > |AB - BC|$

พิสูจน์ **กรณี 1** $AB \geq BC$

โดยทฤษฎีบท 3 $AC + BC > AB$

ดังนั้น $AC > AB - BC = |AB - BC|$

กรณี 2 $AB < BC$

โดยทฤษฎีบท 3 $AB + AC > BC$

ดังนั้น $AC > -(AB - BC) = |AB - BC|$

จากกรณี 1 และกรณี 2 สรุปได้ว่า $AC > |AB - BC|$

ตัวอย่างที่ 4 รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AC ยาว 3.8 นิ้ว และด้าน AB ยาว 0.6 นิ้ว ถ้าความยาวของด้าน BC เป็นจำนวนเต็ม จงหาความยาวของด้าน BC

วิธีทำ

โดยทฤษฎีบท 3 $BC < AB + AC = 0.6 + 3.8 = 4.4$

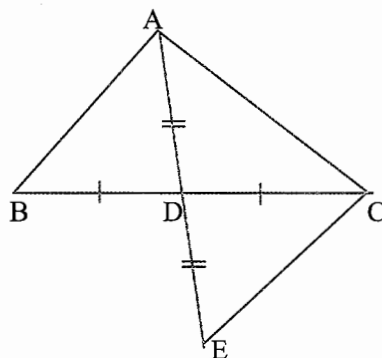
แต่ $BC > |AB - AC| = |0.6 - 3.8| = 3.2$

ดังนั้น $3.2 < BC < 4.4$ และ BC เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ว่า $BC = 4$ ดังนั้น ความยาวของด้าน BC เท่ากับ 4 นิ้ว

ตัวอย่างที่ 5 รูปสามเหลี่ยม ABC มี AD เป็นเส้นมัธยฐานที่ลากจากมุม A ไปยัง BC
จงพิสูจน์ว่า $2AD < BA + AC$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ต่อ AD ไปยังจุด E ทำให้ $DE = AD$
โยง CE



พิสูจน์ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD และรูปสามเหลี่ยม DEC
เนื่องจาก $AD = DE$ $BD = DC$ และ $\hat{BDA} = \hat{CDE}$
ดังนั้น $\triangle ABD \cong \triangle DEC$
เพราะฉะนั้น $BA = EC$

พิจารณารูป $\triangle AEC$ จะได้ว่า $AE < EC + AC$

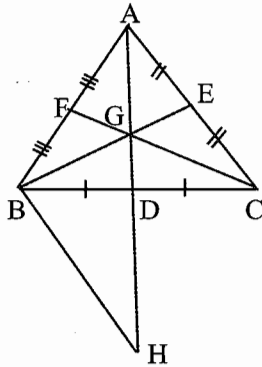
แต่ $AE = 2AD$ และ $EC = BA$

ดังนั้น $2AD < BA + AC$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดให้ p เป็นความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม และ m เป็นผลบวกของความยาวของเส้นมัธยฐานทั้งสาม

จงพิสูจน์ว่า $m < p < \frac{4}{3}m$

สร้างเพื่อการพิสูจน์



ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม และ AD, BE และ CF
เป็นเส้นมัธยฐาน พบกันที่จุด G

ต่อ AD ไปยังจุด H ทำให้ $AD = DH$

โยง BH

พิสูจน์ พิจารณารูป $\triangle BDH$ และ $\triangle ADC$

เนื่องจาก $AD = DH$ $BD = DC$ และ $\hat{A}DC = \hat{B}DH$

ดังนั้น $\triangle BDH \cong \triangle ADC$

เพราะฉะนั้น $BH = AC$

โดยอสมการสามเหลี่ยม

$$2AD = AH < AB + BH = AB + AC$$

$$\text{นั่นคือ } 2AD < AB + AC \quad \dots\dots\dots(1)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$2BE < AB + BC \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$2CF < AC + BC \quad \dots\dots\dots(3)$$

จากอสมการ (1), (2) และ (3) จะได้ว่า

$$2AD + 2BE + 2CF < 2(AB + BC + CA)$$

$$\text{หรือ } AD + BE + CF < AB + BC + CA$$

$$\text{แต่ } m = AD + BE + CF \quad \text{และ } p = AB + BC + CA$$

$$\text{ดังนั้น } m < p$$

ต่อไปจะแสดงว่า $p < \frac{4}{3}m$

เราทราบว่า $BG = \frac{2}{3}BE$, $GC = \frac{2}{3}CF$ และ $AG = \frac{2}{3}AD$

โดยอสมการสามเหลี่ยม

$$BC < BG + GC = \frac{2}{3}(BE + CF)$$

ในทำนองเดียวกัน $AC < \frac{2}{3}(AD + CF)$ และ

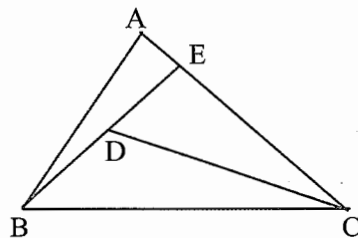
$$AB < \frac{2}{3}(AD + BE)$$

ดังนั้น $AB + BC + CA < \frac{4}{3}(AD + BE + CF)$

เพราะฉะนั้น $p < \frac{4}{3}m$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนด D เป็นจุดในรูปสามเหลี่ยม ABC
จงพิสูจน์ว่า $BA + AC > BD + DC$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ ต่อ BD ไปพบด้าน AC ที่จุด E



พิสูจน์ พิจารณารูป $\triangle DEC$ จะได้ว่า $DE + EC > DC$

และรูป $\triangle ABE$ จะได้ว่า $BA + AE > BE$

แต่ $BE = BD + DE$

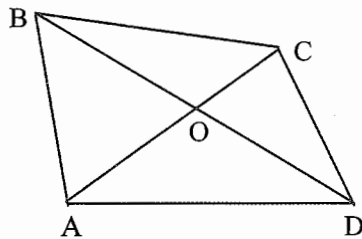
ดังนั้น $BA + AE > BD + DE$

$$\begin{aligned}
 \text{รูป } \triangle ABC \quad BA + AC &= BA + (AE + EC) \\
 &> BD + DE + EC \\
 &> BD + DC
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } BA + AC > BD + DC$$

ตัวอย่างที่ 8 จงพิสูจน์ว่า ผลบวกของความยาวของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมมน น้อยกว่าความยาวของเส้นรอบรูป แต่มากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูป

พิสูจน์ กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมมน และลากเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O



$$\text{จากรูป } AB + BC > AC \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$BC + CD > BD \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$CD + AD > AC \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$AD + AB > BD \quad \dots\dots\dots(4)$$

รวมอสมการ (1) – (4) จะได้

$$2(AB + BC + CD + DA) > 2(AC + BD)$$

$$\text{ดังนั้น } AC + BD < AB + BC + CD + DA$$

$$\text{จากรูป } OA + OB > AB$$

$$OB + OC > BC$$

$$OC + OD > CD$$

$$OD + OA > AD$$

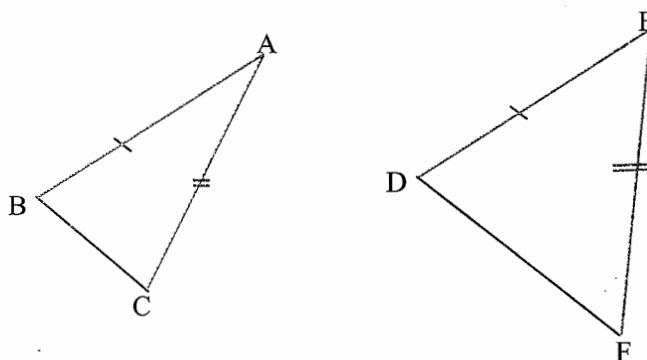
$$\text{ดังนั้น } 2(AC + BD) = 2(OA + OB + OC + OD) > AB + BC + CD + DA$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } AC + BD > \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$$

ทฤษฎีบท 4

ถ้า ABC และ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่ $AB = DE$ และ $AC = DF$ จะได้ว่า

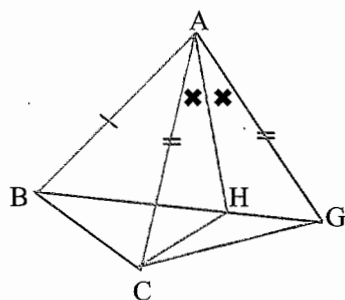
$\hat{BAC} < \hat{EDF}$ ก็ต่อเมื่อ $BC < EF$



สร้างเพื่อการพิสูจน์

ให้ G เป็นจุดใด ๆ ไม่อยู่บนด้าน AB แต่เป็นจุดอยู่ข้างเดียวกับจุด C โดยที่ $AG = DF$

และ $\hat{BAG} = \hat{EDF}$



โยง BG และ CG

พิสูจน์ พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABG และ รูปสามเหลี่ยม DEF

เนื่องจาก $AB = DE$ $AG = DF$ และ $\hat{BAG} = \hat{EDF}$

ดังนั้น $\triangle ABG \cong \triangle DEF$

เพราะฉะนั้น $EF = BG$

สมมุติว่า $\hat{BAC} < \hat{EDF}$

นั่นคือ $\hat{BAC} < \hat{BAG}$

ถ้า C อยู่บน BG แล้ว $BC < BG$

นั่นคือ $BC < EF$

แต่ถ้า C ไม่อยู่บน BG

ลากเส้นตรง AH แบ่งครึ่งมุม $\widehat{CAG}$ พบ BG ที่ H

โยง CH

พิจารณา $\triangle ACH$ และ $\triangle AGH$

เนื่องจาก $AC = AG$ $\widehat{CAH} = \widehat{HAG}$ และ AH เป็นด้านร่วม

ดังนั้น $\triangle ACH \cong \triangle AGH$

จะได้ว่า $CH = HG$

พิจารณา $\triangle BCH$ จะได้ว่า $BH + HC > BC$

ดังนั้น $BG = BH + HG$

$$= BH + HC$$

$$> BC$$

แต่ $EF = BG$

จะได้ว่า $EF > BC$

ในทางกลับกัน สมมติว่า $BC < EF$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\widehat{BAC} < \widehat{EDF}$

สมมติว่า $\widehat{BAC} \geq \widehat{EDF}$

กรณี 1 $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

จะได้ว่า $BC = EF$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $BC < EF$

กรณี 2 $\hat{BAC} > \hat{EDF}$

จะได้ว่า $BC > EF$ เกิดข้อขัดแย้งกับ $BC < EF$

สรุปได้ว่า $\hat{BAC} < \hat{EDF}$

ทฤษฎีบท 5 (อสมการของ Pythagoras)

ในรูปสามเหลี่ยม ABC

(1) ถ้า $\hat{BCA} < 90^\circ$ แล้ว $AB^2 < BC^2 + CA^2$

(2) ถ้า $\hat{BCA} > 90^\circ$ แล้ว $AB^2 > BC^2 + CA^2$

สร้างเพื่อการพิสูจน์ สร้างรูป $\triangle DEF$ โดยที่ $EF = BC$, $FD = CA$

และ $\hat{EFD} = 90^\circ$

พิสูจน์ (1) กำหนดให้ $\hat{BCA} < 90^\circ$

โดยทฤษฎีบทของ Pythagoras $DE^2 = EF^2 + FD^2$

เนื่องจาก $\hat{BCA} < 90^\circ = \hat{EFD}$

ดังนั้น $AB < DE$

จะได้ว่า $AB^2 < DE^2 = EF^2 + FD^2$

แต่ $EF = BC$ และ $FD = CA$

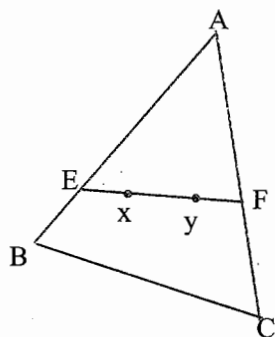
ดังนั้น $AB^2 < BC^2 + CA^2$

(2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

ในรูปสามเหลี่ยมใดๆ ผลบวกของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยม ย่อมยาวกว่าด้านที่เหลือ โดยอาศัยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า สำหรับรูป n เหลี่ยมใดๆ ($n \geq 3$) จะได้ว่าผลบวกของความยาวของด้าน $n-1$ ด้าน ยาวกว่าด้านที่เหลือ

ตัวอย่างที่ 9 จงพิสูจน์ว่าระยะทางระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในรูปสามเหลี่ยม น้อยกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูป

พิสูจน์



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม

x และ y เป็นจุด 2 จุด ในรูปสามเหลี่ยม

ลากเส้นตรง xy พบด้าน AB ที่จุด E และด้าน AC ที่จุด F

พิจารณารูป $\triangle AEF$ จะได้ว่า $EF < EA + AF$

รูปสี่เหลี่ยม $EFCB$ จะได้ว่า $EF < EB + BC + CF$

ดังนั้น $2EF < EA + EB + AF + FC + BC$

$$= AB + AC + BC$$

จะได้ว่า $EF < \frac{1}{2} (AB + AC + BC)$

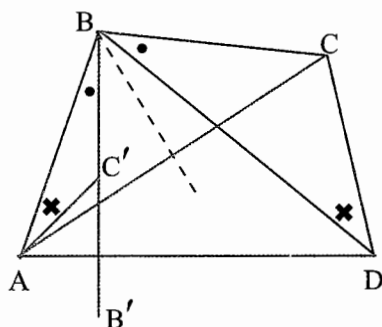
แต่ $xy \leq EF$

ดังนั้น $xy < \frac{1}{2} (AB + AC + BC)$

ทฤษฎีบท 6 (Ptolemy's Inequality)

ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ ดังนั้น $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$

พิสูจน์ กรณี 1 รูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม



ให้ BB' เป็นเส้นตรงที่สมมาตรกับ BD เทียบกับเส้นแบ่งครึ่ง $\widehat{ABC}$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{ABB'} = \widehat{DBC}$$

ให้ C' เป็นจุดบน BB' ที่ทำให้ $\widehat{BAC'} = \widehat{BDC}$

เนื่องจาก $\triangle ABC'$ และ $\triangle DBC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

$$\text{ดังนั้น } \frac{AB}{AC'} = \frac{BD}{CD} \quad \text{หรือ} \quad AC' = \frac{AB \cdot CD}{BD}$$

$$\text{เนื่องจาก } \frac{AB}{BD} = \frac{BC'}{BC} \quad \text{และ} \quad \widehat{C'BC} = \widehat{ABD}$$

ดังนั้น $\triangle C'BC$ และ $\triangle ABD$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

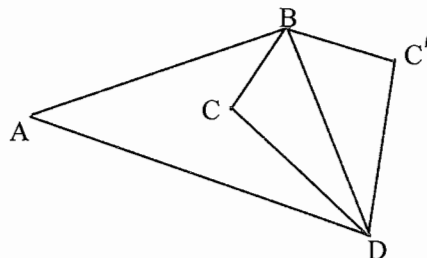
$$\text{จะได้ว่า } \frac{BC}{C'C} = \frac{BD}{AD} \quad \text{หรือ} \quad C'C = \frac{BC \cdot AD}{BD}$$

โดยอสมการสามเหลี่ยม $AC' + C'C \geq AC$

$$\text{ดังนั้น } \frac{AB \cdot CD}{BD} + \frac{BC \cdot AD}{BD} \geq AC$$

$$\text{หรือ} \quad AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

กรณี 2 รูปสี่เหลี่ยม ABCD ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม
 โดยไม่เสียพื้นที่เลย สมมติว่าเส้นทแยงมุม BD ไม่ผ่านบริเวณภายในรูปสี่เหลี่ยม



ให้จุด C' สมมาตรกับจุด C เทียบกับ BD
 ลาก BC' และ DC'

ดังนั้น $BC = BC'$ และ $CD = C'D$

จะได้ว่า รูปสี่เหลี่ยม $ABC'D$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุม

โดยกรณี 1 จะได้ว่า

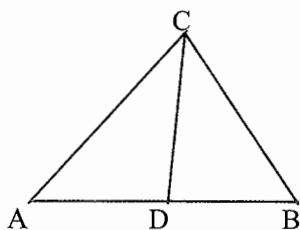
$$AB \cdot C'D + BC' \cdot AD \geq AC' \cdot BD$$

เนื่องจาก $C'D = CD$ $BC' = BC$ และ $AC < AC'$

ดังนั้น $AB \cdot CD + BC \cdot AD > AC \cdot BD$

แบบฝึกหัด 8.1

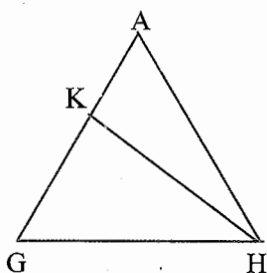
1. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามคือ $AB < BC < AC$
จงเขียนความสัมพันธ์ของมุมทั้งสาม
2. กำหนดรูป $\triangle ABC$ ดังรูป



ถ้า CD แบ่งครึ่งมุม $\hat{ACB}$

จงพิสูจน์ว่า $\hat{CDB} > \hat{DCB}$

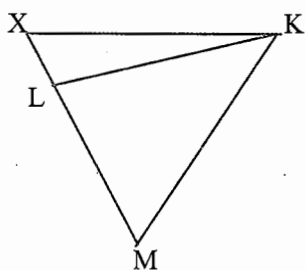
3. จงพิสูจน์ว่า ถ้ารูปสี่เหลี่ยม ABCD โดยที่ $AB = BC$, $AD = DC$ และ $AD > AB$ แล้ว $\hat{ABC} > \hat{ADC}$
4. กำหนดรูป $\triangle AGH$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี GH เป็นฐาน ดังรูป



K เป็นจุดบน AG

จงพิสูจน์ว่า $KG < KH$

5. กำหนดรูป $\triangle XKM$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมี KX เป็นฐาน และ L เป็นจุดบน XM



โดยที่ $\triangle KLM$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

และ LM เป็นฐาน ถ้า $\hat{KXM} > \hat{XKL}$

จงพิสูจน์ว่า $KM > XL$

6. ในรูปสามเหลี่ยม QRS เส้นแบ่งครึ่งมุม R และ S ตัดกันที่จุด T

จงพิสูจน์ว่า $\hat{STR} > 90^\circ$

7. ในรูปสามเหลี่ยม XYZ โดยมี XZ เป็นฐาน ให้ A เป็นจุดบนด้าน YZ ถ้า $AY < XY$

จงพิสูจน์ว่า $\hat{YXZ} < \hat{YAX}$

8. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ AD แบ่งครึ่งมุม A ถ้า D เป็นจุดระหว่าง B และ C

จงพิสูจน์ว่า $AC > CD$

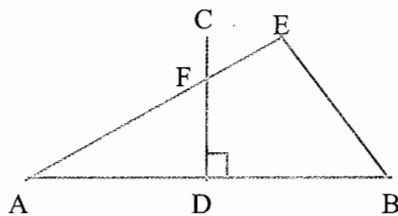
9. ในรูปสามเหลี่ยม RST มี RX เป็นเส้นมัธยฐาน และ $RT > RS$

จงพิสูจน์ว่า $\angle TXR > \angle RTS$

10. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ลากเส้นตั้งฉากจาก C ไปตั้งฉากกับ AB ที่จุด D

จงพิสูจน์ว่า $BC > CD$

11. จากรูป



CD ตั้งฉากและแบ่งครึ่งด้าน AB

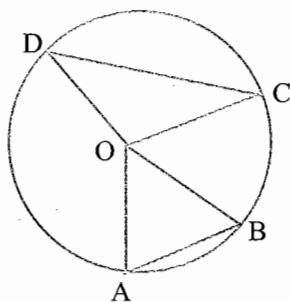
และ E ไม่อยู่บน CD

จงพิสูจน์ว่า $EA > EB$

12. ในรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมี $\angle ABC > \angle BAC$ และลากเส้นตั้งฉากจาก B ไปตั้งฉากกับ AC ที่จุด T

จงพิสูจน์ว่า $AC > BT$

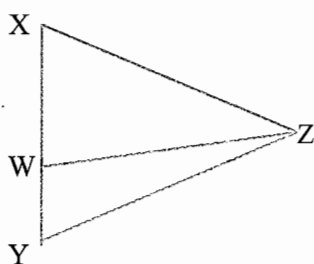
13. ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ดังรูป



ถ้า $\angle DOC > \angle AOB$

จงพิสูจน์ว่า $DC > AB$

14. กำหนดรูปสามเหลี่ยม XYZ ดังรูป



ถ้า $XZ = YZ$ และ $\angle XZW > \angle WZY$

จงพิสูจน์ว่า $XW > WY$

-

จงพิสูจน์ว่า $VO > VS$

- จงพิสูจน์ว่า $XO > YO$

จำนวนเชิงซ้อนและการประยุกต์ทางเรขาคณิต

จำนวนเชิงซ้อน คือ จำนวนที่เขียนในรูปคู่อันดับ (a, b) โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง การเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อนมีบทนิยามดังนี้

สำหรับ $(a, b), (c, d)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1. การเท่ากัน

$$(a, b) = (c, d) \text{ ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

2. การบวก

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

3. การคูณ

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$$

ต่อไปพิจารณาจำนวนเชิงซ้อนในรูป $(a, 0)$ จะได้ว่า

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$\text{และ } (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

จะเห็นว่า การดำเนินการดังกล่าวเหมือนกับการดำเนินการระหว่างจำนวนจริง a และ b

ดังนั้น แทนจำนวนเชิงซ้อน $(a, 0)$ เป็นจำนวนจริง a และเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ เป็น i

$$\text{ดังนั้น } i^2 = -1 \text{ หรือ } i = \sqrt{-1}$$

ให้ z แทนจำนวนเชิงซ้อน (a, b)

$$\begin{aligned} z &= (a, b) \\ &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \\ &= a + ib \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b) = a + ib$

เรียก a ว่า ส่วนจริง (real part) ของ z แทนด้วย $\operatorname{Re}(z)$ และ

เรียก b ว่า ส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของ z แทนด้วย $\operatorname{Im}(z)$

จำนวนเชิงซ้อน $a + ib$ มีสมบัติการบวกและการคูณเช่นเดียวกับสมบัติการบวกและการคูณของจำนวนจริง

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d) \\ (a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2 bd \\ &= ac + i(ad + bc) - bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \end{aligned}$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b) = a + ib$

เรียกจำนวนเชิงซ้อน $(a, -b) = a - ib$ ว่า สังกะยของ z แทนด้วย $\bar{z}$

นั่นคือ ถ้า $z = a + ib$ แล้ว $\bar{z} = a - ib$

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 - i^2 b^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

ดังนั้น ในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน จะใช้สังกะยของตัวหารคูณทั้งตัวเศษและตัวส่วน

$$\begin{aligned} \text{กล่าวคือ } \frac{a + ib}{c + id} &= \frac{a + ib}{c + id} \cdot \frac{c - id}{c - id} \\ &= \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \right) + i \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right) \end{aligned}$$

สมบัติของสังยุคมีดังนี้

ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จะได้

$$1. \quad \overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

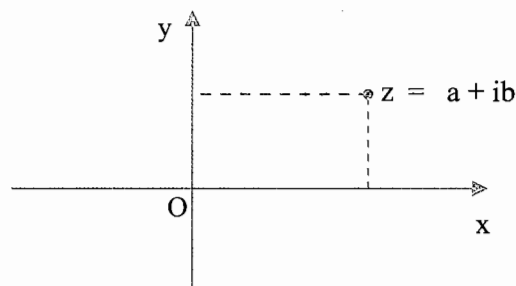
$$2. \quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$3. \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad \text{เมื่อ } z_2 \neq 0$$

$$4. \quad \overline{\overline{z_1}} = z_1$$

$$5. \quad \operatorname{Re} z_1 = \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2} \quad \text{และ} \quad \operatorname{Im} z_1 = \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}$$

จำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$ เมื่อ a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ แทนด้วยจุด (a, b) บนระนาบพิกัดฉาก ในทางกลับกัน จุด (a, b) ใดๆบนระนาบพิกัดฉาก ก็แทนด้วยจำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$

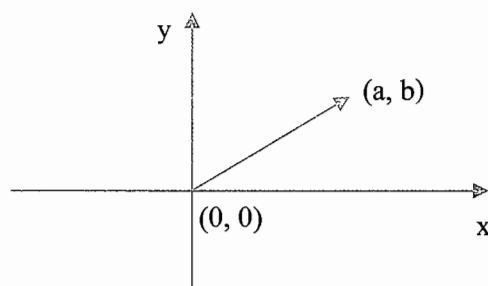


แต่ละจุดบนแกน x อยู่ในรูป $(x, 0)$ แทนจำนวนเชิงซ้อน $x + i0$ เรียกแกน x ว่า แกนจริง (real axis)

แต่ละจุดบนแกน y อยู่ในรูป $(0, y)$ แทนจำนวนเชิงซ้อน $0 + iy$ เรียกแกน y ว่า แกนจินตภาพ (imaginary axis)

ระนาบที่ประกอบด้วยแกนจริงและแกนจินตภาพ เรียกว่า ระนาบเชิงซ้อน (complex plane)

นอกจากการแทนจำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$ ด้วยจุด (a, b) บนระนาบแล้ว เรายังสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อน $z = a + ib$ ด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด $(0, 0)$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุด (a, b) เป็นจุดสุดท้าย ดังรูป



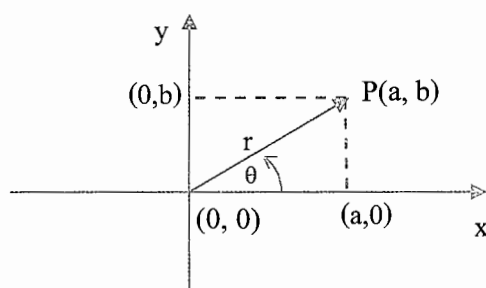
ค่าสัมบูรณ์ (absolute) ของ $a + ib$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$ แทนด้วย $|a + ib|$

$$\text{นั่นคือ} \quad |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

จะเห็นว่าค่าสัมบูรณ์ของ $a + ib$ คือระยะทางจากจุด $(0, 0)$ ถึง (a, b) และถ้า $z = a + ib$

$$\text{แล้ว} \quad z\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

ถ้า $z = a + ib$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{OP}$ ดังรูป



ให้ θ เป็นมุมที่วัดทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ไปยัง $\vec{OP}$

เรียก θ ว่า อาร์กิวเมนต์ของ z (argument of z) แทนด้วย $\arg(z)$

ให้ r เป็นขนาดของเวกเตอร์ $\vec{OP}$

$$\text{ดังนั้น} \quad r = |\vec{OP}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{r} \quad \text{หรือ} \quad b = r \sin \theta$$

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{หรือ} \quad a = r \cos \theta$$

$$\text{จาก} \quad z = a + ib \quad (\neq 0)$$

$$\text{ดังนั้น} \quad z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

เรียก $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ว่า รูปเชิงขั้ว ของจำนวนเชิงซ้อน $a + ib$

$$\text{จากเอกลักษณ์} \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\text{ดังนั้น} \quad z = re^{i\theta}$$

เรียก $re^{i\theta}$ ว่า รูปเลขชี้กำลัง ของจำนวนเชิงซ้อน $a + ib$

ทฤษฎีบท

ให้ $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

จะได้ว่า

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \{ \cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2) \}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2) \} \quad \text{ถ้า } z_2 \neq 0$$

ทฤษฎีบทเดอมัวร์ (De Moivre's Theorem)

ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$z^n = r^n (\cos n \theta + i \sin n \theta)$$

บทนิยาม ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

รากที่ n ของ z คือจำนวนเชิงซ้อน ω ที่สอดคล้องกับสมการ $\omega^n = z$

ทฤษฎีบท

ถ้า $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ แล้ว รากที่ n ของ z มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกันคือ

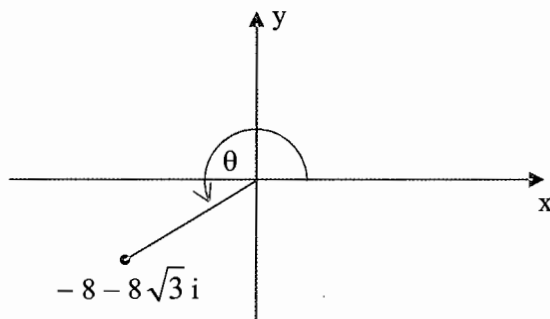
$$z_k = \sqrt[n]{r} \left\{ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right\}$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

เมื่อแทน $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ เป็นจุดบนระนาบ จะได้จุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้าน n ด้าน
แนบในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ $\sqrt[n]{r}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 1 จงหารากที่ 4 ของ $-8-8\sqrt{3}i$

วิธีทำ เปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อน $-8-8\sqrt{3}i$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว



$$r = |-8-8\sqrt{3}i| = 16$$

$$\tan \theta = \frac{-8\sqrt{3}}{-8} = \sqrt{3} \quad \text{ดังนั้น} \quad \theta = \frac{4}{3}\pi$$

รากที่ 4 ของ $-8-8\sqrt{3}i$ คือ

$$z_k = \sqrt[4]{16} \left\{ \cos \frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi}{4} \right\}$$

เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3$

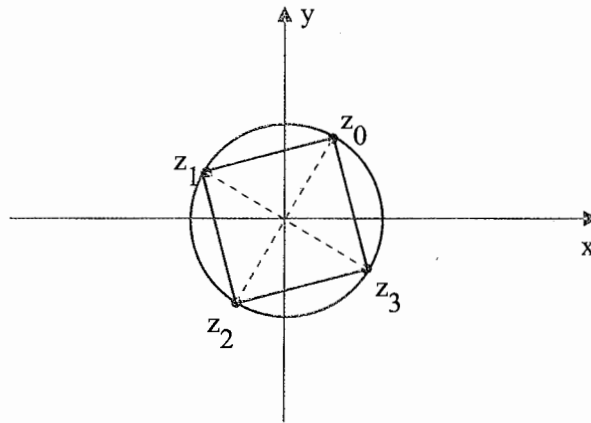
$$\text{เมื่อ } k = 0 \quad z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\text{เมื่อ } k = 1 \quad z_1 = 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} \right) \right\} = -\sqrt{3} + i$$

$$\text{เมื่อ } k = 2 \quad z_2 = 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \pi \right) \right\} = -1 - \sqrt{3}i$$

$$\text{เมื่อ } k = 3 \quad z_3 = 2 \left\{ \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{3}{2}\pi \right) \right\} = \sqrt{3} - i$$

เมื่อแทน z_0, z_1, z_2, z_3 เป็นจุดบนระนาบ จะได้จุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แนบในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และมีรัศมีเท่ากับ 2 หน่วย ดังรูป



สมบัติทางเรขาคณิต

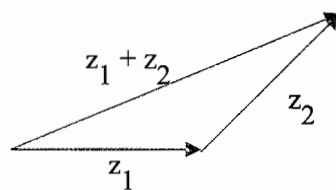
1. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจุดที่แตกต่างกันในระนาบเชิงซ้อน และ z เป็นจุดใด ๆ บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด z_1 และ z_2 แล้ว

$$z - z_1 = t(z_2 - z_1) \text{ สำหรับบางจำนวนจริง } t \text{ ที่ } 0 < t < 1$$

จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด z_1 และ z_2 คือ $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$

2. สำหรับ $z = x + iy$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง
ค่าสัมบูรณ์ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ เป็นความยาวของเวกเตอร์ z หรือ
กล่าวได้ว่า $|z|$ เป็นระยะทางจากจุดกำเนิด $(0, 0)$ ไปยังจุด z

3. สำหรับ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ พิจารณาผลบวก $z_1 + z_2$ ในเชิงเวกเตอร์ ดังนี้



จากรูป $|z_1|$, $|z_2|$ และ $|z_1 + z_2|$ เป็นความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม
อสมการสามเหลี่ยม คือ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

4. ให้ A, B, C และ D เป็นจุดที่แตกต่างกันในระนาบเชิงซ้อน ดังนั้น

$$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{B-A}{D-C} \right) = 0$$

$$\vec{AB} \perp \vec{CD} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \operatorname{Re} \left(\frac{B-A}{D-C} \right) = 0$$

การประยุกต์ทางเรขาคณิต

ทฤษฎีบทวงกลมเก้าจุด

ในรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมใด ๆ

- (1) จุดปลายสามจุดของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอด มายังด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม
- (2) จุดกึ่งกลางทั้งสามจุดของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม และ
- (3) จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดทั้งสามกับจุดออร์โทเซนเตอร์

จุดทั้งเก้าจุดนี้อยู่บนวงกลมวงเดียวกัน

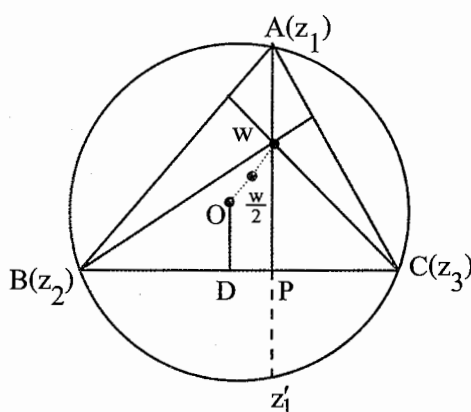
เรียกวงกลมที่ผ่านจุดทั้งเก้าจุดนี้ว่า วงกลมเก้าจุด

พิสูจน์

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมใด ๆ สร้างวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O และมีรัศมี r หน่วย โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติจุด O เป็นจุด $(0, 0)$ (เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยม พบกันที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมนี้)

แทนจุดยอด A, B และ C ด้วยจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 และ z_3 ตามลำดับ

ดังนั้น $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$



$$\text{ให้ } w = z_1 + z_2 + z_3$$

เนื่องจาก $w - z_1 = z_2 + z_3$ และ $\frac{1}{2}(z_2 + z_3)$ เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

แทนด้วยจุด D ดังนั้น w อยู่บนเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอด A ไปยังด้าน BC

และมีความยาว $|w - z_1|$ เป็นสองเท่าของ OD

โดยการสมมาตร w อยู่บนเส้นตั้งฉากจากจุดยอด B ไปยังด้าน CA และอยู่บนเส้นตั้งฉากจากจุด C ไปยังด้าน AB

ดังนั้น w เป็นจุดออร์โทเซนเตอร์ของรูป $\triangle ABC$

เนื่องจาก $\frac{w}{2} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2 + z_3)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด O กับจุด

ออร์โทเซนเตอร์ของรูป $\triangle ABC$

$$\text{ระยะทางจาก } \frac{w}{2} \text{ ไปยังจุด D เท่ากับ } \left| \frac{z_2 + z_3}{2} - \frac{w}{2} \right| = \left| \frac{z_1}{2} \right| = \frac{r}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน ระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยังจุดกึ่งกลาง E ของด้าน CA เท่ากับ $\frac{r}{2}$

และระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยังจุดกึ่งกลาง F ของด้าน AB เท่ากับ $\frac{r}{2}$

ระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยังจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอด A

$$\text{เท่ากับ } \left| \frac{z_1 + w}{2} - \frac{w}{2} \right| = \left| \frac{z_1}{2} \right| = \frac{r}{2}$$

ในทำนองเดียวกัน ระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยังจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดออร์โทเซนเตอร์

กับจุดยอด B เท่ากับ $\frac{r}{2}$ และ

ระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยังจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดออร์โทเซนเตอร์กับจุดยอด C เท่ากับ $\frac{r}{2}$

ให้ P เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอด A ไปยังด้านตรงข้าม BC ต่อเส้นตั้งฉากนี้ออกไปพบ

วงกลมที่จุด z'_1 ดังนั้น z'_1 สอดคล้องกับเงื่อนไข $\vec{z_1 z'_1}$ ตั้งฉากกับ $\vec{z_2 z_3}$

$$|z'_1| = r \text{ และ } z'_1 \neq z_1$$

$$\text{จาก } \vec{z_1 z'_1} \text{ ตั้งฉากกับ } \vec{z_2 z_3} \text{ จะได้ว่า } \operatorname{Re} \left(\frac{z_1 - z'_1}{z_2 - z_3} \right) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{z_1 - z'_1}{z_2 - z_3} + \frac{\overline{z_1 - z'_1}}{\overline{z_2 - z_3}} = 0 \quad (*)$$

$$\text{แทนค่า } \overline{z_1} = \frac{r^2}{z_1}, \quad \overline{z'_1} = \frac{r^2}{z'_1}, \quad \overline{z_2} = \frac{r^2}{z_2} \text{ และ } \overline{z_3} = \frac{r^2}{z_3}$$

ในสมการ (*) จะได้

$$\frac{z_1 - z'_1}{z_2 - z_3} \left\{ 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z'_1} \right\} = 0$$

ดังนั้น $z'_1 = - \frac{z_2 z_3}{z_1}$

ระยะทางจากจุดยอด B ไปยัง z'_1 เท่ากับ $\left| z_2 + \frac{z_2 z_3}{z_1} \right| = \left| \frac{z_3}{z_1} \right| |z_1 + z_3| = |z_1 + z_3|$

ระยะทางจากจุดยอด B ไปยัง w เท่ากับ $|z_2 - (z_1 + z_2 + z_3)| = |z_1 + z_3|$

ดังนั้น $\triangle Bz'_1w$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เพราะฉะนั้น $P = \frac{1}{2} (w + z'_1)$

ระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยัง P เท่ากับ $\left| \frac{1}{2} (w + z'_1) - \frac{w}{2} \right| = \left| \frac{z'_1}{2} \right| = \frac{r}{2}$

ในทำนองเดียวกัน ระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยังจุดปลายเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอด B ไปยังด้านตรงข้าม CA

เท่ากับ $\frac{r}{2}$ และ

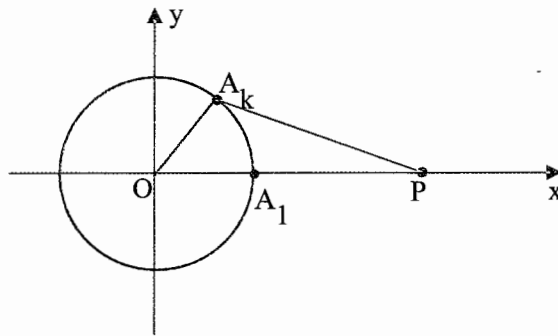
ระยะทางจาก $\frac{w}{2}$ ไปยังจุดปลายเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอด C ไปยังด้านตรงข้าม AB เท่ากับ $\frac{r}{2}$

ดังนั้น วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $\frac{w}{2}$ และรัศมียาว $\frac{r}{2}$ หน่วยผ่านจุดทั้งเก้าจุดนี้

ตัวอย่างที่ 2 จุด $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่แนบในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด O และรัศมีเท่ากับ r หน่วย ให้ P เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง OA_1 ที่ต่อออกไปจาก A_1

จงแสดงว่า
$$\prod_{k=1}^n PA_k = OP^n - r^n$$

วิธีทำ พิจารณานระนาบเชิงซ้อน ให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และรัศมีเท่ากับ r หน่วย โดยมีรูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลมและให้จุดยอด A_1 และจุด P อยู่บนแกนจริง (แกน x) ดังรูป



ดังนั้น $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นรากทั้งหมดของ $z^n - r^n = 0$

ในที่นี้ A_k แทนด้วย $z_k = re^{2\pi(k-1)i/n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

และ P แทนด้วย z (เป็นจำนวนจริง)

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n PA_k &= \prod_{k=1}^n |z - z_k| \\ &= \left| \prod_{k=1}^n (z - z_k) \right| \\ &= \left| z^n - r^n \right| \\ &= |z^n - r^n| \quad (z \text{ และ } r \text{ เป็นจำนวนจริง}) \\ &= OP^n - r^n \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$\prod_{k=1}^n PA_k = OP^n - r^n$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดจุด P อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย และ $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้าน n ด้าน แนบในวงกลมนี้

$$\text{จงแสดงว่า } PA_1^2 + PA_2^2 + \dots + PA_n^2 = 2n$$

วิธีทำ พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$

ดังนั้น $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นรากทั้งหมดของ $Z^n - 1 = 0$

ให้ A_k แทนด้วย $z_k = e^{2\pi ki/n}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)

และ P แทนด้วย z ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n PA_k^2 &= \sum_{k=1}^n |z - z_k|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (z - z_k)(\bar{z} - \bar{z}_k) \quad (|w|^2 = w\bar{w}) \\ &= \sum_{k=1}^n (z\bar{z} - z_k\bar{z} - z\bar{z}_k + z_k\bar{z}_k) \\ &= \sum_{k=1}^n z\bar{z} - \left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\bar{z} - z\left(\sum_{k=1}^n \bar{z}_k\right) + \sum_{k=1}^n z_k\bar{z}_k \end{aligned}$$

เนื่องจาก $z_1, \dots, z_n$ เป็นรากทั้งหมดของ $Z^n - 1 = 0$ และสัมประสิทธิ์ของ Z^{n-1} เท่ากับศูนย์

$$\text{ดังนั้น } \sum_{k=1}^n z_k = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n PA_k^2 &= \sum_{k=1}^n z\bar{z} + \sum_{k=1}^n z_k\bar{z}_k \\ &= \sum_{k=1}^n |z|^2 + \sum_{k=1}^n |z_k|^2 \\ &= n + n \quad (|z| = 1 \text{ และ } |z_k| = 1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{k=1}^n PA_k^2 = 2n$$

แบบฝึกหัด 9.1

- กำหนดให้ A_0, A_1, A_2, A_3 และ A_4 เป็นจุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย โดยที่แบ่งเส้นรอบวงออกเป็น 5 ส่วน เท่าๆ กัน

จงพิสูจน์ว่า คอร์ด $A_0 A_1$ และคอร์ด $A_0 A_2$ สอดคล้องกับ

$$(A_0 A_1 \cdot A_0 A_2)^2 = 5$$

- กำหนดจุด P อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย และจุด $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นจุดยอดของรูปหลายเหลี่ยมปกติที่มีด้าน n ด้านแนบในวงกลมนี้

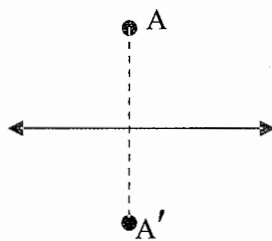
จงแสดงว่า $PA_1^4 + PA_2^4 + \dots + PA_n^4$ มีค่าคงที่

การแปลงทางเรขาคณิต

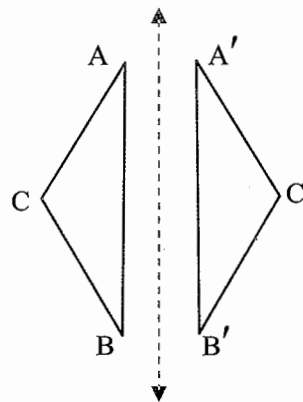
เรขาคณิตไม่ใช่เพียงแต่จะศึกษาถึงรูป (Figure) เท่านั้น แต่ยังจะต้องศึกษาถึงการเคลื่อนที่ของรูปเหล่านั้นด้วย ถ้าเคลื่อนจุดต่าง ๆ ของรูปเรขาคณิตไปตามหลักเกณฑ์ ก็จะสามารถสร้างรูปเรขาคณิตรูปใหม่ขึ้น เรขาคณิตที่จะอธิบายการเคลื่อนที่เช่นนั้นได้ ก็ได้แก่การจับคู่แบบหนึ่งต่อหนึ่งที่สมนัยกันระหว่างจุดต่าง ๆ ในระนาบของภาพต้นแบบ หรือบุพภาพ (Preimage) กับจุดต่าง ๆ ของภาพ (Image) ที่เกิดขึ้น

บทนิยาม การแปลง (Transformation) คือการสมนัยระหว่างจุดต่าง ๆ ในระนาบของภาพต้นแบบ หรือบุพภาพ (Preimage) กับจุดต่าง ๆ ของภาพ (Image) ที่เกิดขึ้น

พิจารณารูปต่อไปนี้



รูปที่ 1



รูปที่ 2

บางทีก็เรียกการแปลงอีกอย่างหนึ่งว่าการส่ง (Mapping)

จากรูปที่ 1 จุด A ถูกส่งไปยังจุด A' เรียกจุด A' ว่าภาพของจุด A เรียกจุด A ว่า ภาพต้นแบบ หรือ บุพภาพของจุด A'

จากรูปที่ 2

จุด A สมนัยกับจุด A'	จุด A เป็นบุพภาพของจุด A'
จุด B สมนัยกับจุด B'	จุด B เป็นบุพภาพของจุด B'
จุด C สมนัยกับจุด C'	จุด C เป็นบุพภาพของจุด C'

รูปแบบของการแปลง

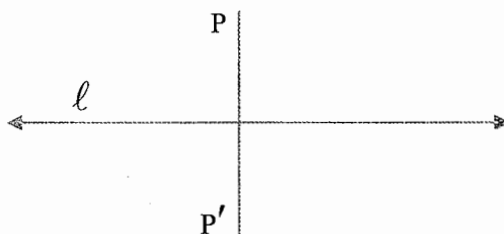
แบบที่หนึ่ง การแปลงที่เป็นการเคลื่อนที่คงรูป (Rigid motion) สัมพันธ์กับการเท่ากันทุกประการ การแปลงแบบนี้ รูปที่เกิดขึ้นจะยังคงรักษาภาวะร่วมเส้นตรง (Collinearity) คือระยะห่างระหว่างจุด ตลอดจนมีรูปร่างลักษณะและขนาดเท่ากับภาพต้นแบบหรือบุพภาพ เรียกการแปลงแบบนี้ว่า **สมมติ** (Isometry) การแปลงที่มีสมบัติดังกล่าวได้แก่ การสะท้อน (Reflection) การเลื่อนขนาน (Translation) และการหมุน (Rotation)

แบบที่สอง การแปลงที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนขนาด (Dilation) อาจย่อหรือขยายรูป การแปลงแบบนี้สัมพันธ์กับความคล้าย

ต่อไปนี้จะกล่าวถึง การสะท้อน การเลื่อนขนาน และการหมุนไปตามลำดับ

การสะท้อน (Reflection)

บทนิยาม ในระนาบระนาบหนึ่ง การสะท้อนข้ามเส้นตรง l เป็นการแปลง ซึ่งส่งแต่ละจุด P บนระนาบไปยังจุด P'



ถ้าจุด P อยู่บนเส้นตรง l แล้ว $P' = P$

ถ้าจุด P ไม่อยู่บนเส้นตรง l แล้ว l เป็นเส้นตั้งฉากที่แบ่งครึ่ง $\overline{PP'}$

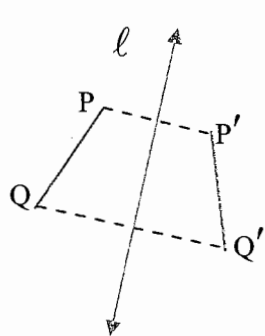
เรียก l ว่า **เส้นของการสะท้อน** (Line of reflection)

เรียก P' ว่า **ภาพสะท้อน** (Reflection image)

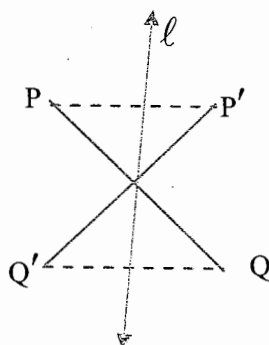
การแปลงเป็นการคงสภาพระยะทาง (Distance preserving) ก็ต่อเมื่อระยะทางระหว่างสองจุดใด ๆ เท่ากับระยะทางระหว่างภาพของจุดทั้งสองนั้น

ท่านคิดว่า การสะท้อนข้ามเส้นตรงเส้นหนึ่งมีสมบัตินี้หรือไม่

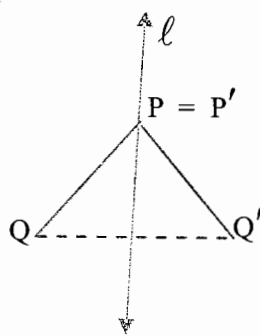
จากกรณีต่างๆ ที่แสดงต่อไปนี้ $PQ = P'Q'$ หรือไม่



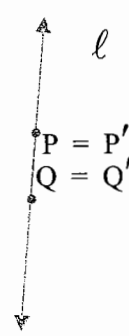
กรณีที่ 1



กรณีที่ 2



กรณีที่ 3



กรณีที่ 4

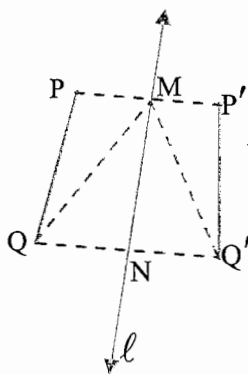
ทฤษฎีบท การสะท้อนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง เป็นการแปลงที่คงสภาพระยะทาง

กำหนดให้ P' และ Q' เป็นภาพสะท้อนของ P และ Q ข้ามเส้น l

จะพิสูจน์ว่า $PQ = P'Q'$

สร้าง กรณีที่ 1 P และ Q อยู่ข้างเดียวกันของ l

พิสูจน์ ลาก $\overline{PP'}$ และ $\overline{QQ'}$ ตัดเส้นตรง l ที่จุด M และจุด N



ลาก $\overline{MQ}$ และ $\overline{MQ'}$

แสดงว่า $\triangle MNQ \cong \triangle MNQ'$ (ด. น. ค.)

$$MQ = MQ' \text{ และ } \widehat{QMN} = \widehat{Q'MN}$$

$$\widehat{PMQ} = \widehat{PMN} - \widehat{QMN}$$

$$\text{และ } \widehat{P'MQ'} = \widehat{P'MN} - \widehat{Q'MN}$$

$$\text{ดังนั้น } \widehat{PMQ} = \widehat{P'MQ'}$$

$$\triangle PQM \cong \triangle P'Q'M \text{ (ด. ม. ค.)}$$

$$\text{ดังนั้น } PQ = P'Q'$$

สมบัติของการแปลงคงสภาพระยะทาง

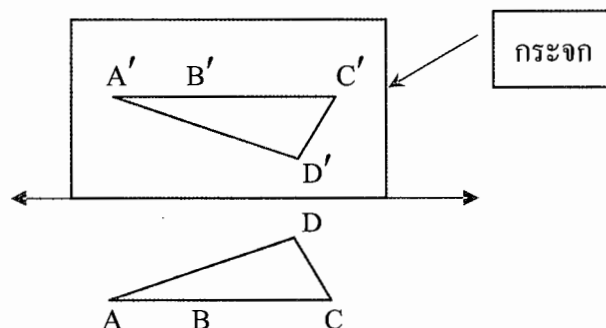
จุดประสงค์ : เพื่อตรวจสอบและประยุกต์สมบัติของการแปลงคงสภาพระยะทาง

สมมติว่าภาพการสะท้อนของ $\triangle ACD$ อยู่ด้านหลังของกระจกดังแสดงในภาพ

จุด A จุด B และจุด C จะร่วมเส้นตรง (Collinear) หรือไม่

ภาพสะท้อนของจุด A จุด B และจุด C จะร่วมเส้นตรงหรือไม่

เราทราบว่า การสะท้อนของกระจกคงสภาพร่วมเส้นตรงของจุดต่าง ๆ

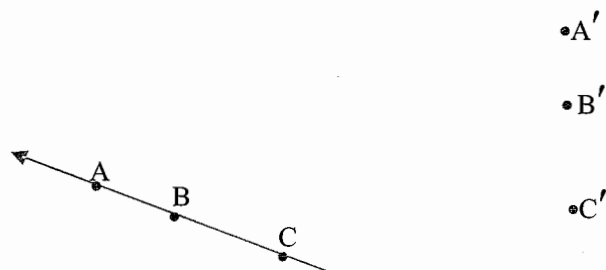


การสะท้อนของกระจกคงสภาพระหว่างจุดต่าง ๆ หรือไม่

ท่านคิดว่า การวัดมุมจะคงสภาพการสะท้อนเช่นนั้นหรือไม่

ภาพสะท้อนของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยมเดิมหรือไม่

ทฤษฎีบท การแปลงคงสภาพระยะทาง จะคงสภาพภาวะร่วมเส้นตรง และคงสภาพระหว่างจุดต่าง ๆ



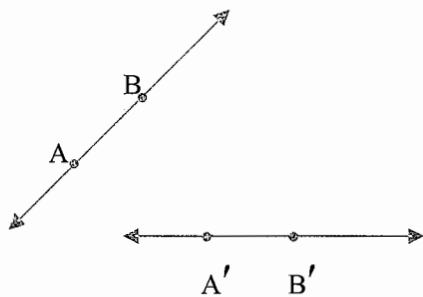
กำหนดให้ จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C บน $\overline{AC}$
 จุด A' จุด B' และจุด C' เป็นภาพของจุด A จุด B และจุด C ภายใต้การแปลงคงสภาพระยะทาง

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จุด A' จุด B' และจุด C' ร่วมเส้นตรง
 จุด B' อยู่ระหว่างจุด A' และจุด C'

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. จุด A' จุด B' และจุด C' เป็นภาพของจุด A จุด B และจุด C ภายใต้การแปลงคงสภาพระยะทาง	1. กำหนดให้
2. $AB = A'B'$ $BC = B'C'$ $AC = A'C'$	2. จากบทนิยามของการแปลงคงสภาพระยะทาง
3. จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C	3. กำหนดให้
4. $AB + BC = AC$	4. จากข้อ 3
5. $A'B' + B'C' = A'C'$	5. จากข้อ 2 และข้อ 4
6. จุด B' อยู่ระหว่างจุด A' และจุด C'	6. จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C ก็ต่อเมื่อ $AB + BC = AC$ (ข้อ 5)
7. ดังนั้น จุด A' จุด B' และจุด C' ร่วมเส้นตรง	7. บทนิยามของการอยู่ระหว่าง (ข้อ 6)

ทฤษฎีบท ถ้าการแปลงคงสภาพระยะทาง ส่งจุด A ไปยังจุด A' และจุด B ไปยังจุด B' แล้ว



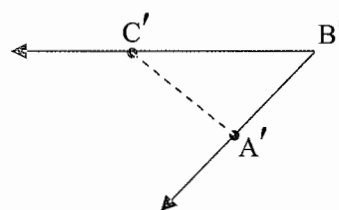
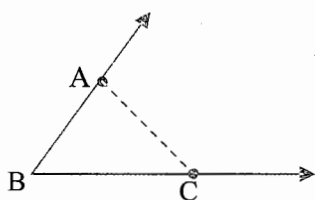
ภาพของ $\overleftrightarrow{AB}$ คือ $\overleftrightarrow{A'B'}$

ภาพของ $\overline{AB}$ คือ $\overline{A'B'}$

ภาพของ $\vec{AB}$ คือ $\vec{A'B'}$

ทฤษฎีบท การแปลงคงสภาพระยะทาง จะคงสภาพขนาดของมุม

กำหนดให้ จุด A' จุด B' และจุด C' เป็นภาพของจุด A จุด B และจุด C ภายใต้การแปลงคงสภาพระยะทาง



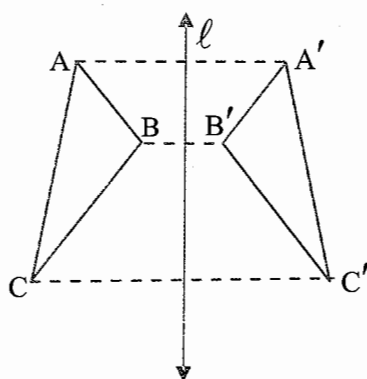
สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\angle ABC = \angle A'B'C'$$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. จุด A' จุด B' และจุด C' เป็นภาพของ จุด A จุด B และจุด C ภายใต้ การแปลงคงสภาพระยะทาง	1. กำหนดให้
2. ลาก $\overline{AC}$ และ $\overline{A'C'}$	2. จุดสองจุดที่มีคือจุด A และจุด C จุด A' และจุด C'
3. $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ และ $AC = A'C'$	3. บทนิยามของการแปลงคงสภาพระยะทาง
4. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ และ $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$	4. บทนิยามของการเท่ากันทุกประการของส่วน ของเส้นตรง (ข้อ 3)
5. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	5. จากข้อ 4
6. $\angle B \cong \angle B'$	6. จากข้อ 5
7. $\angle B = \angle B'$	7. จากข้อ 6

ทฤษฎีบท ภายใต้การแปลงคงสภาพระยะทาง รูปสามเหลี่ยมและภาพของรูปสามเหลี่ยมนั้น
เท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง
 $A'B'C'$ เป็นภาพของรูปสามเหลี่ยม ABC
 l เป็นเส้นของการสะท้อน
 จุด A' จุด B' และจุด C' เป็นภาพของจุด A จุด B และจุด C ภายใต้การแปลง
 คงสภาพของระยะทาง

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

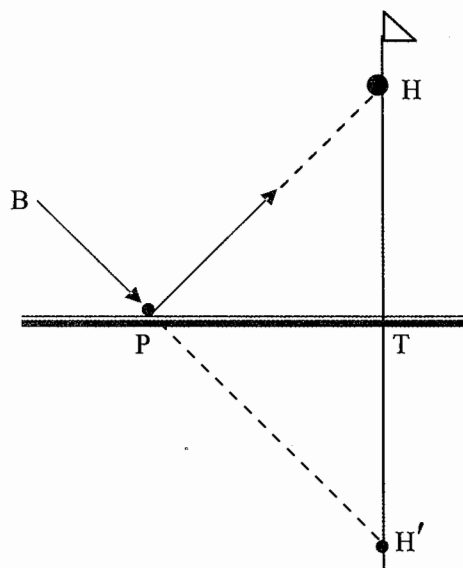
พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
1. จุด A' จุด B' และจุด C' เป็นภาพของจุด A จุด B และจุด C ภายใต้การแปลงคงสภาพระยะทาง	1. กำหนดให้
2. $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ และ $AC = A'C'$	2. บทนิยามของการแปลงคงสภาพระยะทาง
3. $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ และ $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$	3. บทนิยามของการเท่ากันทุกประการ ของส่วนของเส้นตรง (ข้อ 2)
4. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$	4. จากข้อ 3

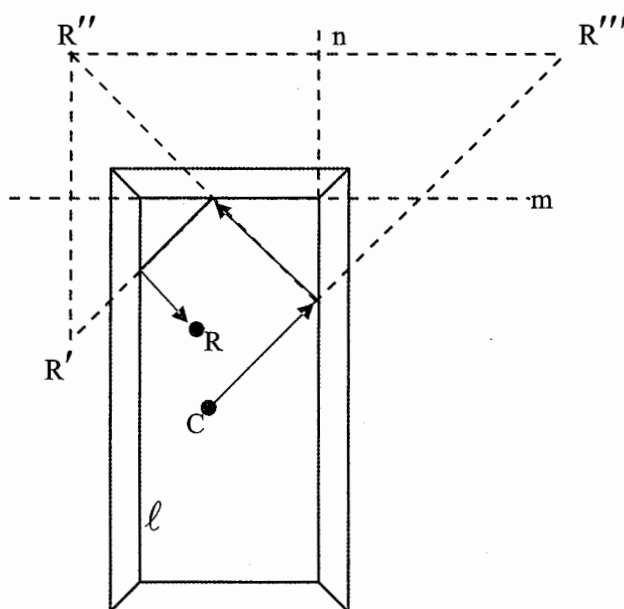
การนำการสะท้อนไปใช้

เมื่อพิจารณาเส้นของการสะท้อน เราสามารถนำไปใช้ได้ทั้งในด้านศิลปะ วิศวกรรม วิทยาศาสตร์ และกีฬา ตลอดจนนำไปสร้างภาพที่สวยงามได้

(1) การตีกอล์ฟ พิจารณาจากรูปข้างล่างนี้ การทำมุมตกเท่ากับมุมสะท้อน ก็สามารถทำให้ลูกกอล์ฟลงหลุมได้



(2) การแทงบิลเลียด โดยใช้การสะท้อน



จากรูป

แทงไม้คิวที่จุด C ทำอย่างไร ลูกบิลเลียดจึงจะกระทบสามด้าน แล้วสะท้อนมาถูกลูกบิลเลียดที่จุด R
พิจารณาจากรูป

R' เป็นภาพสะท้อนของ R มี l เป็นเส้นของการสะท้อน

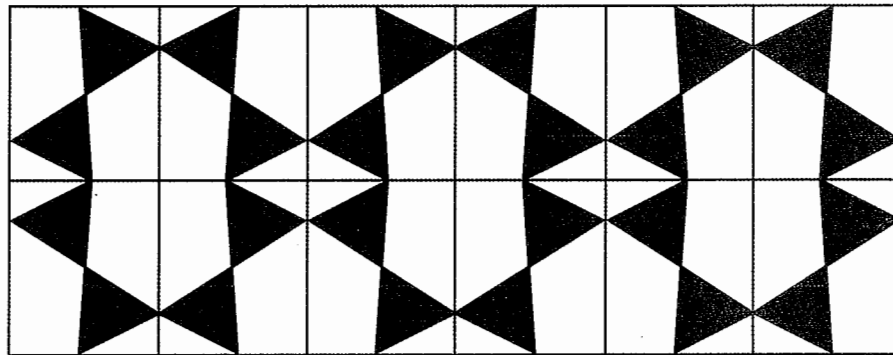
R'' เป็นภาพสะท้อนของ R' มี m เป็นเส้นของการสะท้อน

R''' เป็นภาพสะท้อนของ R'' มี n เป็นเส้นของการสะท้อน

แทงไม้คิว เพื่อจะแทงลูกบิลเลียดไปที่ $\overline{CR''}$ ตัดกับเส้นของการสะท้อน

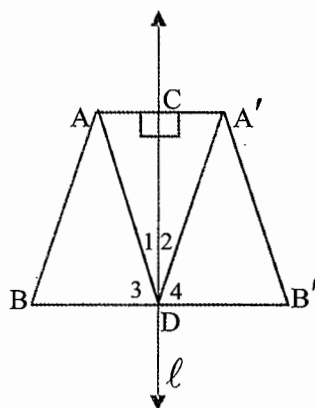
(3) การสร้างภาพ

ใช้การสะท้อนก็ได้ภาพที่สวยงาม



ใช้ความรู้เรื่องการสะท้อนสร้างภาพต่าง ๆ ดังตัวอย่างข้างต้น

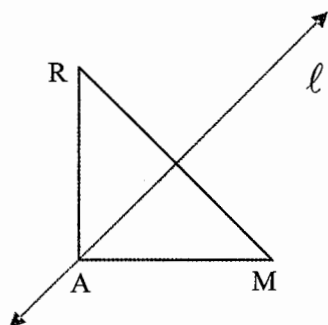
แบบฝึกหัด 10.1



1. จากรูป จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) เส้นตรง l สัมพันธ์กับ AA' และ BB' อย่างไร
- 2) $\triangle ACD \cong \triangle A'DC$ หรือไม่ เพราะเหตุใด
- 3) $AD = A'D$ หรือไม่
- 4) $\hat{1} = \hat{2}$ หรือไม่
- 5) $\hat{1}$ กับ $\hat{3}$ และ $\hat{2}$ กับ $\hat{4}$ สัมพันธ์กันอย่างไร
- 6) $\hat{3} = \hat{4}$ เพราะเหตุใด
- 7) $\triangle ABD \cong \triangle A'B'D'$ เพราะเหตุใด
- 8) $AB = A'B'$ เพราะเหตุใด

2.

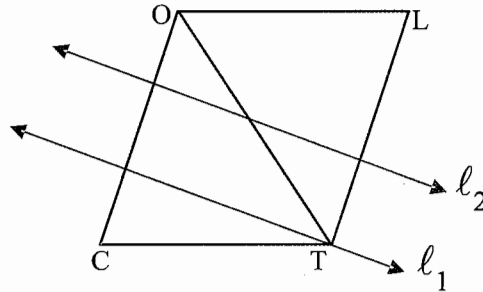


จากรูป กำหนดให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด R

ผ่านเส้นของการสะท้อน l

จงพิสูจน์ว่า $\triangle RAM$ เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

3.



จากรูป กำหนดจุด O เป็นจุดสะท้อนของจุด C

ผ่านเส้นของการสะท้อน l_1

จุด L เป็นจุดสะท้อนของจุด T

ผ่านเส้นของการสะท้อน l_2

$$CO = TL$$

จงพิสูจน์ว่า COLT เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

4. กำหนดให้ จุด A' จุด B' และจุด M' เป็นภาพของ

จุด A จุด B และจุด M ภายใต้การแปลงคงสภาพระยะทาง

M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

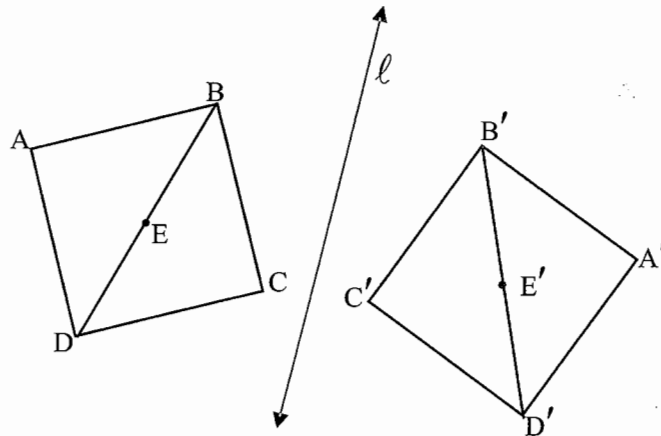
จงพิสูจน์ว่า M' เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{A'B'}$

5. ถ้า l' เป็นภาพสะท้อนของ l

ผ่านเส้นของการสะท้อน m และ l ขนานกับ m

จงพิสูจน์ว่า l ขนานกับ l'

6.



จากรูป

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

จุด A' จุด B' จุด C' จุด D' และจุด E' เป็นภาพสะท้อนของ จุด A จุด B จุด C จุด D และจุด E ตามลำดับ

ทำไมข้อความต่อไปนี้ จึงเป็นจริง

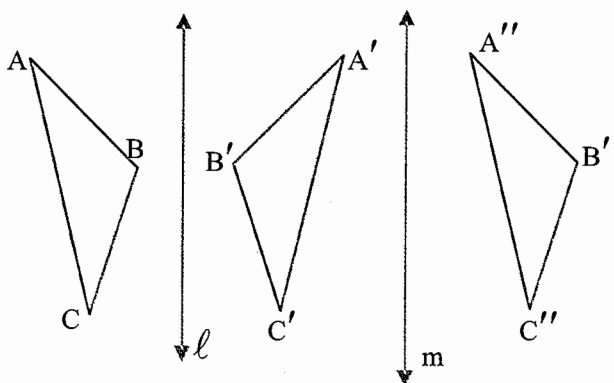
1) $AB = A'B'$

2) $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$

3) ถ้าจุด A จุด E และจุด C ร่วมเส้นตรงแล้วจุด A' จุด E' และจุด C' จะร่วมเส้นตรงด้วย4) ถ้า E เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BD}$ แล้ว E' จะเป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{B'D'}$

การเลื่อนขนาน (Translation)

จากความรู้เกี่ยวกับการสะท้อน จงพิจารณารูปต่อไปนี้



$\triangle ABC$ สะท้อนข้ามเส้นของการสะท้อน l เป็น $\triangle A'B'C'$

$\triangle A'B'C'$ สะท้อนข้ามเส้นของการสะท้อน m เป็น $\triangle A''B''C''$

เส้นของการสะท้อน l ขนานกับเส้นของการสะท้อน m

การสะท้อนสองครั้งต่อเนื่องกัน ทำให้

จุด A ถูกส่งไปยัง A''

จุด B ถูกส่งไปยัง B''

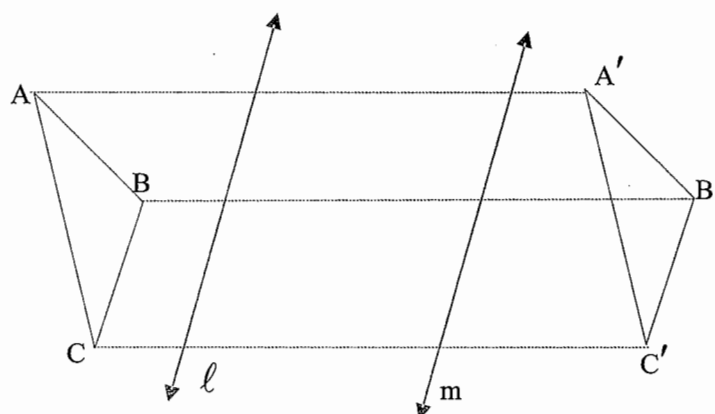
จุด C ถูกส่งไปยัง C''

การส่งที่กล่าวข้างต้น ประกอบด้วย การสะท้อนสองครั้งทีผ่านเส้น l และเส้น m ที่ขนานกัน

$\triangle ABC$ เลื่อนไปอยู่ในตำแหน่ง $\triangle A''B''C''$ และมีทิศทางเดียวกัน

บทนิยาม การเลื่อนขนานประกอบด้วย การสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นของการสะท้อนสองเส้นที่ขนานกัน

ทฤษฎีบท การเลื่อนขนานเป็นการแปลงคงสภาพระยะทาง (distance – preserving)



การเลื่อนขนานมีสมบัติของการส่งคงสภาพระยะทาง

ระยะ AA' เท่ากับระยะ BB' และระยะ CC'

$\overline{AC}$ ขนานกับ $\overline{A'C'}$ และ $AC = A'C'$

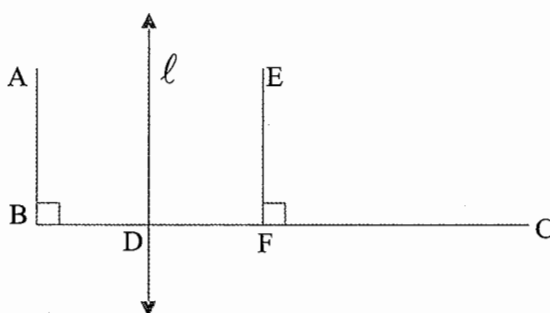
$\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{A'B'}$ และ $AB = A'B'$

$\overline{BC}$ ขนานกับ $\overline{B'C'}$ และ $BC = B'C'$

$\triangle ABC$ และ $\triangle A'B'C'$ อยู่ในทิศทางเดียวกัน

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

ทฤษฎีบท ส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งเมื่อเลื่อนขนานแล้ว ภาพที่เกิดขึ้นจะขนานกับส่วนของเส้นตรงเส้นนั้น



กำหนดให้ l เป็นเส้นของการสะท้อน

AB เป็นส่วนของเส้นตรง

วิธีที่ 1

สร้าง

ลากเส้นตั้งฉาก BC ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$ ที่จุด B ตัดเส้นของการสะท้อน ℓ ที่จุด D

จากจุด D ใช้ระยะ BD ตัด BC ที่จุด F

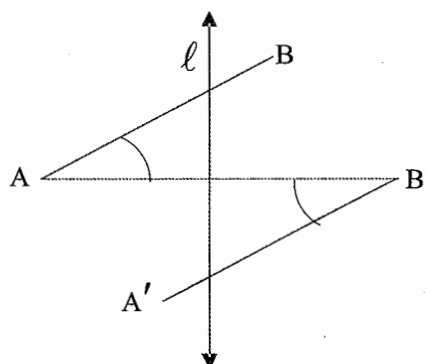
ลาก EF ตั้งฉากกับ BC ที่จุด F

ให้ $EF = AB$

พิสูจน์

เพราะว่า $\widehat{ABD} = \widehat{DFE} = 90^\circ$ (สร้าง)ดังนั้น $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$

วิธีที่ 2



สร้าง

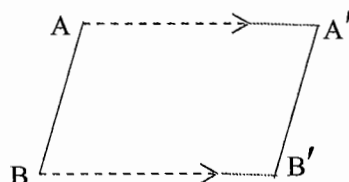
ลาก $\overline{AB}$ ตัดเส้นของการสะท้อน ℓ สร้างมุมแย้ง $\angle BAB' = \angle A'B'A'$ ให้ $\overline{B'A'}$ ขาวเท่ากับ $\overline{BA}$

พิสูจน์

เพราะว่า มุมแย้ง $\angle BAB' = \angle A'B'A'$ (สร้าง)ดังนั้น $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

ทฤษฎีบท

ถ้าการเลื่อนขนานส่งจุด A ไปยังจุด A'

และจุด B ไปยังจุด B' แล้ว $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$ และ $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$ 

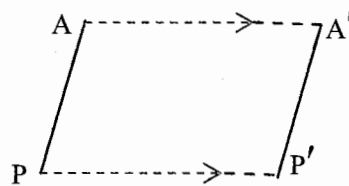
กำหนดให้ จุด A' และจุด B' เป็นภาพของการเลื่อนขนานของจุด A และจุด B

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$
 $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$

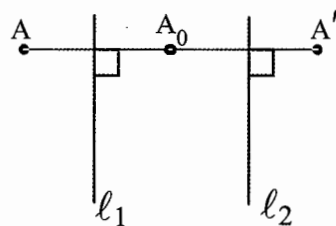
พิสูจน์ $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ (ตามทฤษฎีบท)
 $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ (ตามทฤษฎีบท)
 $ABB'A'$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
 ดังนั้น $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'}$
 และ $\overline{AA'} \cong \overline{BB'}$

จากทฤษฎีดังกล่าวข้างต้น นำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า การเลื่อนขนานอาจจะถูกกำหนดโดยจุดใดจุดหนึ่ง เช่น จุด A ซึ่งมี A' เป็นภาพของจุด A

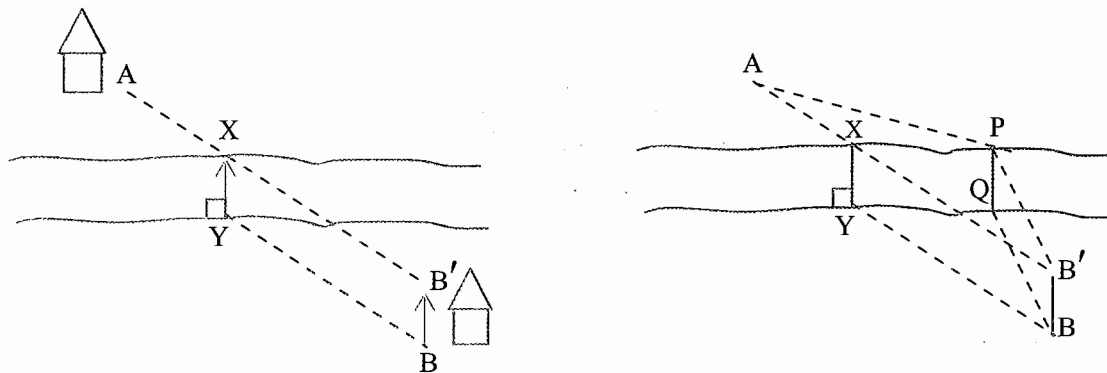
ถ้าต้องการหาภาพของจุด P ซึ่งไม่อยู่บน $\overline{AA'}$ ก็สามารถทำได้โดยสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งมีจุด P จุด A และจุด A' เป็นจุดยอดสามจุด เราก็สามารถหาภาพของจุด ๆ หนึ่งบน $\overline{AA'}$ ได้



ทฤษฎีบท ถ้าการเลื่อนขนานส่ง A ไปยัง A' แล้ว $\overline{AA'}$ จะตั้งฉากกับเส้นขนานแต่ละเส้นที่กำหนดการเลื่อนขนานนั้น และ $\overline{AA'}$ ยาวเป็นสองเท่าของระยะระหว่างคู่ขนานนั้น พิจารณารูปต่อไปนี้



ตัวอย่างที่ 1 ค่ายทหาร A และค่ายทหาร B ตั้งอยู่สองฟากฝั่งของแม่น้ำดังรูป จะสร้างสะพานซึ่งตั้งฉากกับฝั่งแม่น้ำตรงไหน จึงจะทำให้ระยะทางซึ่งเชื่อมค่ายทหารทั้งสองสั้นที่สุด เท่าที่จะเป็นไปได้



วิธีทำ

ให้ B' เป็นภาพของ B ภายใต้การเลื่อนขนานถึง A

$\overline{BB'}$ ตั้งฉากกับฝั่ง

$\overline{BB'}$ เท่ากับความกว้างของแม่น้ำ (ดูรูปที่ 1)

ให้ X เป็นจุดร่วมของ $\overline{AB'}$ กับฝั่งเหนือ

Y เป็นจุดปลายของเส้นตั้งฉากจากจุด X มายังฝั่งใต้

ดังนั้น เส้นทางจาก A ถึง X ต่อไป Y และต่อไปถึง B เป็นเส้นทางที่สั้นที่สุด โดยผ่านสะพาน

พิจารณารูปที่สอง

$\overline{BB'XY}$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$$AX + XY + YB = AX + XB' + B'B$$

ถ้า PQ แทนตำแหน่งของสะพานใด ๆ

ทางที่จะไปถึงสะพานนั้นมีความยาว

$$AP + PQ + QB = AP + PB' + B'B$$

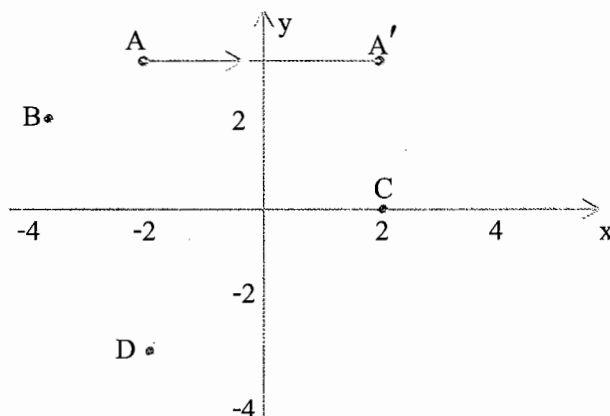
แต่ $AX + XB' + B'B < AP + PB' + B'B$ เพราะเหตุใด

แบบฝึกหัด 10.2

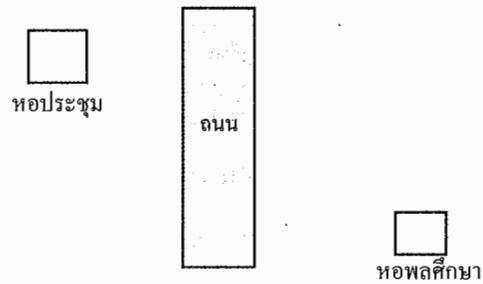
- 1) จงบอกว่าข้อความต่อไปนี้ เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จจงอธิบายว่าเพราะเหตุใด
1. การเลื่อนขนานเป็นการแปลงแบบหนึ่ง
 2. การเลื่อนขนานคงสภาพขนาดของมุม
 3. การเลื่อนขนานผันกลับทิศทาง
 4. ภายใต้การเลื่อนขนาน เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับภาพ
 5. ภายใต้การสะท้อนของเส้นตรงทุก ๆ เส้น เส้นตรงเส้นหนึ่งขนานกับภาพของเส้นตรงเส้นนั้น
 6. ถ้า P' และ Q' เป็นภาพการเลื่อนขนานของ P และ Q แล้ว $PP' = QQ'$
 7. ถ้า S' และ T' เป็นภาพสะท้อนของ S และ T แล้ว $SS' = TT'$
 8. ภาพของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสภายใต้การเลื่อนขนาน ยังคงเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
 9. จุดจุดหนึ่งอาจจะเป็นภาพของตัวเอง โดยการเลื่อนขนาน
 10. จุดจุดหนึ่งอาจจะเป็นภาพของตัวเอง ภายใต้การสะท้อนของเส้นตรงเส้นหนึ่ง

- 2) พิจารณากราฟต่อไปนี้

การเลื่อนขนานส่งจุด A ไปยังจุด A' จงบอกพิกัดของภาพการเลื่อนขนานของจุด B จุด C และจุด D



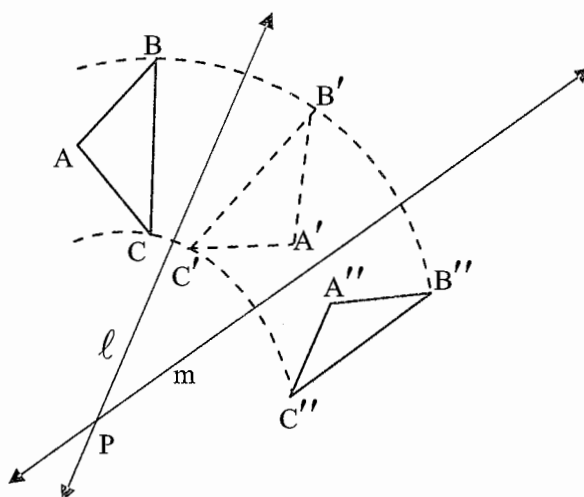
3. โรงเรียนแห่งหนึ่งวางแผนที่จะสร้างถนนเชื่อมระหว่างหอประชุมกับหอพลศึกษา ดังรูป



- 3.1 จงอธิบายว่า ทำไมทางเชื่อมจึงตั้งฉากกับขอบถนน
- 3.2 จงแสดงว่า จะสร้างทางเชื่อมอย่างไร จึงจะทำให้ระยะทางจากหอประชุม ไปยังหอพลศึกษา สั้นที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้

การหมุน (Rotation)

พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป เป็นการสะท้อนสองครั้งที่ข้ามเส้นตรงสองเส้นซึ่งตัดกัน

การสะท้อนข้ามเส้นของการสะท้อน ℓ ส่ง $\triangle ABC$ ไปยัง $\triangle A'B'C'$

การสะท้อนข้ามเส้นของการสะท้อน m ส่ง $\triangle A'B'C'$ ไปยัง $\triangle A''B''C''$

$\triangle ABC$ และ $\triangle A''B''C''$ มีทิศทางเดียวกัน

องค์ประกอบของการส่งสมมูลกับการสะท้อนของเส้นตรงเพียงเส้นเดียวไม่ได้

ในทำนองเดียวกัน องค์ประกอบไม่ปรากฏเป็นการเลื่อนขนาน เพราะเหตุใด

อย่างไรก็ตาม ถ้ารูปสามเหลี่ยมทั้งหลายอยู่บนโต๊ะที่หมุนได้ ซึ่งมี P เป็นจุดศูนย์กลาง

$\triangle ABC$ สามารถหมุนไปอยู่ในตำแหน่ง $\triangle A''B''C''$ ได้

บทนิยาม

การหมุนประกอบด้วย การสะท้อนสองครั้งข้ามเส้นตัดสองเส้น

จุดตัดของเส้นตรงสองเส้น เรียกว่า จุดศูนย์กลางของการหมุน (Center of the rotation)

ทิศทางของการหมุน จะหมุนตามเข็มนาฬิกา หรือทวนเข็มนาฬิกาก็ได้

จากรูปข้างต้น $\triangle ABC$ หมุนตามเข็มนาฬิกา ไปอยู่ในตำแหน่ง $\triangle A''B''C''$

การสะท้อนของเส้นตรงคงสภาพระยะทาง

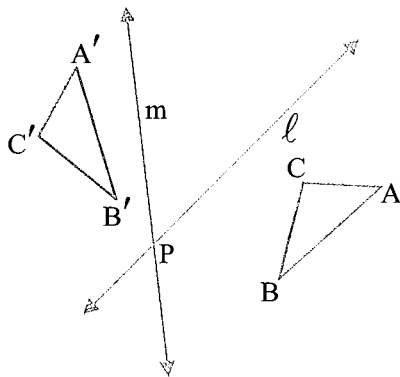
$$AB = A'B'$$

$$\text{และ } A'B' = A''B''$$

$$\text{ดังนั้น } AB = A''B''$$

ทฤษฎีบท การหมุนเป็นการแปลงคงสภาพระยะทาง
 กล่าวคือ การหมุนมีสมบัติต่าง ๆ ร่วมกันคือ การส่งที่คงสภาพระยะทาง
 โดยเฉพาะอย่างยิ่ง
 การหมุนคงสภาพการร่วมเส้นตรง การอยู่ระหว่าง และขนาดของมุม
 การหมุนส่งเส้นตรงไปยังเส้นตรง
 การหมุนส่งรังสีไปยังรังสี
 การหมุนส่งแต่ละส่วนไปยังแต่ละส่วนของภาพใหม่
 การหมุนส่งรูปสามเหลี่ยมไปยังรูปสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ

พิจารณารูปต่อไปนี้

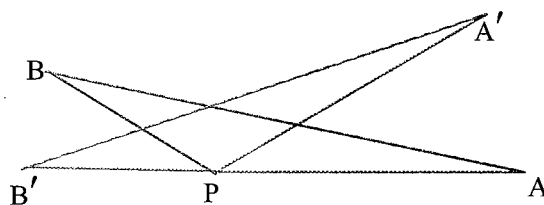


แสดงการหมุนที่จุดศูนย์กลาง P ตามเข็มนาฬิกา
 สร้างรูปนี้ แล้ววัด

$\hat{A}PA'$, $\hat{B}PB'$ และ $\hat{C}PC'$
 มุมทั้งสามนี้ สัมพันธ์กันอย่างไร

วัดมุมแหลมที่ประกอบด้วยเส้นตรง l และเส้นตรง m
 เปรียบเทียบการวัดมุมแหลมนี้กับมุมต่าง ๆ ที่วัดไว้ข้างต้น

ทฤษฎีบท ถ้าการหมุนที่จุดศูนย์กลาง P ส่งจุด A ไปยังจุด A'
 และส่งจุด B ไปยังจุด B' (P ไม่อยู่บน $\overline{AA'}$ หรือ $\overline{BB'}$)
 แล้ว $\hat{A}PA' = \hat{B}PB'$



กำหนดให้ จุด A' และจุด B' เป็นภาพของจุด A และจุด B
 ภายใต้การสะท้อนที่จุดศูนย์กลาง P

สิ่งที่ต้องพิสูจน์

$$\hat{A}PA' = \hat{B}PB'$$

ข้อความ	เหตุผล
1. จุด A' และจุด B' เป็นภาพของจุด A และจุด B ภายใต้การหมุนที่จุดศูนย์กลาง P	1. กำหนดให้
2. ภาพของจุด P คือจุด P	2. จากบทนิยามของการหมุนและการสะท้อน
3. ลาก $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ และ $\overline{AB}$ $\overline{PA'}$, $\overline{PB'}$ และ $\overline{A'B'}$	
4. การหมุนคงสภาพระยะทาง	4. จากทฤษฎีบท
5. $\triangle APB \cong \triangle A'PB'$	5. จากทฤษฎีบท
6. $\hat{APB} = \hat{A'PB'}$	6. ผลจากข้อ 5
7. $\hat{APB} = \hat{APA'} + \hat{A'PB}$ $\hat{A'PB'} = \hat{A'PB} + \hat{BPB'}$	7. ผลจากข้อ 6
8. $\hat{APA'} + \hat{A'PB} = \hat{A'PB} + \hat{BPB'}$	8. จากข้อ 7
9. $\hat{APA'} = \hat{BPB'}$	9. หัก $\hat{A'PB}$ ที่เท่ากันออก

หมายเหตุ

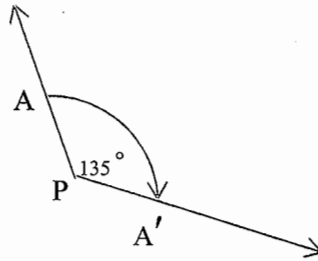
เรียก $\hat{APA'}$ ว่า ขนาดของการหมุน (Magnitude of the rotation)

ถ้าจุด A จุด P และจุด A' ร่วมเส้นตรง ขนาดของการสะท้อนเป็น 180 องศา

ทฤษฎีที่กล่าวมาแล้วสองทฤษฎีเชื่อมั่นได้ว่า

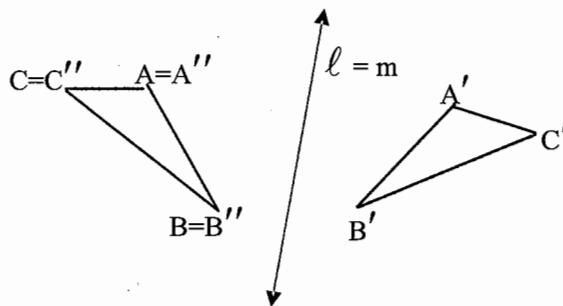
การหมุนจะเน้นที่การกำหนดจุดศูนย์กลาง ขนาดของการหมุนและทิศทางของการหมุน

ตัวอย่างที่ 2 จงหาภาพของจุด A ภายใต้การหมุนที่มี P เป็นจุดศูนย์กลาง ขนาดของการหมุนเป็น 135° และหมุนไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา



วิธีหา ลาก $\vec{PA}$ แล้วสร้างรังสีซึ่งประกอบเป็นมุม 135°
 โดยให้ $\vec{PA}$ หมุนตามเข็มนาฬิกา
 กำหนดจุด A' บนรังสีใหม่
 โดยให้ $PA' = PA$
 ดังนั้นจุด A' เป็นภาพการหมุนของจุด A

ทฤษฎีบท ขนาดของการหมุนครั้งหนึ่งเป็นสองเท่าของมุมแหลมหรือมุมฉาก ที่เกิดระหว่างเส้นของการสะท้อนตัดกัน



ถ้า l และ m เป็นเส้นร่วมระนาบ (coplanar)

แล้ว $l \parallel m$ l ตัด m ที่จุดจุดเดียว

หรือ l และ m เป็นเส้นตรงเดียวกัน

ถ้า $l \parallel m$ มีการสะท้อนข้าม l และ m ก็จะเป็นการเลื่อนขนาน

ถ้าเส้นทั้งสองตัดกันที่จุดจุดเดียว ก็จะเป็นการหมุนผ่านจุดตัดนั้นจากรูปข้างต้น l และ m ทับกัน

จงสังเกตดูว่า $\triangle ABC$ เป็นภาพของตัวมันเองภายใต้การแปลงนี้ เป็นความจริงที่ว่า ทุก ๆ จุดในระนาบเป็นภาพของตัวมันเองภายใต้การแปลง การแปลงซึ่งส่งแต่ละจุดในระนาบไปยังตนเอง เรียกว่า การแปลงเอกลักษณ์ (Identity transformation) หรือกล่าวว่า การแปลงเอกลักษณ์ เป็นการส่งคงสภาพระยะทางอย่างหนึ่ง

แบบฝึกหัด 10.3

(1)



• P

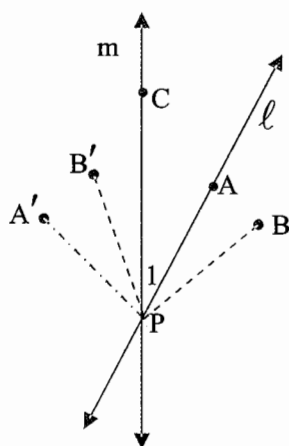
จุดศูนย์กลางของการหมุน

จากรูป

จงหาภาพของ AB ภายใต้การหมุนดังต่อไปนี้

- 1) ขนาดของมุม 90° มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา
- 2) ขนาดของมุม 90° มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
- 3) ขนาดของมุม 120° มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา
- 4) ขนาดของมุม 120° มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

(2)

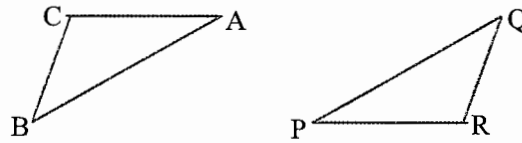


จากรูป

กำหนดให้ P เป็นจุดศูนย์กลางการหมุน

 l และ m เป็นเส้นของการสะท้อนจุด A' และจุด B' เป็นภาพการหมุนของจุด A และจุด Bจงพิสูจน์ว่า $\angle A'PA = 2(\hat{1})$ $\angle B'PB = 2(\hat{1})$

(3)



จากรูป $\triangle ABC \cong \triangle PQR$

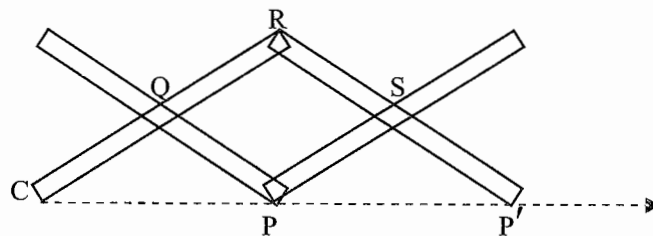
- 1) $\triangle PQR$ เป็นภาพของ $\triangle ABC$
ภายใต้การสะท้อน การเลื่อนขนาน หรือการหมุน
- 2) สร้างเส้น l เพื่อให้ P เป็นภาพสะท้อนของ A
สร้างภาพสะท้อนของ $\triangle ABC$ ข้าม l
- 3) สร้างเส้น m ซึ่งใช้สะท้อนภาพไปยัง $\triangle PQR$
- 4) หาจุดศูนย์กลางของการหมุน ขนาดของมุม และทิศทางของการหมุน
- 5) หาจุดศูนย์กลางของการหมุน ขนาดของมุม และทิศทางของการหมุน
ซึ่งจะส่ง $\triangle PQR$ ไปยัง $\triangle ABC$

แบบที่สอง การแปลงทางเรขาคณิตที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนขนาด (dilation)

ผู้เขียนแผนที่บางครั้งก็ต้องการที่จะเปลี่ยนขนาดแต่ไม่ต้องการที่จะเปลี่ยนรูปร่างของแผนที่นั้น บางครั้งเขาก็ใช้เครื่องลอกแผนที่หรือลวดลาย (Pantograph) ดังแสดงต่อไปนี้

ไม้คดหมุดขยับเคลื่อนที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเสมอ และจุด C จุด P และจุด P' คงสภาวะร่วมเส้นตรง

เครื่องมือนี้ตั้งที่จุด C เข็มที่คดอยู่และดินสออาจจะสับเปลี่ยนกันได้ทั้งจุด P และ P'



ในทุกตำแหน่งของเครื่องมือจะทำให้

$$\triangle CPQ \sim \triangle CP'R$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{CR}{CQ} = \frac{CP'}{CP}$$

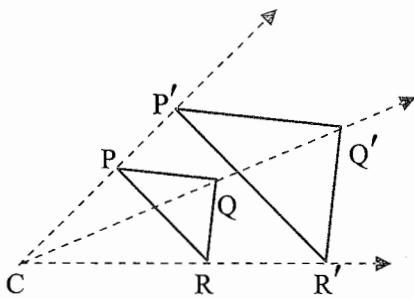
$$\text{ถ้า } \frac{CR}{CQ} = 2 \text{ แล้ว } \frac{CP'}{CP} = 2 \text{ และ } CP' = 2CP$$

ดังนั้น เครื่องมือลอกแผนที่หรือลวดลาย สามารถนำมาใช้ในลักษณะสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เช่น จุด P ซึ่งอยู่บนระนาบสมนัยกับจุด P'

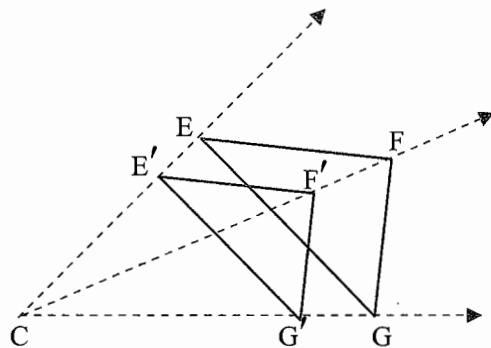
การสมนัยในลักษณะนี้อาจจะเรียกว่าเป็นการแปลงของระนาบ

บทนิยาม ให้ C เป็นจุดจุดหนึ่ง และ k เป็นจำนวนจริงบวก การเปลี่ยนขนาด (dilation) เป็นการแปลงซึ่งส่งแต่ละจุดบนระนาบหนึ่ง ไปยังจุดที่เป็นภาพจุดหนึ่ง จุด C เป็นภาพของตัวเอง
สำหรับจุด P ใด ๆ นอกจากจุด C
ภาพของจุด P คือจุด P' ซึ่งอยู่บน $\vec{CP}$
 $CP' = k(CP)$
เรียก C ว่า **จุดศูนย์กลาง**
และ k เป็นตัวประกอบมาตราส่วน (scale factor) ของการเปลี่ยนขนาด

พิจารณาแผนภาพต่อไปนี้



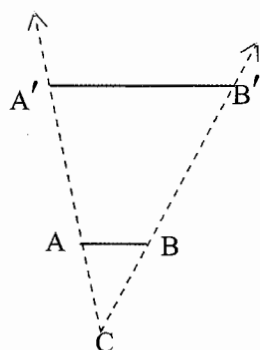
จุดศูนย์กลาง C ตัวประกอบมาตราส่วน 2



จุดศูนย์กลาง C ตัวประกอบมาตราส่วน 3

จากแผนภาพแสดงว่า การเปลี่ยนขนาดเป็นการแปลงที่คงสภาพรูปร่างหนึ่ง (A shape – preserving transformation)

- ถ้า $k > 1$ รูปจะขยายและการแปลงขนาดเป็นภาพขยาย (Enlargement)
- ถ้า $k < 1$ รูปจะลดลง และการแปลงขนาดเป็นภาพที่ลดส่วนลงมา (Reduction)
- ถ้า $k = 1$ รูปจะคงเดิมและเป็นการแปลงที่เป็นเอกลักษณ์



จากแผนภาพที่อยู่ทางซ้ายมือ แสดงภาพขยายซึ่งมีจุด C เป็นจุดศูนย์กลาง และมีตัวประกอบมาตราส่วนเป็น 3 โดยบทนิยาม

$$CA' = 3(CA)$$

และ $CB' = 3(CB)$

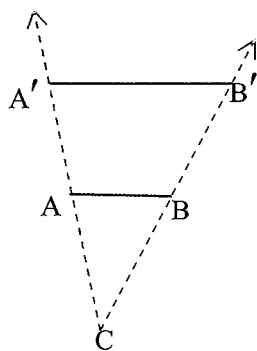
ดังนั้น $\frac{CA'}{CA} = 3 = \frac{CB'}{CB}$

$$\hat{ACB} = \hat{A'CB'}$$

ดังนั้น $\triangle ACB \sim \triangle A'CB'$

$$\frac{A'B'}{AB} = 3 \quad \text{หรือ} \quad A'B' = 3AB$$

ทฤษฎีบท ถ้าการเปลี่ยนขนาดมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C และตัวประกอบมาตราส่วน k ส่งจุด A ไปยังจุด A' และส่งจุด B ไปยังจุด B' แล้ว $A'B' = k(AB)$



โดยบทนิยาม $CA' = k(CA)$ หรือ $\frac{CA'}{CA} = k$

และ $CB' = k(CB)$ หรือ $\frac{CB'}{CB} = k$

ดังนั้น $\frac{CA'}{CA} = \frac{CB'}{CB}$

เนื่องจาก $\angle ACB = \angle A'CB'$

$$\triangle ACB \sim \triangle A'CB'$$

ดังนั้น $\frac{A'B'}{AB} = k$

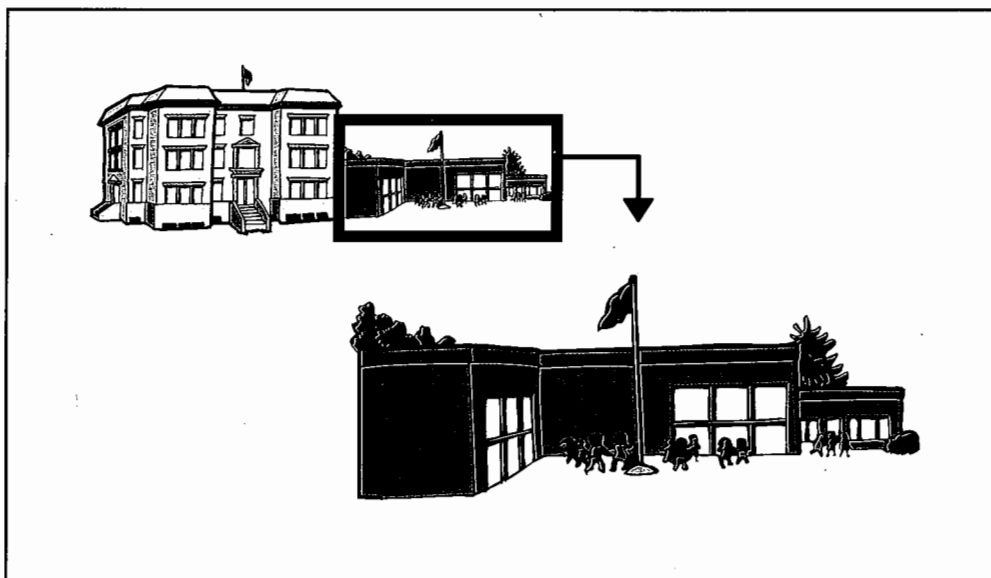
หรือ $A'B' = k(AB)$

แบบฝึกหัด 10.4

1. จุด P' เป็นภาพของจุด P ภายใต้การแปลงขนาดซึ่งมีจุด C เป็นจุดศูนย์กลาง และมีตัวประกอบ
มาตราส่วนเป็น $\frac{3}{2}$
ถ้า $CP = 12$ แล้ว CP' เท่ากับเท่าไร
2. จุด X' และจุด Y' เป็นภาพของจุด X และจุด Y ภายใต้การแปลงขนาดด้วยตัวประกอบ
มาตราส่วน 4
ถ้า $XY = 7$ แล้ว $X'Y'$ เท่ากับเท่าไร
3. จุด P' เป็นภาพของจุด P ภายใต้การแปลงขนาด ซึ่งมีจุด C เป็นจุดศูนย์กลาง และมีตัวประกอบ
มาตราส่วน $\frac{2}{3}$
ถ้า $CP = 9$ แล้ว CP' เท่ากับเท่าใด
4. จุด Q' เป็นภาพของจุด Q ภายใต้การแปลงขนาดซึ่งมีจุด C เป็นจุดศูนย์กลาง และมีตัวประกอบ
มาตราส่วน $\frac{4}{3}$
ถ้า $CQ = 10$ แล้ว CQ' เท่ากับเท่าไร

สมบัติของการแปลงขนาด (Property of Dilation)

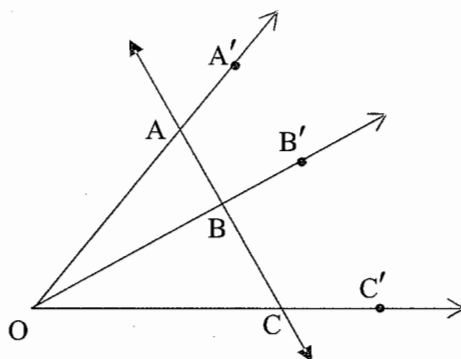
จุดประสงค์ : เพื่อตรวจสอบและประยุกต์สมบัติของการแปลงขนาด



ภาพขยายของภาพถ่าย อาจจะกล่าวในทางเรขาคณิตว่า เป็นการแปลงขนาด เมื่อ $k > 1$

ภาพขยายที่ปรากฏข้างต้น แสดงถึงการคงสภาพภาวะร่วมเส้นตรง (Preserve collinearity) การอยู่ระหว่าง และขนาดของมุม

ทฤษฎีบท การแปลงขนาดแสดงถึงการคงสภาพภาวะร่วมเส้นตรง และการอยู่ระหว่างของจุดต่าง ๆ



กำหนดให้ จุด A จุด B และจุด C คงสภาพภาวะร่วมเส้นตรง
 จุด B อยู่ระหว่างจุด A และจุด C
 จุด A' จุด B' และจุด C' เป็นภาพของจุด A จุด B และจุด C
 ภายใต้การแปลงขนาด ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง
 และมีตัวประกอบมาตราส่วน k

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ จุด A' จุด B' และจุด C' คงสภาพภาวะร่วมเส้นตรง
 จุด B' อยู่ระหว่างจุด A' และจุด C'

พิสูจน์

จากทฤษฎีบท

$$A'B' = k(AB)$$

$$B'C' = k(BC)$$

$$A'B' + B'C' = k(AB + BC)$$

$$= k(AC)$$

แต่ $\frac{A'C'}{AC} = k$

$$A'C' = k(AC)$$

ดังนั้น $A'B' + B'C' = A'C'$

จุด A' จุด B' และจุด C' คงสภาพภาวะร่วมเส้นตรง

จุด B' อยู่ระหว่างจุด A' และจุด C'

ทฤษฎีบท ถ้าการแปลงขนาดส่ง A ไปยัง A' และส่ง B ไปยัง B' แล้ว

ภาพของ $\overleftrightarrow{AB}$ คือ $\overleftrightarrow{A'B'}$

ภาพของ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\overrightarrow{A'B'}$

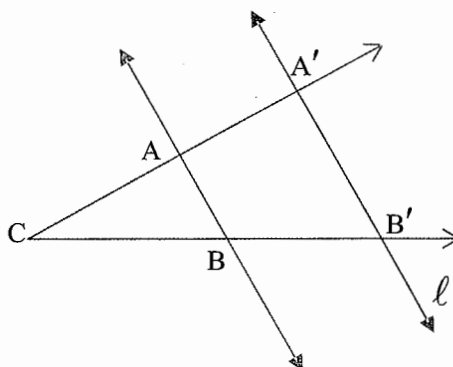
ภาพของ $\overline{AB}$ คือ $\overline{A'B'}$

ข้อควรสังเกต การแปลงขนาดซึ่งส่งเซกเมนต์ (Segment) หนึ่งไปยังอีกเซกเมนต์หนึ่ง ภาพที่เกิดขึ้นและภาพต้นแบบ จะไม่เท่ากันทุกประการ นอกจากตัวประกอบมาตราส่วนเป็น 1

ทฤษฎีบท การแปลงขนาดคงสภาพขนาดของมุม

ทฤษฎีบท ภายใต้การแปลงขนาด รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ภาพของรูปสามเหลี่ยมนั้นคล้ายกัน

ทฤษฎีบท ภายใต้การแปลงขนาด เส้นตรงเส้นหนึ่ง และภาพของเส้นตรงเส้นนั้นจะขนานกัน



กำหนดให้ AB เป็นเส้นตรงเส้นหนึ่ง

l เป็นภาพของ $\overleftrightarrow{AB}$ ภายใต้การแปลงขนาด

สิ่งที่ต้องพิสูจน์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$

พิสูจน์ จุด A' และจุด B' เป็นภาพของจุด A และจุด B (จากทฤษฎีบทข้างต้น)

ภายใต้การแปลงขนาดบนเส้นตรง l

จากบทนิยามของการแปลงขนาด

จุดศูนย์กลาง C ของการแปลงขนาดเกิดจากการตัดกันของ $\overleftrightarrow{AA'}$ และ $\overleftrightarrow{BB'}$

และการแปลงขนาดคงสภาพขนาดของมุม (ทฤษฎีบท)

ดังนั้น $\angle CAB = \angle C A' B'$

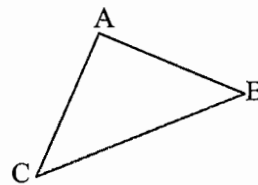
และ $\angle CBA = \angle C B' A'$

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \parallel l$

แบบฝึกหัด 10.5

1. จากข้อ 1.1 – 1.5 การแปลงขนาดมีจุดศูนย์กลาง C
และตัวประกอบมาตราส่วน 5
ส่ง P ไปยัง P' Q ไปยัง Q'
และ R ไปยัง R'
 - 1.1) ถ้า $CP = 3$ แล้ว CP' เท่ากับเท่าไร
 - 1.2) ถ้า $QR = 6$ แล้ว $Q'R'$ เท่ากับเท่าไร
 - 1.3) ถ้า $P'R' = 20$ แล้ว PR เท่ากับเท่าไร
 - 1.4) ถ้า Q อยู่ระหว่าง P และ R
แล้ว จะแสดงการอยู่ระหว่างได้อย่างไร
 - 1.5) ถ้า $\angle PQR = 70^\circ$ แล้ว $\angle P'Q'R'$ มีขนาดเท่ากับเท่าไร
2. จากข้อ 2.1 – 2.4 ลอกแผนภาพข้างล่างนี้
จงหาภาพของ $\triangle ABC$ ภายใต้การแปลงขนาดดังนี้
 - 2.1) จุดศูนย์กลาง O และตัวประกอบมาตราส่วน 2
 - 2.2) จุดศูนย์กลาง O และตัวประกอบมาตราส่วน $\frac{1}{2}$
 - 2.3) จุดศูนย์กลาง A และตัวประกอบมาตราส่วน $\frac{1}{3}$
 - 2.4) จุดศูนย์กลาง A และตัวประกอบมาตราส่วน 3

O •



3. จากข้อ 3.1 – 3.5 การแปลงขนาดมีจุดศูนย์กลางที่จุด C
และตัวประกอบมาตราส่วน k
ส่ง P ไปยัง P' และส่ง Q ไปยัง Q'
จงหาค่า k

3.1) $CQ' = 10$ และ $CQ = 5$

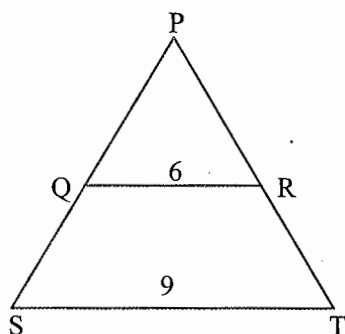
3.2) $CQ' = 6$ และ $CQ = 18$

3.3) $CP' = 12$ และ $CP = 8$

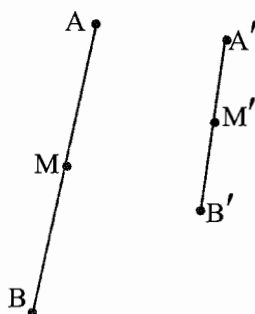
3.4) $PQ = 4$ และ $P'Q' = 16$

3.5) $PQ = 8$ และ $P'Q' = 6$

4. จงหาจุดศูนย์กลาง และตัวประกอบมาตราส่วนของการแปลงขนาด ซึ่งส่ง $\triangle PQR$ ไปยัง $\triangle PST$



5. กำหนดให้จุด M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$
การแปลงขนาดด้วยตัวประกอบมาตราส่วน k
ส่งจุด A จุด B และจุด M ไปยังจุด A' จุด B' และจุด M'
จงพิสูจน์ว่า M' เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{A'B'}$



บรรณานุกรม

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.2537.ข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ วิชาคณิตศาสตร์.กรุงเทพมหานคร : บริษัท สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.2538.ข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ วิชาคณิตศาสตร์.กรุงเทพมหานคร : บริษัท สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.2539.ข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ วิชาคณิตศาสตร์.กรุงเทพมหานคร : บริษัท สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.2540.ข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ วิชาคณิตศาสตร์.กรุงเทพมหานคร : บริษัท สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี.2541.ข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกระหว่างประเทศ วิชาคณิตศาสตร์.กรุงเทพมหานคร : บริษัท สำนักพิมพ์แม็ค จำกัด.

Berele, A. and Goldman, J., Geometry : theorems and construction. Prentice Hall :
New Jersey, 2001.

Coxeter, H.S.M. and Greeitzer, S.L., Geometry Revisited. Mathematical Association of
America, Washington, 1967.

Christian, R. Hirsch and the other Geometry Scott, Foresman and Company, California
1979.

Edwin, E. Moise and Floyd L. Downs, Jr Geometry, Addison – Wesley Publishing
Company, California, 1982

Fomin D., Genkin, S. and Itenberg, I., Mathematical Circles (Russian Experience).
American Mathematical Society, 1996.

Hahn, Liaang – shin, Complex Numbers and Geometry Mathematical Association of
America, Washington, 1994.

Honsberger, R., Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry.

Mathematical Association of America, Washington, 1995.

Hall, H.S., Stevens, F.H., A School Geometry Macmillan and Co., Limited, London,
1951

Jergensen, Ray C. and the other Geometry. Houghton Mifflin Company, Boston,
1992.

Jeger, Max. Transformation Geometry. George Alleen and Unwin Ltd. London, 1970

Larson, L.C., Problem – Solving Through Problems. Springer –Verlag : New York,
1983.

Moise, E.E. and Downs, F.L., Geometry. Addison – Wesley : Reading, 1964.

Smith, R.R and Ulrich, J.F., Plane Geometry. Harcourt Brace & World : New York,
1956.

Ulrich, J.F. and Payne, J.N., Geometry. 2nd ed. Harcourt Brace Jovanovich : New York,
1972.

Ulrich, James F., Payne, Joseph N. Geometry. New York. Harcourt Brace Jovanovich,
Inc. 1972.

ภาคผนวก

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 35

ประจำปี พ.ศ. 2537

ข้อ 2. ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $AB = AC$ สมมติว่า

- (i) M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ O เป็นจุดบนเส้นตรง AM ที่ทำให้ OB ตั้งฉากกับ AB
- (ii) Q เป็นจุดใด ๆ บนส่วนของเส้นตรง BC ที่แตกต่างจาก B และ C
- (iii) E เป็นจุดบนเส้นตรง AB และ F เป็นจุดบนเส้นตรง AC โดยที่ E, Q และ F แตกต่างกัน และอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

จงพิสูจน์ว่า OQ ตั้งฉากกับ EF เมื่อและต่อเมื่อ $QE = QF$

ข้อพิสูจน์ เราต้องการพิสูจน์สองข้อความนี้

(2.1) ถ้า OQ ตั้งฉากกับ EF แล้ว $QE = QF$

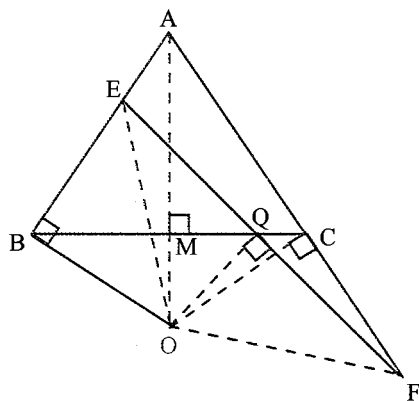
และ (2.2) ถ้า $QE = QF$ แล้ว OQ ตั้งฉากกับ EF

ในการพิสูจน์ทั้งสองข้อความ เราอ้างถึงข้อความ (ก)

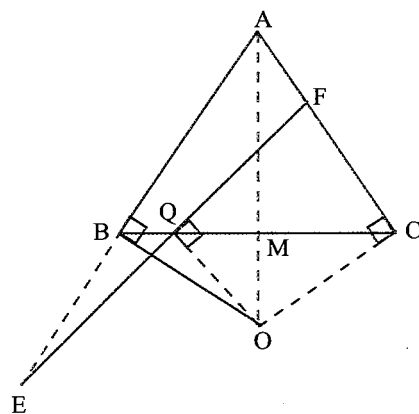
(ก) $OB = OC$, $\angle OBM = \angle OCM$ และ OC ตั้งฉากกับ AC ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้

โดยง่าย (จากสมมติฐานที่ว่า $\triangle ABC$ มี $AB = AC$, M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ O เป็นจุดบนเส้นตรง AM ที่ทำให้ OB ตั้งฉากกับ AB จะได้ $\triangle BOM \cong \triangle COM$)

ข้อพิสูจน์ (2.1) สมมติว่า OQ ตั้งฉากกับ EF จะพิสูจน์ว่า $QE = QF$



รูปที่ 2.1



รูปที่ 2.2

เนื่องจาก Q เป็นจุดใด ๆ บนส่วนของเส้นตรง BC ที่แตกต่างจาก B และ C ดังนั้น Q และ M เป็นจุดเดียวกัน หรือ Q อยู่ระหว่าง C กับ M หรือ Q อยู่ระหว่าง B กับ M

กรณีที่ Q และ M เป็นจุดเดียวกันจะได้ว่า B และ E เป็นจุดเดียวกัน และ C และ F เป็นจุดเดียวกัน ซึ่งให้ผลทันทีว่า $QE = QF$ ดังนั้น ในที่นี้เราจะพิสูจน์เฉพาะในกรณีที่ Q อยู่ระหว่าง C กับ M (ซึ่งคือกรณีในรูปที่ 2.1) เท่านั้น สำหรับกรณีที่ Q อยู่ระหว่าง B กับ M (ซึ่งคือกรณีในรูปที่ 2.2) สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\triangle OEQ \cong \triangle OFQ$ เราจะได้ทันทีว่า $QE = QF$ ในการพิสูจน์ว่า $\triangle OEQ \cong \triangle OFQ$ เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $\angle OEQ = \angle OFQ$ เนื่องจากมี OQ เป็นด้านร่วม และ $\angle OQE = \angle OQF = 90^\circ$ (จากสมมติฐาน) อยู่แล้ว

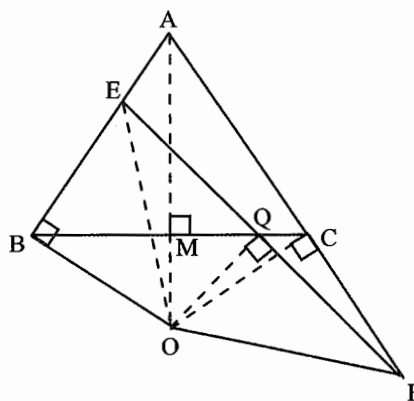
การพิสูจน์ $\angle OEQ = \angle OFQ$ แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 $\angle OBQ = \angle OEQ$ ในรูปที่ 2.1

ขั้นตอนที่ 2 $\angle OFQ = \angle OCQ$ ในรูปที่ 2.1

จะเห็นว่าข้อความ (ก) ขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 ทำให้เราสรุปได้ว่า $\angle OEQ = \angle OBQ = \angle OBM = \angle OCM = \angle OCQ = \angle OFQ$ ตามต้องการ

ข้อพิสูจน์ ขั้นตอนที่ 1 (ดูรูปที่ 2.1 ประกอบ)



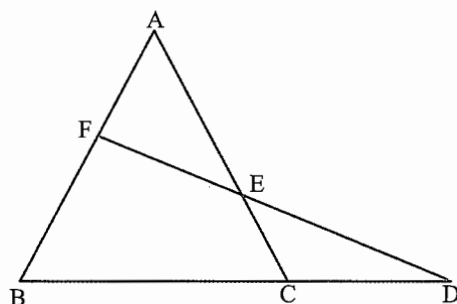
สี่เหลี่ยม $OBEQ$ มีวงกลมล้อมรอบได้ (เนื่องจาก $\angle OBE + \angle OQE = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$)
 ดังนั้น $\angle OBQ = \angle OEQ$ เพราะว่ายูนบนส่วนโค้ง OQ เดียวกัน)

ข้อพิสูจน์ ขั้นตอนที่ 2

เนื่องจาก $\triangle OQF$ และ $\triangle OCF$ มีฐาน OF ร่วมกัน มีมุมยอดเท่ากัน ($\angle QF = 90^\circ = \angle CF$) และอยู่ในครึ่งระนาบ (half-plane) เดียวกันโดยมีเส้นตรง OF เป็นเส้นแบ่งระนาบ จะได้ว่า จุด O, Q, C, F อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมเดียวกัน ดังนั้น $\angle FQ = \angle CQ$ เพราะว่ายู่บนส่วนโค้ง OQ เดียวกัน

ข้อพิสูจน์ (2.2) สมมติว่า $QE = OF$ จงพิสูจน์ว่า OQ ตั้งฉากกับ EF

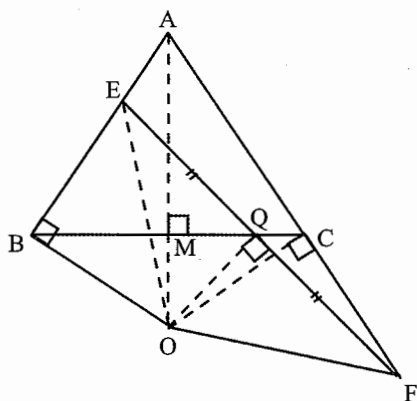
วิธีที่ 1 จาก Menelaus' theorem ที่กล่าวว่า



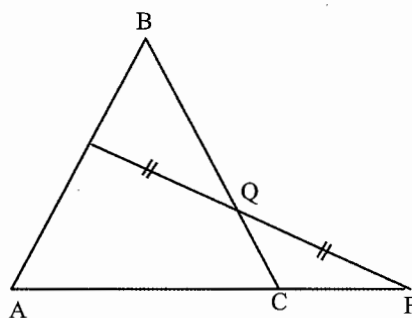
รูปที่ 2.3

ใน $\triangle ABC$ ถ้า E และ F เป็นจุดบนด้าน AC และ AB ตามลำดับ และ D เป็นจุดตัดกันของเส้นตรง EF และส่วนต่อของเส้นตรง BC (ดังรูปที่ 2.3) แล้ว

$$\frac{AF}{AB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DE}{EF} = 1$$



รูปที่ 2.4



รูปที่ 2.5

ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\triangle OEQ \cong \triangle OFQ$ เราจะได้ทันทีว่า $\widehat{OQE} = \widehat{OQF}$ แต่ $\widehat{OQE} + \widehat{OQF} = 180^\circ$ ดังนั้น $\widehat{OQE} = \widehat{OQF} = 90^\circ$ ซึ่งคือ OQ ตั้งฉากกับ EF นั้นเอง

ในการพิสูจน์ว่า $\triangle OEQ \cong \triangle OFQ$ เพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า $EO = FO$ เนื่องจากมี OQ เป็นด้านร่วม และ $QE = QF$ (จากสมมติฐาน) อยู่แล้ว

การพิสูจน์ $EO = FO$ แบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 $CF = BE$

ขั้นตอนที่ 2 $\triangle BEO \cong \triangle CFO$ เป็นที่ชัดเจนว่า $EO = FO$ ได้มาจากขั้นตอนที่ 2

ข้อพิสูจน์ ขั้นตอนที่ 1 (ดูรูปที่ 2.3 และ รูปที่ 2.5 ประกอบ)

โดยการประยุกต์ Menelaus' theorem กับรูปที่ 2.5 จะได้

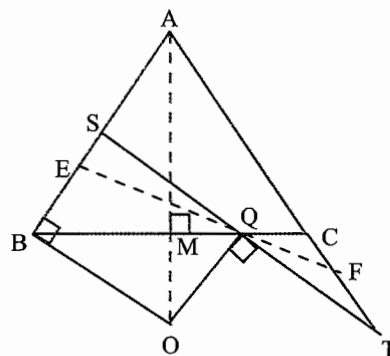
$$\frac{BE}{AB} \cdot \frac{AC}{CF} \cdot \frac{QF}{QE} = 1$$

แต่ $AB = AC$ และ $QE = QF$ (ตามสมมติฐาน) ดังนั้น $CF = BE$

ข้อพิสูจน์ ขั้นตอนที่ 2 (ดูรูปที่ 2.4 ประกอบ)

จากข้อความ (ก) จะได้ว่า $\widehat{OCF} = 90^\circ = \widehat{OBE}$ และ $OB = OC$ และจากขั้นตอนที่ 1 $CF = BE$ จึงสรุปได้ว่า $\triangle BEO \cong \triangle CFO$

วิธีที่ 2



รูปที่ 2.6

จากจุด Q ลากเส้นตรง ST ผ่าน Q และตั้งฉากกับ OQ ตัดเส้นตรง AB และ AC ที่ S และ T ตามลำดับ ดังนั้นโดยข้อความ (2.1) จะได้ $SQ = QT$ ถ้าเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $E = S$ เราจะได้ทันที

ว่า F และ T เป็นจุดเดียวกัน (เนื่องจาก S, Q, T อยู่บนเส้นตรงเดียวกันและ E, Q, F อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน) การพิสูจน์ E และ S เป็นจุดเดียวกัน จะใช้การพิสูจน์แบบข้อขัดแย้งโดยสมมติว่า E และ S ไม่เป็นจุดเดียวกัน ดังนั้น E อยู่ระหว่าง B กับ S หรือ E อยู่ระหว่าง S กับ A โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า E อยู่ระหว่าง B กับ S (ดังรูปที่ 2.6)

จะได้ว่า $\triangle ESQ \cong \triangle QFT$ (เนื่องจาก $SQ = QT$, $QE = QF$ (จากสมมติฐาน) และ $\widehat{EQS} = \widehat{FQT}$)

ผลที่ตามมาคือ $\widehat{SEQ} = \widehat{QFT}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะว่า $\widehat{QFT} = \widehat{AEF} + \widehat{EAF}$ ($\widehat{QFT}$ เป็นมุมภายนอก $\triangle AEF$)
 $= \widehat{SEQ} + \widehat{EAF} > \widehat{SEQ}$

จะเห็นว่าข้อสมมติฐานที่ว่า E และ S ไม่เป็นจุดเดียวกัน นำไปสู่ข้อขัดแย้ง ดังนั้น E และ S เป็นจุดเดียวกัน

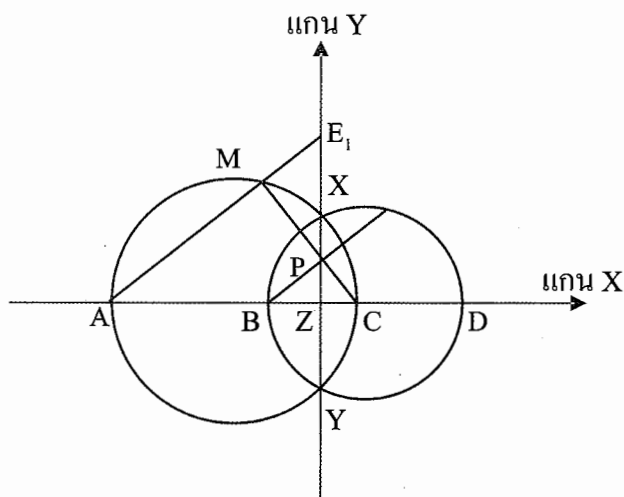
ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 36

ประจำปี พ.ศ. 2538

- ข้อ 1. ให้ A, B, C, D เป็นจุดสี่จุดที่แตกต่างกันทั้งหมดบนเส้นตรงเส้นหนึ่งในระนาบ เรียงลำดับจากซ้ายไปขวา วงกลมที่มี AC และ BD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางตัดกันที่จุด X และ Y เส้นตรง XY ตัด BC ที่จุด Z ให้ P เป็นจุดบนเส้นตรง XY ที่ไม่ใช่จุด Z เส้นตรง CP ตัดวงกลมที่มี AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางที่จุด C และ M และเส้นตรง BP ตัดวงกลมที่มี BD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางที่จุด B และ N จงพิสูจน์ว่า เส้นตรง AM, DN และ XY พบกันที่จุดเดียว

วิธีทำ

วิธีที่ 1



ใส่แกนพิกัดจากโดยให้ Z เป็นจุดกำเนิด

เส้นตรง AD เป็นแกน X

และเส้นตรง XY เป็นแกน Y

โดยไม่เสียไร้วไป ให้ P อยู่เหนือแกน X

ให้เส้นตรง AM ตัดกับเส้นตรง XY ที่ E_1

และเส้นตรง DN ตัดกับเส้นตรง XY ที่ E_2

จงพิสูจน์ว่า $E_1 = E_2$

เนื่องจาก A, B, C, D เป็นจุดบนแกน X โดยที่ A, B อยู่ทางซ้ายมือของจุดกำเนิด Z และ C, D อยู่ทางขวามือของจุดกำเนิด Z ดังนั้นเราสามารถให้ A, B, C, D มีพิกัดเป็น $(-a, 0), (-b, 0), (c, 0), (d, 0)$ โดยที่ $a, b, c, d > 0$

เนื่องจาก P อยู่บนแกน Y ดังนั้นเราสามารถให้ P มีพิกัดเป็น $(0, p)$ จะได้ความชันของเส้นตรง $PC = \frac{-p}{c}$

เพราะว่า M เป็นจุดบนเส้นรอบวงที่มี AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง เพราะฉะนั้น $\widehat{AMC} = 90^\circ$ นั่นคือ $AM \perp MC$ จะได้

$$\begin{aligned}\text{ความชันของเส้นตรง AM} &= \frac{-1}{\text{ความชันของเส้นตรง MC}} \\ &= \frac{-1}{\text{ความชันของเส้นตรง PC}} = \frac{c}{p}\end{aligned}$$

ซึ่งส่งผลว่า สมการของเส้นตรง AM คือ $y = \frac{c}{p}(x + a)$

จากที่กำหนดว่าเส้นตรง AM ตัดกับเส้นตรง XY (ซึ่งคือแกน Y) ที่ E_1 จะได้

พิกัดของ E_1 คือ $(0, \frac{ac}{p})$

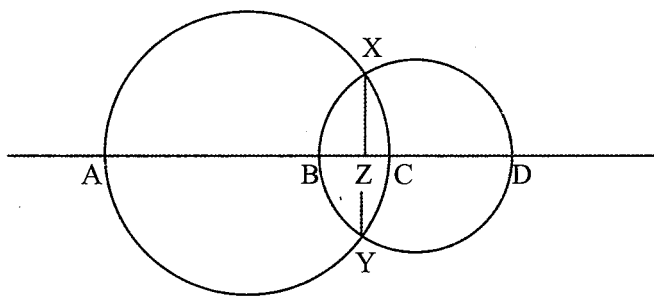
ทำนองเดียวกัน จะได้พิกัดของ E_2 คือ $(0, \frac{bd}{p})$

ถ้าเราพิสูจน์ได้ว่า $ac = bd$ เราจะได้ว่า $E_1 = E_2$ ตามต้องการ

เนื่องจาก Z เป็นจุดกำเนิด ดังนั้น $a = AZ$, $b = BZ$, $c = CZ$, $d = DZ$ จะเห็นว่า

$ac = bd$ ก็ต่อเมื่อ $AZ \cdot CZ = BZ \cdot DZ$

ดังนั้น ในที่นี้เราจะพยายามพิสูจน์ว่า $AZ \cdot CZ = BZ \cdot DZ$

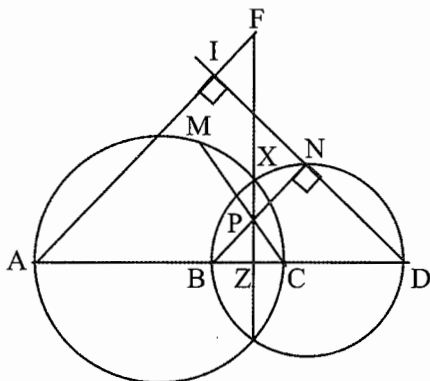


พิจารณาวงกลมที่มี AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จะได้ $AZ \cdot ZC = XZ \cdot ZY$ (คอร์ด AC ตัดกับคอร์ด XY ที่ Z)

และในวงกลมที่มี BD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จะได้ $BZ \cdot ZD = XZ \cdot ZY$ (คอร์ด BD ตัดกับคอร์ด XY ที่ Z)

ดังนั้น $AZ \cdot ZC = BZ \cdot ZD$ นั่นคือ $E_1 = E_2$ จึงสรุปได้ว่า เส้นตรง AM, DN และ XY พบกันที่จุดเดียว

วิธีที่ 2



จากจุด A ลาก AF ตั้งฉากกับเส้นตรง DN ที่ I และตัดเส้นตรง XY ที่ F

ทำนองเดียวกัน จากจุด D ลาก DF' ตั้งฉากกับเส้นตรง AM ที่ J และตัดเส้นตรง XY ที่ F' จะพิสูจน์ว่า F และ F' เป็นจุดเดียวกัน

เนื่องจาก N เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมที่มี BD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังนั้น $\widehat{BND} = 90^\circ$ นั่นคือ $BN \perp DN$ และจาก AF ตั้งฉากกับเส้นตรง DN จึงได้ว่า $AF \parallel BN$ แต่ P เป็นจุดบน BN ดังนั้น $AF \parallel BP$ จึงได้ว่า $\triangle AFZ \sim \triangle BPZ$

$$\text{ดังนั้น } \frac{FZ}{PZ} = \frac{AZ}{BZ} \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{ทำนองเดียวกัน } \triangle DF'Z \sim \triangle CPZ \text{ ซึ่งส่งผลว่า } \frac{F'Z}{PZ} = \frac{DZ}{CZ} \quad \dots\dots\dots(2)$$

พิจารณาวงกลมที่มี AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จะได้ $AZ \cdot ZC = XZ \cdot ZY$ (คอร์ด AC ตัดกับคอร์ด XY ที่ Z)

และในวงกลมที่มี BD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จะได้ $BZ \cdot ZD = XZ \cdot ZY$ (คอร์ด BD ตัดกับคอร์ด XY ที่ Z)

$$\text{ดังนั้น } AZ \cdot ZC = BZ \cdot ZD \text{ ซึ่งทำให้ได้ว่า } \frac{AZ}{BZ} = \frac{DZ}{CZ}$$

$$\text{ฉะนั้น จาก (1) และ (2) จึงได้ } \frac{FZ}{PZ} = \frac{F'Z}{PZ} \text{ นั่นคือ } FZ = F'Z$$

และเนื่องจาก F และ F' อยู่บนรังสี ZP ดังนั้น F และ F'

เป็นที่ชัดเจนว่า $XY \perp AD$ ที่ Z ดังนั้น FZ เป็นส่วนสูงของ $\triangle AFD$ และจากการสร้างข้างต้นพบว่า DI เป็นส่วนสูงของ $\triangle AFD$ ที่ลากจาก D มายังด้าน AF และ AJ เป็นส่วนสูงของ $\triangle AFD$ ที่ลากจาก A มายังด้าน DF ทำให้ได้ว่าเส้นตรง FZ, DI และ AJ พบกันที่จุดออร์โทเซนเตอร์ของ $\triangle AFD$ นั่นคือ เส้นตรง XY, DN และ AM พบกันที่จุดเดียว

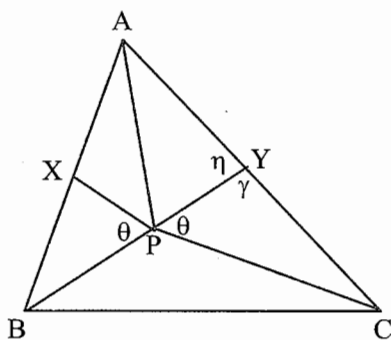
ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 37

ประจำปี พ.ศ. 2539

ข้อ 2. ให้ P เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$ โดยที่ $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$

ให้ D และ E เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน $\triangle APB$ และ $\triangle APC$ ตามลำดับ
จงพิสูจน์ว่า AP , BD และ CE พบกันที่จุดเดียว

วิธีทำ



จาก P เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$

เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่า

$$\angle APB > \angle ACB \text{ และ } \angle APC > \angle ABC$$

ดังนั้น จากโจทย์กำหนด

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC > 0$$

ที่จุด P ลาก PX และ PY พบ AB และ AC ที่จุด X และ Y ตามลำดับ โดยที่ $\angle APX = \angle ACB$

$$\text{และ } \angle APY = \angle ABC$$

ให้ $\theta = \angle BXP$ ดังนั้น $\angle CYP = \theta$ ด้วย และให้ $\alpha = \angle AXP$, $\beta = \angle BXP$, $\eta = \angle AYP$ และ $\gamma = \angle CYP$

พิจารณาสี่เหลี่ยม $AXPY$ จะได้ว่า $\angle XAY + \angle XPY = \angle BAC + \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ$

ดังนั้น $AXPY$ มีวงกลมล้อมรอบได้ นั่นคือ $\alpha + \eta = 180^\circ$ ด้วย และจาก $\alpha + \beta = 180^\circ = \eta + \gamma$

$$\text{ทำให้เราได้ว่า } \alpha = \gamma, \beta = \eta \text{ และ } \beta = 180^\circ - \gamma, \eta = 180^\circ - \alpha \dots\dots\dots(1)$$

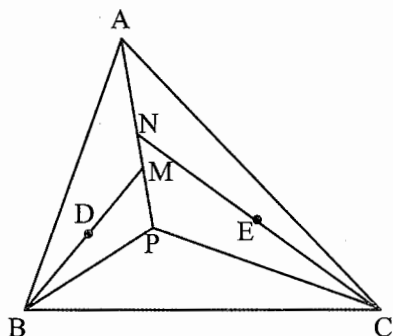
โดยใช้ law of sine กับ $\triangle BXP$ และ $\triangle CYP$ ตามลำดับ จะได้

$$\frac{BP}{\sin \beta} = \frac{BX}{\sin \theta} \text{ และ } \frac{CP}{\sin \gamma} = \frac{CY}{\sin \theta}$$

$$\text{จาก } \beta = 180^\circ - \gamma \text{ ดังนั้น } \sin \beta = \sin \gamma \text{ จึงได้ว่า } \frac{BP}{CP} = \frac{BX}{CY} \dots\dots\dots(2)$$

ลาก BD , CE ไปตัด AP ที่ M และ N ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า M และ N เป็นจุดเดียวกัน



เนื่องจาก D, E เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน $\triangle APB$, $\triangle APC$ ตามลำดับ ดังนั้น BD, CE แบ่งครึ่ง $\widehat{ABP}$, $\widehat{ACP}$ ตามลำดับ และโดยทฤษฎีเส้นแบ่งครึ่งมุม จะได้ว่า $\frac{BP}{AB} = \frac{PM}{MA}$ และ $\frac{CP}{AC} = \frac{PN}{NA}$

จากการวิเคราะห์พบว่า M และ N เป็นจุดเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ $\frac{PM}{MA} = \frac{PN}{NA}$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$

ดังนั้น ในที่นี้เราจะพยายามพิสูจน์ว่า $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$

โดยใช้ law of sine กับ $\triangle APX$ และ $\triangle APY$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\frac{AX}{\sin C} = \frac{AP}{\sin \alpha} \quad \text{และ} \quad \frac{AY}{\sin B} = \frac{AP}{\sin \eta}$$

จาก (1) : $\eta = 180^\circ - \alpha$ ดังนั้น $\sin \alpha = \sin \eta$ จึงได้ว่า $\frac{AX}{AY} = \frac{\sin C}{\sin B}$

และจาก law of sine กับ $\triangle ABC$ จะได้ว่า $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$

นั่นคือ $\frac{AB}{AC} = \frac{AX}{AY} = \frac{AB-AX}{AC-AY}$ (จากทฤษฎีบทที่กล่าวว่า ถ้า $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\text{แล้ว } \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d})$$

$$= \frac{BX}{CY} \dots\dots\dots(3)$$

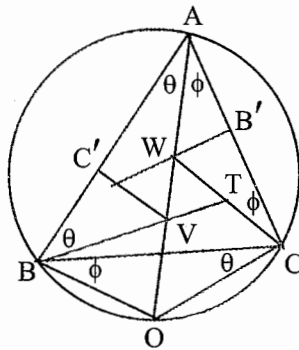
จาก (2) และ (3) จึงได้ว่า $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CP}$ ซึ่งก็คือ $\frac{BP}{AB} = \frac{CP}{AC}$ ตามต้องการ

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 38

ประจำปี พ.ศ. 2540

- ข้อ 2. มุม A เป็นมุมเล็กที่สุดของรูปสามเหลี่ยม ABC จุด B และ C แบ่งวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยมออกเป็นสองส่วนโค้ง ส่วนโค้งหนึ่งมี A เป็นจุดภายใน อีกส่วนโค้งหนึ่งไม่มี A ให้ U เป็นจุดภายในของส่วนโค้งที่ไม่มี A เส้นตั้งฉากที่แบ่งครึ่ง AB และเส้นตั้งฉากที่แบ่งครึ่ง AC ตัดเส้นตรง AU ที่จุด V และ W ตามลำดับ เส้นตรง BV และ CW ตัดกันที่จุด T จงแสดงว่า $AU = TB + TC$

วิธีทำ



ให้ B', C' เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AC, AB ตามลำดับ

$$\angle BAV = \theta, \angle CAU = \phi$$

เพราะว่า VC' ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง AB , WB' ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง AC

$$\text{จะได้ว่า } \angle ACW = \phi \text{ และ } \angle ABV = \theta$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม TBC

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \angle BTC &= 180^\circ - (\angle TBC + \angle TCB) \\ &= 180^\circ - ((\angle ABC - \theta) + (\angle ACB - \phi)) \\ &= 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) + (\theta + \phi) \\ &= A + A = 2A \end{aligned}$$

โดยกฎของไซน์ของรูปสามเหลี่ยม TBC จะได้

$$\frac{TB}{\sin(C-\phi)} = \frac{TC}{\sin(B-\theta)} = \frac{BC}{\sin \hat{B}TC} = \frac{BC}{\sin 2A}$$

($C-\phi > 0$, $B-\theta > 0$, $\sin 2A > 0$ เนื่องจาก A เป็นมุมที่เล็กที่สุดของรูปสามเหลี่ยม ABC)
 เพราะว่า $BC = 2R \sin A$, โดยที่ R คือรัศมีของวงกลม ซึ่งล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC)

$$\text{จะได้ว่า } TB = \frac{2R}{\sin 2A} \sin(C-\phi) = \frac{R \sin(C-\phi)}{\cos A}$$

$$TC = \frac{2R}{\sin 2A} \sin(B-\theta) = \frac{R \sin(B-\theta)}{\cos A}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } TB + TC &= \frac{R}{\cos A} [\sin(C-\phi) + \sin(B-\theta)] \\ &= \frac{2R}{\cos A} \left[\sin \left(\frac{B+C-\phi-\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C+\phi-\theta}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2R}{\cos A} \sin \left(\frac{B+C-A}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C+\phi-\theta}{2} \right) \\ &= \frac{2R}{\cos A} \sin \left(\frac{180^\circ - 2A}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C+\phi-\theta}{2} \right) \\ &= 2R \cos \left(\frac{B-C+\phi-\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABU

$$AU = 2R \sin \hat{A}BU$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ACU

$$AU = 2R \sin \hat{A}CU$$

เพราะว่า $\hat{U}BC = \phi$, $\hat{U}CB = \theta$ (เป็นมุมที่รองรับส่วนโค้ง UC)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } AU &= R (\sin \hat{A}BU + \sin \hat{A}CU) \\ &= R (\sin(B+\phi) + \sin(C+\theta)) \\ &= 2R \sin \left(\frac{B+C+\phi+\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C+\phi-\theta}{2} \right) \\ &= 2R \sin \left(\frac{B+C+A}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C+\phi-\theta}{2} \right) \\ &= 2R \cos \left(\frac{B-C+\phi-\theta}{2} \right) \\ &= TB + TC \end{aligned}$$

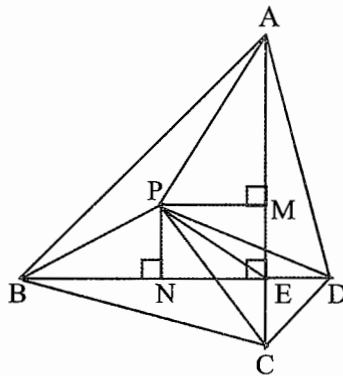
ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 39

ประจำปี พ.ศ. 2541

- ข้อ 1. ในรูปสี่เหลี่ยมมุม ABCD เส้นทแยงมุม AC และ BD ตั้งฉากกัน แต่ด้าน AB และ DC ที่อยู่ตรงข้ามกัน ไม่ขนานกัน สมมติว่าจุด P ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก ด้าน AB และ DC อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม ABCD

จงพิสูจน์ว่า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้ ก็ต่อเมื่อรูปสามเหลี่ยม ABP และ CDP มีพื้นที่เท่ากัน

วิธีทำ



ให้ AC ตัดกับ BD ที่ E

จุด P ซึ่งอยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยม ABCD จะต้องอยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม ABE หรือรูปสามเหลี่ยม BCE หรือรูปสามเหลี่ยม CDE หรือรูปสามเหลี่ยม DAE โดยไม่เสียเลยทั่วไป ให้จุด P อยู่ภายในรูปสามเหลี่ยม ABE

เมื่อลากเส้นตรงผ่านจุด P ไปตั้งฉากกับ AC และ BD ที่ M และ N ตามลำดับแล้ว เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABP}) &= 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABE}) - 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม PAE}) \\ &\quad - 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม PBE}) \\ &= (AM + PN)(BN + PM) - (AM + PN)PM - (BN + PM)PN \\ &= AM \cdot BN - PM \cdot PN \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม CDP}) &= 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม CDE}) + 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม PCE}) \\ &\quad + 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม PDE}) \\ &= (CM - PN)(DN - PM) + (CM - PN)PM + (DN - PM)PN \\ &= CM \cdot DN - PM \cdot PN \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 2 (\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABP - \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } CDP) = AM \cdot BN - CM \cdot DN$$

.....(*)

เนื่องจากจุด P เป็นจุดตัดเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากด้าน AB และ DC ฉะนั้น $PA = PB$ และ $PC = PD$ จะแสดงว่า

- (i) ถ้า ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้แล้ว รูปสามเหลี่ยม ABP และรูปสามเหลี่ยม CDP มีพื้นที่เท่ากัน
- (ii) ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABP และรูปสามเหลี่ยม CDP มีพื้นที่เท่ากันแล้ว ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้

แสดง (i) : ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบ

เนื่องจาก AB และ CD เป็นคอร์ดของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม ABCD ฉะนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมนี้จะอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB และอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ CD ด้วย

ดังนั้น สรุปได้ว่า P คือจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม ABCD ทำให้ได้ผลตามมาว่า M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC และ N เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BD นั่นคือ $AM = CM$ และ $BN = DN$

จาก (*) และผลที่ได้นี้ทำให้ได้ว่า

$$\text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } ABP = \text{พื้นที่รูปสามเหลี่ยม } CDP$$

แสดง (ii) : ให้รูปสามเหลี่ยม ABP และรูปสามเหลี่ยม CDP มีพื้นที่เท่ากัน

จะแสดงว่า มีวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม ABCD

$$\text{จาก (*) ทำให้ได้ว่า } AM \cdot BN = CM \cdot DN \quad \text{.....(**)}$$

จะแสดงว่า $PA = PC$ สมมติว่า $PA \neq PC$

โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่า $PA > PC$ ดังนั้น $AM > CM$ และ $BN > DN$

และทำให้ได้ว่า $AM \cdot BN > CM \cdot DN$ ซึ่งขัดแย้งกับ (**)

ดังนั้น $PA = PC$ และทำให้ได้ว่า $PA = PB = PC = PD$ แสดงว่า มีวงกลมล้อมรอบรูปสี่เหลี่ยม ABCD ได้ โดยที่วงกลมนี้มี P เป็นจุดศูนย์กลาง

ข้อความ (i) และ (ii) ซึ่งได้แสดงแล้ว ทำให้เรากล่าวสรุปได้ว่า

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีวงกลมล้อมรอบได้ ก็ต่อเมื่อ รูปสามเหลี่ยม ABP และ CDP มีพื้นที่เท่ากัน

ดัชนี

ก

การเคลื่อนที่ของรูปเรขาคณิต	7
การให้เหตุผลแบบอุปนัย	15
การให้เหตุผลแบบนิรนัย	16
การแบ่งแบบฮาร์มอนิก	134
การสร้าง	138
การสร้างเกี่ยวกับวงกลม	155
กฎไตรวิภาค	179
กฎการถ่ายทอด	179
กฎการบวก	179
กฎการคูณ	179
การแปลงทางเรขาคณิต	209
การสะท้อน	210
การเลื่อนขนาน	222
การหมุน	229
การเปลี่ยนขนาด	236

ค

ความเท่ากันทุกประการ	8
ความคล้าย	47

จ

จุดออร์โทเซนเตอร์	121
จุดพีแคล	121

ช

เซนทรอยด์	121
-----------	-----

ท

ทฤษฎีบทของพีทาโกรัส	38
ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสัดส่วน	49
ทฤษฎีบทของเซวา	167
ทฤษฎีบทของเมนเนลอส	171
ทฤษฎีบทเดอมัวร์	200
ทฤษฎีบทวงกลมเก้าจุด	203

พ

พื้นที่	163
---------	-----

ม

มุม	3
มัชฌิมเลขคณิต	133
มัชฌิมเรขาคณิต	133

ร

รูปสามเหลี่ยม	5
รูปสี่เหลี่ยม	6
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	36
รูปสามเหลี่ยมคล้าย	52
รูปหลายเหลี่ยมคล้าย	63
รูปสี่เหลี่ยมที่แนบในวงกลม	96
รูปสามเหลี่ยมพีแคล	121
รูปสามเหลี่ยมมีเดียและ และเส้นออยเลอร์	131
รูปแบบของการแปลง	210

ด

โลไซ	153
------	-----

ว

วงกลม	70
วงกลมสองวง	86
วงกลมแนบนอก	103
วงกลมแนบใน	105
วงกลมเก้าจุด	128

ส

เส้นขนาน	24
สมบัติของสัดส่วน	47
เส้นสัมผัสวงกลม	81
สูตรการหาพื้นที่	163
สมบัติทางเรขาคณิต	202
สมบัติของการแปลงคงสภาพระยะทาง	212
สมบัติของการแปลงขนาด	240

อ

อสมการเรขาคณิต	178
อสมการสามเหลี่ยม	181
อสมการของพีทาโกรัส	189

บัญชีสัญลักษณ์

$\cong$	แทน เท่ากันทุกประการ
$//$	แทน ขนาน
$\perp$	แทน ตั้งฉาก
$\overline{AB}$	แทน ส่วนของเส้นตรง AB
AB	แทน ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB
$\hat{A}BC$	แทน มุม ABC
$\triangle ABC$	แทน รูปสามเหลี่ยม ABC
$\square ABCD$	แทน รูปสี่เหลี่ยม ABCD
$AY:YC$	แทน AY ต่อ YC
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	แทน $\triangle ABC$ คล้ายกับ $\triangle DEF$

เรขาคณิต
ISBN 974 - 92234 - 9 - 7



9 789749 223499

C 112

4000 310.00 บาท



มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา

ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

สำนักงานตั้งอยู่ในบริเวณ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท ปทุมวัน กทม. 10330

โทร. 0-2252-8916, 0-2252-8917, แฟกซ์. 0-2252-8917