



คอมบินาตอริก

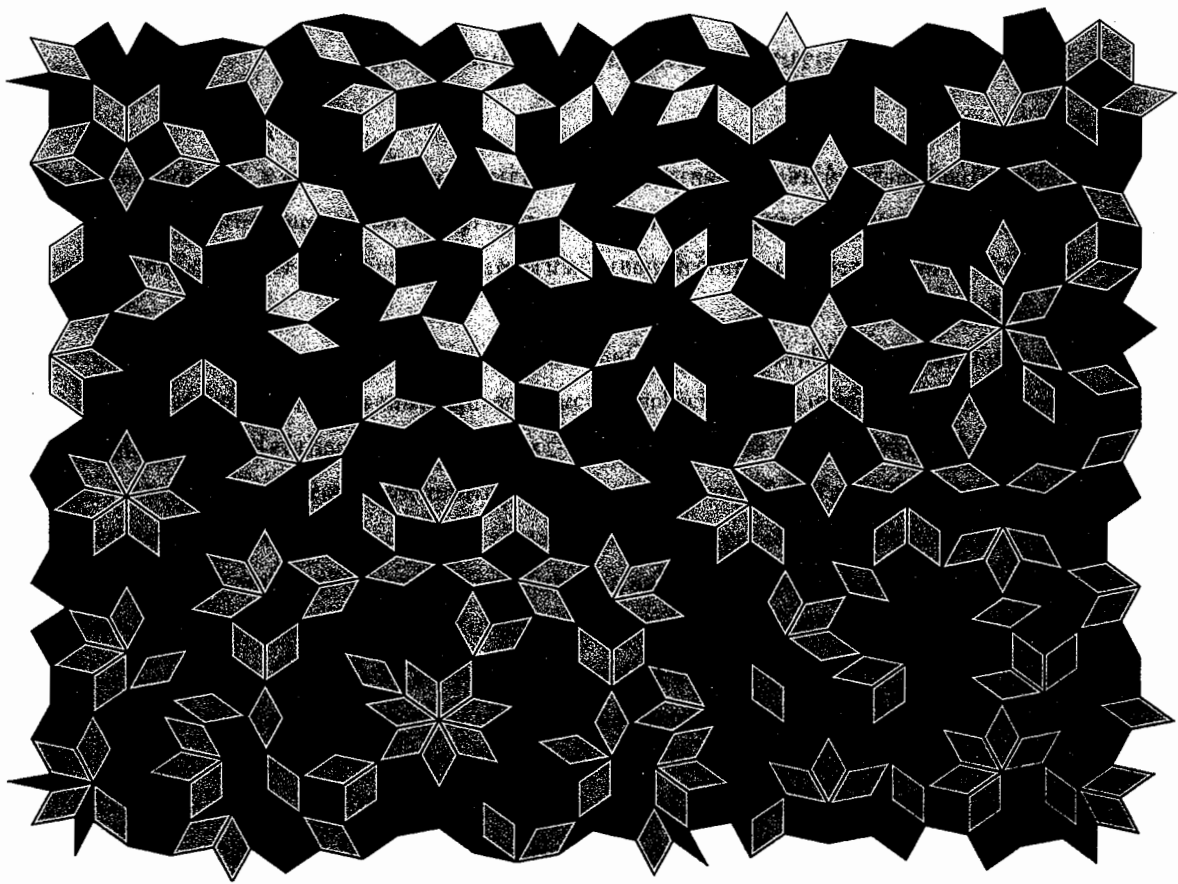
(การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ สัมประสิทธิ์ทวินาม หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก หลักรังนกพิราบ
ฟังก์ชันก่อกำเนิด ความสัมพันธ์เวียนเกิด เทคนิคเชิงการนับ)



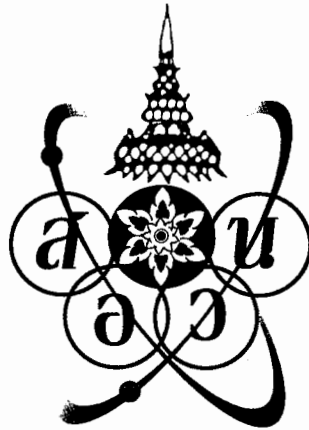
โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

คอมบินาทอริก

(การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ สัมประสิทธิ์ทวินาม หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก หลักการนกพิราบ
ฟังก์ชันก่อกำเนิด ความสัมพันธ์เวียนเกิด เทคนิคเชิงการนับ)



โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.



มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา
ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา
กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.)

ความเป็นมา

ประเทศไทยส่งนักเรียนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศครั้งแรกในปี พ.ศ. 2532 ที่ประเทศเยอรมนี โดยความร่วมมือระหว่างสมาคมวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ และสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์ สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา (พระยศในขณะนั้น) ได้พระราชทานเงินส่วนพระองค์ จำนวนหนึ่งเพื่อเป็นค่าใช้จ่าย

การคัดเลือกนักเรียนเพื่อไปแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ครั้งที่ 30 สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยฯ ได้จัดคณะกรรมการมหาวิทยาลัยจำนวนหนึ่งมาช่วยฝึกอบรมรวมเป็นเวลาประมาณสองเดือน เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้เนื้อหาเพิ่มเติมครอบคลุมหลักสูตรที่จะใช้แข่งขัน ซึ่งอยู่ในระดับชั้นปีที่ 1-2 ของมหาวิทยาลัย จากผลสำเร็จในปีแรก ทำให้รัฐบาลเห็นความสำคัญจึงได้จัดสรรงบประมาณให้กับโครงการนี้ผ่านสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2533 เป็นต้นมา สมทบกับเงินพระราชทานเป็นรายปีจากสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เพื่อสนับสนุนการส่งนักเรียนไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ 5 สาขา จนถึงปัจจุบันรวม 14 ปี นักเรียนไทยได้ทำชื่อเสียงได้เหรียญทองรวม 17 เหรียญ เหรียญเงิน 53 เหรียญ เหรียญทองแดง 93 เหรียญ และเกียรติคุณประกาศอีก 35 ราย รวมทั้งสิ้น 198 รางวัล จากจำนวนนักเรียนที่ส่งไปเข้าแข่งขัน 276 คน (72%)

อย่างไรก็ตาม จากการที่ประเทศไทยดำเนินการจัดส่งนักเรียนเข้าร่วมการแข่งขันคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ โอลิมปิกระหว่างประเทศ ตั้งแต่ พ.ศ.2532 จนถึงปัจจุบัน ทำให้เห็นว่ามาตรฐานการศึกษาด้านคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ของไทยยังต่ำกว่ามาตรฐานสากล การเตรียมตัวของนักเรียนยังใช้เวลาน้อยเกินไป

เพื่อให้การส่งเสริมและสนับสนุนโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมีประสิทธิภาพยิ่งขึ้นสมเด็จพระเจ้า พี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ จึงมีพระดำริให้จัดตั้งมูลนิธิ สอวน. และได้รับอนุมัติจากกระทรวงมหาดไทยเมื่อวันที่ 12 ตุลาคม 2542 โดยมีวัตถุประสงค์หลัก 2 ประการ

วัตถุประสงค์

1. ส่งเสริมให้นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายทั่วประเทศที่มีความสามารถทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ มีโอกาสได้รับการพัฒนาศักยภาพทางด้านคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ฟิสิกส์ และชีววิทยา ตามความถนัดทั้งด้านทฤษฎีและทักษะด้านปฏิบัติ ให้สามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้ โดยจัดให้มีศูนย์อบรมทั่วประเทศเป็นการเพิ่มเวลาฝึกอบรม เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความพร้อมที่จะเข้ารับการคัดเลือกไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศให้ได้ผลดียิ่งขึ้น ตามพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอเจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ องค์ประธานมูลนิธิ สอวน.
2. เพื่อนำประสบการณ์ที่ได้จากการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ศึกษาของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าระดับสากล

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ (สอวน.) ได้ร่วมมือกับคณาจารย์มหาวิทยาลัยของรัฐ 20 แห่ง และกระทรวงศึกษาธิการ ดำเนินการจัดตั้งศูนย์ สอวน. ในภูมิภาค 12 ศูนย์ และในกรุงเทพฯ 1 ศูนย์ (5 โรงเรียน) เพื่อพัฒนาศักยภาพทางปัญญาของนักเรียนที่มีความพร้อมในด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์จากทั่วประเทศ เพื่อให้นักเรียนได้มีความรู้ความสามารถเทียบเท่ามาตรฐานสากล และพร้อมที่จะสอบคัดเลือกเป็นผู้แทนประเทศไทยไปร่วมการแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศในสาขาวิชาต่างๆ ได้ และเพื่อขยายผลจากประสบการณ์ที่ได้เข้าแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศมาพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้สูงขึ้นเทียบเท่าสากล

ในการอบรมนักเรียนของศูนย์ สอวน. มูลนิธิ สอวน. ได้พิจารณาเห็นว่าตำราที่มีความสมบูรณ์ของเนื้อหาตามหลักสูตรของ สอวน. จะช่วยพัฒนาศักยภาพของนักเรียนในศูนย์ สอวน. ให้สูงขึ้นได้นอกจากนั้นตำราเรียนในวิชาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่มีความสมบูรณ์ถูกต้องยังขาดแคลน นักเรียนและครูสามารถนำตำราที่พัฒนาขึ้นมาไปใช้เป็นหนังสืออ้างอิงประกอบการเรียนการสอนได้อีกด้วย มูลนิธิ สอวน. จึงได้มี "โครงการจัดทำตำราส่งเสริมพัฒนาศักยภาพของนักเรียนด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์" ขึ้น เพื่อผลิตตำราคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ที่มีเนื้อหาหลักสูตรตามมาตรฐานสากล โดยมีวัตถุประสงค์

1. เพื่อเป็นที่ระลึกในมหามงคลสมัยที่สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ ทรงเจริญพระชนมายุ 80 พรรษา ซึ่งพระองค์ทรงมีพระมหากรุณาธิคุณต่อโครงการจัดส่งผู้แทนประเทศไทยไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศและทรงสนับสนุนการดำเนินงานเพื่อพัฒนามาตรฐานการศึกษาวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยอย่างหาที่สุดมิได้

2. เพื่อผลิตหนังสือคณิตศาสตร์ คอมพิวเตอร์ เคมี ชีววิทยาและฟิสิกส์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายถึงระดับชั้นปีที่ 1 ของคณะวิทยาศาสตร์ในมหาวิทยาลัยให้มีคุณภาพเทียบเท่าสากล เรียบเรียงโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัยของรัฐที่มีประสบการณ์สูง และที่มีส่วนร่วมในการฝึกอบรมนักเรียนในค่าย สอวน. ค่าย สสวท. และควบคุมนักเรียนไปแข่งขันโอลิมปิกวิชาการระหว่างประเทศ เนื้อหาในหนังสือเน้นกระบวนการคิดแบบวิทยาศาสตร์ เพื่อฝึกฝนให้นักเรียนสามารถคิดวิเคราะห์และแก้ปัญหาที่ซับซ้อนทั้งในเชิงทฤษฎีและประยุกต์ได้โดยจัดพิมพ์บนกระดาษอาร์ตอย่างดีและมีภาพสีประกอบคำบรรยาย

โครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายในการผลิตตำราคณิตศาสตร์ รวม 5 เล่ม คอมพิวเตอร์ 3 เล่ม เคมี 4 เล่ม ชีววิทยา 5 เล่ม และฟิสิกส์ 3 เล่ม โดยหนังสือชุดแรกจะนำขึ้นทูลเกล้าถวายในวันที่ 6 มิถุนายน 2547 ซึ่งเป็นวันประชุมสามัญประจำปี พ.ศ. 2547 ของคณะกรรมการบริหาร และสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์ เสด็จเป็นองค์ประธานที่ประชุม ส่วนที่เหลือคาดว่าจะจัดพิมพ์ให้แล้วเสร็จภายในปี พ.ศ. 2547 นี้ นอกจากนั้นคณะกรรมการโครงการผลิตตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน. มีเป้าหมายจะผลิตตำราที่มีคุณภาพสูงนี้ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นโดยคณาจารย์จากมหาวิทยาลัย เพื่อวางรากฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์พื้นฐานและเพื่อสร้างแรงบันดาลใจและความสนใจทางด้านวิทยาศาสตร์ คณิตศาสตร์แก่เยาวชนอีกด้วย หากได้รับความอนุเคราะห์ช่วยเหลือด้านงบประมาณจากภาครัฐและเอกชน

คณะจัดทำหนังสือคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์หวังว่าโครงการตำราคณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ของมูลนิธิ สอวน. จะมีส่วนร่วมในการปฏิรูปการเรียนรู้และยกระดับมาตรฐานวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์ของไทยให้เทียบเท่ากับระดับสากลเพื่อสนองพระดำริของสมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

คำขอบคุณ คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ ขอขอบคุณพิพิธภัณฑสถาน Deutsches Museum, Munich ที่อนุญาตให้ประธานคณะกรรมการฯ เข้าถ่ายภาพในพิพิธภัณฑสถาน เพื่อนำมาเผยแพร่เพื่อการศึกษา

คณะกรรมการโครงการตำราวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์มูลนิธิ สอวน.

คณะกรรมการที่ปรึกษา

1. ศาสตราจารย์นายแพทย์ จรัส สุวรรณเวลา
2. รองศาสตราจารย์ ดร.กำจัด มงคลกุล
3. ดร. คุณหญิงกษมา วรวรรณ ณ อยุธยา
4. รองศาสตราจารย์ ดร. คุณหญิงสุมณฑา พรหมบุญ
5. นายเชาว์ อรรถมานะ (อดีต)
6. นายสมนึก พิมพ์เสถียร
7. นายสุนทร อรุณานนท์ชัย
8. รองศาสตราจารย์บุญรักษา สุนทรธรรม

รองประธานมูลนิธิ สอวน.

กรรมการมูลนิธิฯ

กรรมการมูลนิธิฯ

กรรมการมูลนิธิฯ

กรรมการมูลนิธิฯ

กรรมการมูลนิธิฯ

กรรมการมูลนิธิฯ

กรรมการมูลนิธิฯ

คณะกรรมการดำเนินงานโครงการตำราฯ

1. ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์ (ราชบัณฑิต) เลขานุการมูลนิธิ สอวน.
2. รองศาสตราจารย์เย็นใจ สมวิเชียร
3. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนัม
4. รองศาสตราจารย์ยืน ภู่วรรณ
5. รองศาสตราจารย์ ดร. พินิติ รตะนานุกูล
6. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วุทธิพันธุ์ ปรัชญพฤทธิ์
7. ศาสตราจารย์อักษร ศรีเปล่ง
8. รองศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ ยศยิ่งยวด

ประธาน

รองประธาน

กรรมการ (วิชาคณิตศาสตร์)

กรรมการ (วิชาคอมพิวเตอร์)

กรรมการ (วิชาเคมี)

กรรมการ (วิชาฟิสิกส์)

กรรมการ (วิชาชีพวิทยาศาสตร์ ประเภทพืช)

กรรมการ (วิชาชีพวิทยาศาสตร์ ประเภทสัตว์)

คณะผู้เขียนวิชาคณิตศาสตร์

1. รองศาสตราจารย์ ดร. ณรงค์ ปั่นนัม
2. ศาสตราจารย์ กิตติคุณยุพิน พิพิธกุล
3. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. อุษณีย์ สิริวัฒน์
4. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. นิตติยา ปภาพจน์
5. รองศาสตราจารย์ ดร. ณวีวรรณ รัตนประเสริฐ
6. รองศาสตราจารย์ ดร. วิเชียร เลหาโกศล
7. ดร. ภัททรา เรืองสินทรัพย์
8. นายวัชรพล พิมพ์เสริฐ
9. ดร. จริยา อุ้ยยะเสถียร
10. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาสาสินธุ์

ประธานคณะกรรมการ

อนุกรรมการ

อนุกรรมการ

อนุกรรมการ

อนุกรรมการ

อนุกรรมการ

อนุกรรมการ

อนุกรรมการ



คอมบินาทอริก(Combinatorics) เป็นสาขาของวิชาคณิตศาสตร์ที่ศึกษาการแจงนับ การจัดหมู่ และการเรียงสับเปลี่ยนของเซตภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด รวมถึงความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับวิธีการเหล่านั้น ความรู้ในวิชาคอมบินาทอริกนั้นนอกจากจะเป็นประโยชน์โดยตรงต่อการศึกษาคณิตศาสตร์บริสุทธิ์แล้ว ยังมีประโยชน์ต่อการศึกษาและการทำงานวิจัยในด้านคณิตศาสตร์ประยุกต์หลายสาขา

ตำราคอมบินาทอริกเล่มนี้ ผู้เขียนได้เรียบเรียงขึ้นด้วยวัตถุประสงค์หลักเพื่อใช้เป็นตำราประกอบการเรียนการสอนวิชาคอมบินาทอริกสำหรับมูลนิธิ สอวน. เนื้อหาในตำราเล่มนี้แบ่งเป็น 7 บท ได้แก่ การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ สมบัติทวินาม หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก หลักการนับพิราบ ฟังก์ชันก่อกำเนิด ความสัมพันธ์เวียนเกิด และเทคนิคเชิงการนับ กล่าวได้ว่าครอบคลุมตั้งแต่ความรู้เบื้องต้นไปจนถึงความรู้ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหาในการแข่งขันคณิตศาสตร์หลากหลายระดับได้ จึงเหมาะกับนักเรียนระดับมัธยมศึกษาที่มุ่งสู่คณิตศาสตร์โอลิมปิก รวมถึงนิสิตและนักศึกษาในมหาวิทยาลัย

การศึกษาคณิตศาสตร์ให้ประสบผลสำเร็จนั้น ส่วนหนึ่งเป็นผลจากการได้หมั่นคิดวิเคราะห์โจทย์แบบฝึกหัดด้วยตนเองอย่างสม่ำเสมอโดยไม่ย่อท้อ ผู้อ่านจึงไม่ควรละเลยแบบฝึกหัดท้ายหัวข้อและแบบฝึกหัดท้ายบทที่มีระดับความยากตั้งแต่พื้นฐานไปจนถึงโจทย์แข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระหว่างประเทศ ทักษะที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยตนเองย่อมเสริมสร้างรากฐานอันแข็งแกร่งในการศึกษาคณิตศาสตร์ต่อไปในอนาคต

ผู้เขียนรู้สึกซาบซึ้งและใคร่ขอกราบขอบพระคุณครูบาอาจารย์ทุกท่านที่ได้ประสิทธิ์ประสาทวิชาให้แก่ผู้เขียนจนก่อเกิดเป็นตำราอันจะยังประโยชน์ให้แก่ผู้อ่านทุกท่านเพื่อดำรงซึ่งความรู้เหล่านี้สืบต่อไป

ที่ปรึกษา

ดร. จริยา อู่ยะเสถียร

Ph.D. (Applied Mathematics) University of Colorado at Denver

ผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. ไพศาล นาคมหาสาสินธุ์

Ph.D. (Physics) University of California at Los Angeles

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วิชาญ ลีวีระดิษฐ์กุล

Ph.D. (Mathematics) Cornell University

ISBN :974-93536-5-2

สงวนลิขสิทธิ์

จัดพิมพ์โดย มูลนิธิ สอวน.

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ.2548 (2005)

ออกแบบปก หน้ารองปกและหน้านำบท

โดย ศาสตราจารย์ศักดิ์ ศิริพันธุ์

ศิลปินกรรม: นายปรีชา นัตระเนตร

พิมพ์ที่ บริษัทด้านสุทธาการพิมพ์ จำกัด

แยกสี่ เพชร บริษัทอิลีฟแวนด์เคลเลอร์ส จำกัด

บทที่ 1	การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	
1.1	หลักพื้นฐานการนับ	1
1.2	การเรียงสับเปลี่ยน	8
1.3	การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม	16
1.4	การจัดหมู่	24
1.5	หลักหนึ่งต่อหนึ่งและหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง	36
1.6	การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ที่มีของซ้ำ	42
1.7	การแจกของ	50
	แบบฝึกหัด เรื่องการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่	61
บทที่ 2	สัมประสิทธิ์ทวินาม	
2.1	ทฤษฎีบททวินาม	67
2.2	รูปสามเหลี่ยมปาสกาล	72
2.3	สัมประสิทธิ์อเนกนามและทฤษฎีบทอเนกนาม	77
2.4	ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังใดๆ	79
	แบบฝึกหัด เรื่องสัมประสิทธิ์ทวินาม	84
บทที่ 3	หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก	
3.1	หลักการเบื้องต้น	91
3.2	ปัญหาเกี่ยวกับหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก	99
	แบบฝึกหัด เรื่องหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก	102

บทที่ 4	หลักรั้งนกพิราบ	
4.1	หลักรั้งนกพิราบอย่างง่าย	107
4.2	หลักรั้งนกพิราบทั่วไป	112
	แบบฝึกหัด เรื่องหลักรั้งนกพิราบ	117
บทที่ 5	ฟังก์ชันก่อกำเนิด	
5.1	ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ	123
5.2	ปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิด	129
5.3	ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล	132
	แบบฝึกหัด เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด	137
บทที่ 6	ความสัมพันธ์เวียนเกิด	
6.1	ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิด	141
6.2	สมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์	148
6.3	สมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์	154
6.3	ระบบสมการเวียนเกิด	159
	แบบฝึกหัด เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด	164
บทที่ 7	เทคนิคเชิงการนับ	
7.1	การนับสองทาง	167
7.2	ภาวาคู่หรือคี่	173
7.3	หลักค่าสุดขีด	179
7.4	ตัวเวียนยง	184
บรรณานุกรม		193
ดัชนี		194
บัญชีสัญลักษณ์		196



บทที่ 1

การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

1.1 หลักพื้นฐานการนับ

ชีวิตประจำวันของเรามักเกี่ยวข้องกับการนับจำนวนเหตุการณ์ในลักษณะเช่น การเรียงสิ่งของให้มีรูปแบบตามต้องการ การแบ่งกลุ่มสิ่งของภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด หรือการแจกของภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด เป็นต้น เราอาจพบคำถามที่เกี่ยวข้องกับการนับดังตัวอย่างต่อไปนี้

“มีกี่วิธีในการจัดเด็กผู้ชาย 5 คนและเด็กผู้หญิง 3 คนเข้าแถว โดยไม่มีเด็กผู้หญิงยืนติดกัน”

“มีกี่วิธีในการแบ่งคน 10 คนเป็นสามกลุ่ม ที่มีจำนวนสมาชิกในกลุ่มเท่ากับ 4, 3 และ 2 ตามลำดับ และมีหนึ่งคนที่ไม่ได้จัดเข้ากลุ่ม”

คำถามสองคำถามข้างต้นเป็นตัวอย่างง่ายๆ ของปัญหาการนับที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่เรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) และ การจัดหมู่ (Combination) ก่อนที่จะศึกษาการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ในหัวข้อต่อไป ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงหลักสำคัญสองข้อที่เป็นพื้นฐานในปัญหาการนับทุกปัญหาก่อน

หลักการบวก (The Addition Principle)

ให้ $k \geq 1$ ถ้ามีเหตุการณ์ $E_1, E_2, \dots, E_k$ ซึ่งไม่มีส่วนร่วมทุกคู่ โดย

เหตุการณ์ E_1 เกิดได้ n_1 วิธี

เหตุการณ์ E_2 เกิดได้ n_2 วิธี

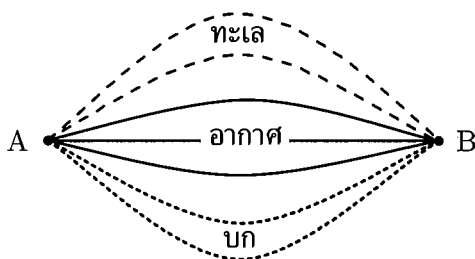
$\vdots$

เหตุการณ์ E_k เกิดได้ n_k วิธี

แล้วจำนวนวิธีที่จะเกิดอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์จาก $E_1, E_2, \dots, E_k$ คือ $n_1 + n_2 + \dots + n_k$

ตัวอย่าง 1.1.1 ถ้าเราสามารถเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B ได้ทั้งทางบก ทางทะเล และทางอากาศ โดยทางทะเลมี 2 เส้นทาง ทางบกมี 3 เส้นทาง และทางอากาศมี 2 เส้นทาง จงหาจำนวนเส้นทางทั้งหมดในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง B

วิธีทำ พิจารณาแผนภาพแสดงเส้นทางต่างๆ จากเมือง A ไปเมือง B



เนื่องจากการเดินทางทางบก ทางทะเล และทางอากาศจากเมือง A ไปเมือง B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน โดยหลักการบวก จึงได้จำนวนเส้นทางจากเมือง A ไปเมือง B เท่ากับ $2 + 3 + 2 = 7$ ■

เราสามารถเขียนหลักการบวกโดยอาศัยความรู้เรื่องเซตได้ดังนี้

ให้ $k \geq 1$ ถ้ามี $A_1, A_2, \dots, A_k$ เป็นเซตจำกัดที่ไม่มีส่วนร่วมทุกคู่

กล่าวคือ $A_i \cap A_j = \emptyset$ สำหรับ $i, j = 1, 2, \dots, k$ และ $i \neq j$ แล้ว

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_k|$$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงหาจำนวนคู่อันดับ (x, y) ซึ่ง x และ y เป็นจำนวนเต็มและ $x^2 + y^2 \leq 5$

วิธีทำ เราสามารถแบ่งปัญหานี้เป็น 6 กรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกันได้คือ กรณี $x^2 + y^2 = 0, 1, \dots, 5$ นั่นคือ สำหรับแต่ละ $i = 0, 1, \dots, 5$ ให้

$$S_i = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, x^2 + y^2 = i\}$$

สามารถตรวจสอบได้ว่า

$$S_0 = \{(0, 0)\}$$

$$S_1 = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$$

$$S_2 = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

$$S_3 = \emptyset$$

$$S_4 = \{(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0)\}$$

$$S_5 = \{(1, 2), (1, -2), (2, 1), (2, -1), (-1, 2), (-1, -2), (-2, 1), (-2, -1)\}$$

ดังนั้น โดยหลักการบวก จึงได้จำนวนคู่อันดับ (x, y) ทั้งหมดเท่ากับ $1 + 4 + 4 + 0 + 4 + 8 = 21$ ■

หลักการคูณ (The Multiplication Principle)

ถ้าสามารถแยกเหตุการณ์ E เป็น r เหตุการณ์ย่อย $E_1, E_2, \dots, E_r$ ที่มีลำดับ โดย

เหตุการณ์ E_1 เกิดได้ n_1 วิธี

เหตุการณ์ E_2 เกิดได้ n_2 วิธี

$\vdots$

เหตุการณ์ E_r เกิดได้ n_r วิธี

แล้วจำนวนวิธีที่จะเกิดเหตุการณ์ E คือ $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$

ตัวอย่าง 1.1.3 ในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง D จะต้องผ่านเมือง B และเมือง C ถ้าทราบว่ามี 2 เส้นทางจากเมือง A ไปเมือง B มี 4 เส้นทางจากเมือง B ไปเมือง C และมี 3 เส้นทางจากเมือง C ไปเมือง D จงหาจำนวนเส้นทางในการเดินทางจากเมือง A ไปเมือง D



วิธีทำ เนื่องจากแต่ละเส้นทางจาก A ไป D ประกอบด้วย 3 เส้นทางย่อยคือ

เส้นทางจาก A ไป B ตามด้วยเส้นทางจาก B ไป C และท้ายสุดจึงเป็นเส้นทางจาก C ไป D ตามลำดับ

ดังนั้น โดยหลักการคูณ จำนวนเส้นทางทั้งหมดจาก A ไป D เท่ากับ $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$ ■

เราสามารถเขียนหลักการคูณโดยอาศัยความรู้เรื่องเซตได้ดังนี้

ให้ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r = \{(a_1, a_2, \dots, a_r) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, r\}$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียนของเซตจำกัด $A_1, A_2, \dots, A_r$ แล้ว

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_r| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_r|$$

ให้ $n, k \in \mathbb{N}$ จำนวนที่เขียนในรูป $a_1 a_2 \dots a_n$ โดยที่ $a_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$ เรียกว่า เลขฐาน k ที่มี n หลัก จำนวนหลักก็คือจำนวนเลขโดดนั่นเอง บางครั้ง อาจเขียนเลขฐาน k ที่มี n หลักในรูป $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

เลขฐานสองที่มี 3 หลักมีทั้งหมด $2^3 = 8$ ตัว ได้แก่ $\{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$ ถ้ากำหนดจำนวนนับ n และ k ใดๆ เราอาจตั้งคำถามว่ามีเลขฐาน k ที่มี n หลักได้ทั้งหมดกี่ตัว ซึ่งจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่าง 1.1.4 จงหาว่ามีเลขฐาน k ที่มี n หลักทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ ในการสร้างเลขฐาน k ในรูป $a_1 a_2 \cdots a_n$ ที่มี n หลัก ทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

เลือก a_1 จากเซต $\{0, 1, \dots, k-1\}$ ทำได้ k วิธี

เลือก a_2 จากเซต $\{0, 1, \dots, k-1\}$ ทำได้ k วิธี

$\vdots$

เลือก a_n จากเซต $\{0, 1, \dots, k-1\}$ ทำได้ k วิธี

ดังนั้น โดยหลักการคูณ จำนวนเลขฐาน k ที่มีความยาว n ทั้งหมดคือ k^n ■

ตัวอย่าง 1.1.5 จงหาจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ 600

วิธีทำ แยกตัวประกอบของ 600 ได้ดังนี้

$$600 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^2$$

จำนวนเต็มบวก m จะเป็นตัวหารของ 600 ก็ต่อเมื่อ $m = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก และ

$$0 \leq a \leq 3, 0 \leq b \leq 1 \text{ และ } 0 \leq c \leq 2$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างชุดของตัวเลข (a, b, c)

โดยที่ $a \in \{0, 1, 2, 3\}, b \in \{0, 1\}$ และ $c \in \{0, 1, 2\}$ เท่ากับ $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ ■

ข้อสังเกต โดยอาศัยหลักการคูณ เราสามารถสรุปกรณีทั่วไปได้ดังนี้

ถ้าจำนวนนับ n เขียนในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะได้เป็น

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

โดยที่ p_i เป็นจำนวนเฉพาะที่ต่างกันและ α_i เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้วจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ n เท่ากับ

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

ในตัวอย่างข้างต้น เราได้เห็นการใช้หลักการบวกและหลักการคูณเพียงอย่างเดียวหนึ่งใช้การแก้ปัญหานับบางปัญหา แต่บ่อยครั้งที่การแก้ปัญหาก็ซับซ้อนต้องประยุกต์ใช้หลักทั้งสองร่วมกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1.6 ให้ $A = \{1, 2, \dots, 100\}$ และให้ $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in A, a < b \text{ และ } a < c\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของ S

วิธีทำ ปัญหานี้แบ่งย่อยเป็นกรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกันได้โดยการพิจารณากรณีเมื่อ $a = 1, 2, \dots, 99$

สำหรับแต่ละ $a \in \{1, 2, \dots, 99\}$ เราเลือก b ได้ $100 - a$ วิธี และเลือก c ได้ $100 - a$ วิธี เช่นกัน

โดยหลักการคูณ จึงเลือก b และ c ตามเงื่อนไขที่ต้องการได้ $(100 - a)^2$ วิธี

เนื่องจาก a มีค่าได้ตั้งแต่ 1 จนถึง 99 โดยหลักการบวก จึงได้

$$|S| = 99^2 + 98^2 + \dots + 1^2 = \frac{1}{6} \cdot 99 \cdot 100 \cdot 199 = 328350 \quad \blacksquare$$

จะเห็นว่าหลักการบวกและหลักการคูณนั้นเป็นสิ่งที่เห็นได้ชัดจนมักจะถูกละเลย ในความเป็นจริงแล้วหลักทั้งสองเป็นหลักพื้นฐานสำคัญในการแก้ปัญหการนับ ดังจะได้เห็นต่อไปว่า ไม่ว่าจะเป็นปัญหการนับที่ซับซ้อนเพียงใด จะแก้ได้ด้วยการแยกเป็นปัญหาย่อยที่ง่ายกว่าเสมอ และสามารถรวมจำนวนวิธีจากปัญหาย่อยเหล่านี้เข้าด้วยกันโดยหลักการบวกหรือหลักการคูณ

แบบฝึกหัด 1.1

1. สนามกีฬามีประตูเข้าออก 6 ประตู ชายคนหนึ่งจะเลือกเข้าออกจากสนามกีฬาได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 1.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 1.2 เข้าประตูใดจะออกประตูนั้นไม่ได้
 - 1.3 เข้าประตูใดต้องออกประตูนั้น
2. จากข้อที่แล้ว ถ้ามีชาย 2 คน จะเข้าออกสนามกีฬาได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 2.1 แต่ละคนเมื่อเข้าประตูใด แล้วจะออกประตูเดิมไม่ได้
 - 2.2 แต่ละคน เมื่อเข้าประตูใด แล้วจะต้องออกประตูนั้น แต่ทั้ง 2 คน จะใช้วิธีเหมือนกันไม่ได้
 - 2.3 แต่ละคนต้องเข้าออกด้วยวิธีที่แตกต่างกัน
3. นาย ก, ข และ ค ต้องการขึ้นลิฟท์ที่มีทั้งหมด 3 ตัว มีกัวิธีที่นาย ก และนาย ข ขึ้นด้วยกัน แต่นาย ค ขึ้นคนเดียว
4. มีตู้ไปรษณีย์ 5 ตู้ มีจดหมาย 4 ฉบับ จะมีกัวิธีในการทิ้งจดหมายใส่ตู้ ถ้า
 - 4.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 4.2 ห้ามทิ้งตู้เดียวกันทั้ง 4 ฉบับ
 - 4.3 ไม่มีฉบับใดอยู่ตู้เดียวกัน
5. มีกัไม้ 3 กั มีนก 6 ตัว นกจะมีวิธีการจับกัไม้ได้ทั้งหมดกี่วิธี
6. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอกลีต่าง ๆ กัน อยู่ 6 ลูก ต้องการหยิบออกมา 3 ลูก โดยหยิบทีละลูก จะทำได้กี่วิธี ถ้า
 - 6.1 ใส่คืนก่อนหยิบลูกต่อไป
 - 6.2 ไม่ใส่คืนก่อนหยิบลูกต่อไป
7. มีหนังสือ 10 เล่มที่ต่างกัน นำไปแจกให้เด็ก 4 คน ได้กัวิธี
8. ทอดลูกเต๋าที่แตกต่างกัน 2 ลูก จงหาจำนวนวิธีที่จะ
 - 8.1 ขึ้นหน้าต่างกัน
 - 8.2 ขึ้นหน้า 6 อย่างน้อย 1 ลูก
9. หยิบไพ่ 2 ใบ จากสำรับหนึ่ง ซึ่งมี 52 ใบ โดยหยิบทีละใบแบบไม่ใส่คืน จงหาจำนวนวิธีที่
 - 9.1 ใบแรกเป็น A และใบที่ 2 ไม่ใช่ Q
 - 9.2 ใบแรกเป็นโพดำ และใบที่ 2 ไม่ใช่ Q

10. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 และต้องเป็นจำนวนคี่ จะสร้างได้กี่จำนวน ถ้า
 - 10.1 ใช้เลขซ้ำกันได้
 - 10.2 ใช้เลขซ้ำกันไม่ได้
11. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 และเป็นจำนวนคู่ จะสร้างได้กี่จำนวน ถ้า
 - 11.1 ใช้เลขซ้ำกันได้
 - 11.2 ใช้เลขซ้ำกันไม่ได้
12. จำนวนคู่ที่มีค่าอยู่ระหว่าง 3,000 – 7,000 และเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีทั้งหมดกี่จำนวน
13. จำนวนเต็มที่มีค่าระหว่าง 6,500 ถึง 9,999 ที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีทั้งหมดกี่จำนวน
14. จำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก และมีเลข 5 ปรากฏอย่างน้อยหนึ่งตัว มีทั้งหมดกี่จำนวน
15. สร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 5 หลัก จากเลข 0 – 9 โดยไม่ใช้เลขซ้ำกัน และสลับเลขคู่กับเลขคี่ได้กี่จำนวน
16. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 4 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 ให้แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และหารด้วย 2 หรือ 5 ลงตัว จะสร้างได้กี่จำนวน และมีกี่จำนวนซึ่งมีค่าไม่เกิน 6,500
17. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 4 หลัก จากตัวเลข 0 – 9 โดยให้มีค่าอยู่ระหว่าง 4,500 และ 9,500 จะสร้างไว้กี่จำนวน ถ้า
 - 17.1 เลขแต่ละหลักซ้ำกันได้
 - 17.2 เลขแต่ละหลักซ้ำกันไม่ได้
18. ต้องการสร้างเลข 3 หลัก จากเลข 0 – 9 โดยให้แต่ละหลักซ้ำกันได้ และจำนวนนั้นหารด้วย 3 ลงตัว จะสร้างได้กี่จำนวน
19. จากเลข 1 – 1000 มีกี่จำนวน ซึ่งตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันเลย
20. ต้องการสร้างจำนวนคี่ที่มีค่าน้อยกว่า 3,500 จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน โดยที่เลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน
21. ต้องการสร้างเลข 3 หลัก จากเลข 0 – 9 โดยให้แต่ละหลักไม่ซ้ำกัน และจำนวนนั้นหารด้วย 3 ลงตัว จะสร้างได้กี่จำนวน
22. ให้ $X = \{1, 2, \dots, 100\}$ และให้ $S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in X, a < b \text{ และ } a < c\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต S

1.2 การเรียงสับเปลี่ยน

ในตอนต้นของหัวข้อที่แล้ว เราได้กล่าวถึงปัญหาต่อไปนี้ “มีกี่วิธีในการจัดเด็กผู้ชาย 5 คนและเด็กผู้หญิง 3 คนเข้าแถว โดยไม่มีเด็กผู้หญิงยืนติดกัน” ซึ่งเป็นตัวอย่างของปัญหาของการเรียงของที่ต่างกันภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดซึ่งรู้จักกันในชื่อ การเรียงสับเปลี่ยน(permutation)

ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เป็นเซตของของที่แตกต่างกัน n สิ่ง และให้ r เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $0 \leq r \leq n$ การเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่งของเซต A คือการนำของ r สิ่งจากเซต A มาเรียงลำดับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

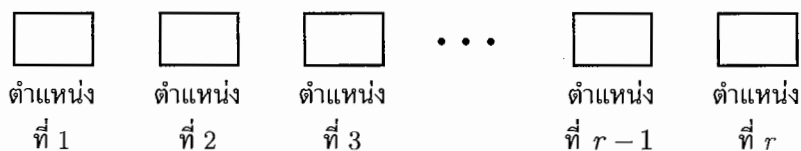
ตัวอย่าง 1.2.1 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงหาการเรียงสับเปลี่ยนทีละ 3 สิ่งของเซต A

วิธีทำ การเรียงสับเปลี่ยนทีละ 3 สิ่งของเซต A มีดังนี้

$abc,$	$acb,$	$bac,$	$bca,$	$cab,$	$cba,$
$abc,$	$adb,$	$bad,$	$bda,$	$dab,$	$dba,$
$acd,$	$adc,$	$cad,$	$cda,$	$dac,$	$dca,$
$bcd,$	$bdc,$	$cbd,$	$cdb,$	$dbc,$	$dcb,$

จะเห็นว่าการเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกัน 24 วิธี

ให้ P_r^n แทนจำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่งจาก n สิ่ง จากตัวอย่าง 1.2.1 จะเห็นว่า $P_3^4 = 24$ ต่อไปจะหาสูตรสำหรับ P_r^n โดยอาศัยหลักการคูณ ดังนี้



การเรียงสับเปลี่ยนของ r สิ่งจากเซต A ทำได้ใน r ขั้นตอน ดังนี้

- ขั้นที่ 1 เลือกของหนึ่งชิ้นจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ 1
- ขั้นที่ 2 เลือกของหนึ่งชิ้นจากที่เหลือจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ 2
- $\vdots$
- ขั้นที่ $r-1$ เลือกของหนึ่งชิ้นจากที่เหลือจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ $r-1$
- ขั้นที่ r เลือกของหนึ่งชิ้นจากที่เหลือจากเซต A วางลงในตำแหน่งที่ r

ในขั้นที่ 1 เลือกได้ n วิธี, ขั้นที่ 2 เลือกได้ $n-1$ วิธี, ..., ขั้นที่ r เลือกได้ $n-r+1$ วิธี

ดังนั้น โดยหลักการคูณ จึงได้จำนวนวิธีที่แตกต่างกันในการเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่งจาก n สิ่ง เท่ากับ

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

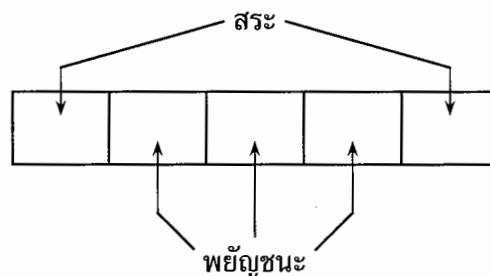
โดยอาศัยสัญลักษณ์ แฟกทอเรียล(factorial) คือ $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$ และ $0! = 1$ จะได้

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ข้อสังเกต $P_0^n = 1$ และจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่งที่แตกต่างกันคือ $P_n^n = n!$

ตัวอย่าง 1.2.2 ให้ $E = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$ เป็นเซตของตัวอักษรภาษาอังกฤษทั้ง 26 ตัว จงหาจำนวนคำทั้งหมดที่ประกอบด้วยตัวอักษร 5 ตัวจากเซต E โดยที่ตัวอักษรตัวแรกและตัวสุดท้ายเป็นสระที่แตกต่างกัน และตัวอักษรที่เหลืออีกสามตัวเป็นพยัญชนะที่แตกต่างกัน

วิธีทำ พิจารณาการสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษร 5 ตัวตามเงื่อนไขที่กำหนด



มีสระ 5 ตัวและพยัญชนะ 21 ตัวในเซต E เราสร้างคำตามต้องการได้โดยขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 เลือกตัวอักษร 2 ตัวจากเซตของสระคือ $\{a, e, i, o, u\}$ มาวางในตำแหน่งหัวและท้าย

ขั้นที่ 2 เลือกตัวอักษร 3 ตัวจากเซตของพยัญชนะทั้ง 21 ตัว มาวางในตำแหน่งที่ 2, 3 และ 4

ในขั้นที่ 1 ทำได้ P_2^5 วิธี และในขั้นที่ 2 ทำได้ P_3^{21} วิธี

โดยหลักการคูณ จึงสร้างคำได้ทั้งหมด $P_2^5 \cdot P_3^{21} = (5 \cdot 4) \cdot (21 \cdot 20 \cdot 19) = 159600$ คำ

■

ตัวอย่าง 1.2.3 มีชาย 7 คนและหญิง 3 คน จงหาจำนวนวิธีในการจัดแถวคนทั้งหมดตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1. หญิงทั้ง 3 คนยืนติดกัน
2. หญิงทั้ง 3 คนยืนแยกกันหมดและผู้ที่ยืนในตำแหน่งหัวและท้ายแถวเป็นผู้ชาย

วิธีทำ

1. เนื่องจากผู้หญิงต้องยืนติดกันหมด จึงถือเสมือนหนึ่งว่าผู้หญิงทั้ง 3 คนเป็นกลุ่มเดียว

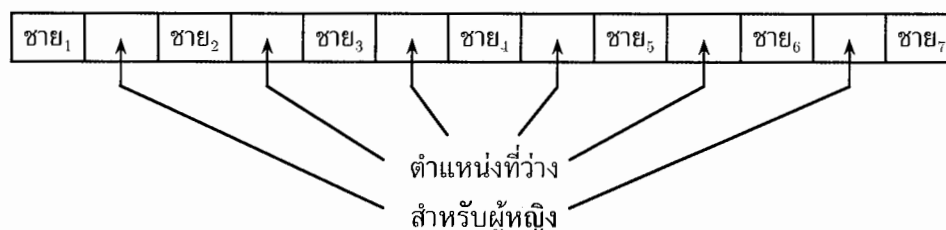
จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนชาย 7 คนและผู้หญิงอีก 1 กลุ่ม คือ $(7 + 1)!$

เนื่องจากผู้หญิงสามารถเปลี่ยนตำแหน่งกันภายในกลุ่มได้ $3!$ วิธี

จึงได้จำนวนวิธีจัดแถวตามต้องการ เท่ากับ $8!3! = 241920$ วิธี

2. ขั้นแรก เรียงสับเปลี่ยนผู้ชายทั้ง 7 คนก่อน ซึ่งทำได้ $7!$ วิธี

ในแต่ละวิธีของการเรียงสับเปลี่ยนผู้ชาย จะมี 6 ตำแหน่งให้ผู้หญิง 3 คนเข้าไปแทรกได้



ผู้หญิงคนที่หนึ่งเลือกได้ 6 ตำแหน่ง ผู้หญิงคนที่สองเลือกได้ 5 ตำแหน่ง

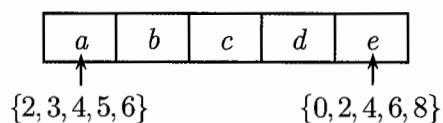
และผู้หญิงคนที่ 3 เลือกได้ 4 ตำแหน่ง

โดยหลักการคูณ จึงมีวิธีการจัดแถวเท่ากับ $7!(6 \cdot 5 \cdot 4) = 604800$ วิธี

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหาว่ามีจำนวนเต็มคู่กี่จำนวนที่มีค่าอยู่ระหว่าง 20000 และ 70000 และไม่มีเลขโดดซ้ำกัน

วิธีทำ จำนวนเต็มคู่ที่อยู่ระหว่าง 20000 และ 70000 ต้องเป็นเลข 5 หลัก

จึงสมมติให้จำนวนเต็มคู่ที่มีสมบัติตามต้องการตัวหนึ่งคือ $abcde$



จะเห็นว่า $a \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $e \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

เนื่องจาก $\{2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{0, 2, 4, 6, 8\} = \{2, 4, 6\}$ จึงแบ่งปัญหาออกเป็นสองกรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกัน ดังนี้

กรณีที่ 1: $a \in \{2, 4, 6\}$

เลือก a ได้ 3 วิธี ทำให้เลือก e ได้เพียง $5 - 1 = 4$ วิธี

เหลือเลขโดดอีก $10 - 2 = 8$ ตัว ซึ่งเลือกมา 3 ตัวเรียงเป็น bcd ได้ P_3^8 วิธี

โดยหลักการคูณ จึงมีจำนวนเต็มคู่ในกรณีนี้เท่ากับ $3 \cdot 4 \cdot P_3^8 = 4032$ จำนวน

กรณีที่ 2: $a \in \{3, 5\}$

เลือก a ได้ 2 วิธี และเลือก e ได้ 5 วิธี

เหลือเลขโดดอีก $10 - 2 = 8$ ตัว ซึ่งเลือกมา 3 ตัวเรียงเป็น bcd ได้ P_3^8 วิธี

โดยหลักการคูณ จึงมีจำนวนเต็มคู่ในกรณีนี้เท่ากับ $2 \cdot 5 \cdot P_3^8 = 3360$ จำนวน

โดยหลักการบวก จึงมีจำนวนเต็มคู่ตามต้องการเท่ากับ $4032 + 3360 = 7392$ จำนวน ■

ตัวอย่าง 1.2.6 ให้ S เป็นเซตของจำนวนนับที่เลขโดดเป็นสมาชิกในเซต $\{1, 3, 5, 7\}$ และไม่มีเลขในหลักใดซ้ำกัน

1. จงหา $|S|$

2. จงหา $\sum_{n \in S} n$

วิธีทำ

1. แบ่งเซต S เป็น 4 เซตย่อยที่ไม่มีส่วนร่วมกัน แต่ละเซตประกอบด้วย

เลข 1 หลัก ได้แก่ 1, 3, 5, 7

เลข 2 หลัก ได้แก่ 13, 15, ...

เลข 3 หลัก ได้แก่ 135, 137, ...

เลข 4 หลัก ได้แก่ 1357, 1375, ...

และหา $|S|$ ได้โดยหลักการบวก

ดังนั้น สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4$ พิจารณาเซต S_i ที่ประกอบด้วยเลข i หลักที่มีเลขโดดเป็นสมาชิกในเซต $\{1, 3, 5, 7\}$ และไม่มีเลขในหลักใดซ้ำกัน

จึงได้ $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ และโดยหลักการบวก

$$|S| = \sum_{i=1}^4 |S_i| = P_1^4 + P_2^4 + P_3^4 + P_4^4 = 4 + 12 + 24 + 24 = 64$$

2. ให้ $\alpha = \sum_{n \in S} n$ เห็นได้ว่าเป็นการยากที่จะหาค่า α โดยการหาผลบวกของสมาชิกทั้ง 64 ตัวในเซต S ตรงๆ จึงจะหาผลบวกของเลขโดดที่ละหลักแทน นั่นคือ

ให้ α_1 เป็นผลบวกของเลขหลักหน่วยของสมาชิกทุกตัวในเซต S

ให้ α_2 เป็นผลบวกของเลขหลักสิบของสมาชิกทุกตัวในเซต S

ให้ α_3 เป็นผลบวกของเลขหลักร้อยของสมาชิกทุกตัวในเซต S

ให้ α_4 เป็นผลบวกของเลขหลักพันของสมาชิกทุกตัวในเซต S

และหาค่า α ได้จาก

$$\alpha = \alpha_1 + 10\alpha_2 + 100\alpha_3 + 1000\alpha_4$$

ค่า α_1 หาได้จากผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกทุกตัวในเซต S_1, S_2, S_3, S_4

ในเซต S_1 ผลรวมของเลขหลักหน่วยคือ $1 + 3 + 5 + 7$

ในเซต S_2 สำหรับแต่ละเลขหลักหน่วย 1, 3, 5, 7 จะมีสมาชิกของ S อยู่ P_1^3 ตัวที่ลงท้ายด้วยเลขนั้น ผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกใน S_2 คือ $P_1^3(1 + 3 + 5 + 7)$

ในเซต S_3 สำหรับแต่ละเลขหลักหน่วย 1, 3, 5, 7 จะมีสมาชิกของ S อยู่ P_2^3 ตัวที่ลงท้ายด้วยเลขนั้น ผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกใน S_3 คือ $P_2^3(1 + 3 + 5 + 7)$

ในเซต S_4 สำหรับแต่ละเลขหลักหน่วย 1, 3, 5, 7 จะมีสมาชิกของ S อยู่ P_3^3 ตัวที่ลงท้ายด้วยเลขนั้น ผลรวมของเลขหลักหน่วยของสมาชิกใน S_4 คือ $P_3^3(1 + 3 + 5 + 7)$

โดยหลักการบวก จึงได้

$$\alpha_1 = (1 + P_1^3 + P_2^3 + P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 256$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\alpha_2 = (P_1^3 + P_2^3 + P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 240$$

$$\alpha_3 = (P_2^3 + P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 192$$

$$\alpha_4 = (P_3^3)(1 + 3 + 5 + 7) = 96$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_1 + 10\alpha_2 + 100\alpha_3 + 1000\alpha_4 \\ &= 256 + 2400 + 19200 + 96000 \\ &= 117856 \end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัด 1.2

1. เลือกตัวอักษร 2 ตัว จากคำว่า NEWS มาเรียงเป็นคำใหม่ โดยไม่คำนึงถึงความหมาย จะทำได้กี่วิธี และจงเขียนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้
2. ร้านค้าแห่งหนึ่งขายสินค้า 5 ชนิด ถ้าตู้โชว์หน้าร้านสามารถแสดงสินค้าได้เพียง 3 ชนิด จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ร้านค้าแห่งนั้นจะแสดงสินค้าได้
3. จงหาจำนวนวิธีในการสลับตัวอักษรในคำว่า HYPERBOLA โดยให้ขึ้นต้นด้วยสระ และลงท้ายด้วยพยัญชนะ
4. มีตำแหน่งว่างอยู่ 5 ตำแหน่งต่างกัน เป็นตำแหน่งเฉพาะชาย 3 ตำแหน่ง เป็นตำแหน่งเฉพาะหญิง 2 ตำแหน่ง มีผู้สมัครงาน 10 คน เป็นชาย 6 คน หญิง 4 คน จะมีกี่วิธีในการเลือกคนเข้าทำงานทั้ง 5 ตำแหน่งนี้
5. จากข้อที่แล้ว ถ้าเป็นตำแหน่งเฉพาะชาย 2 ตำแหน่ง เป็นตำแหน่งเฉพาะหญิง 1 ตำแหน่ง อีก 2 ตำแหน่งไม่จำกัดเพศ จะจัดคนเข้าทำงานได้กี่วิธี
6. มีธง 5 ผืน ที่มีสีแตกต่างกัน นำมาสร้างสัญญาณโดยการยกธงอย่างน้อย 1 ผืน จะได้สัญญาณที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่สัญญาณ
7. จากตัวเลข 1, 2, 3, 4 จะสร้างจำนวนเต็ม 4 หลักได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่จำนวน โดยที่เลขแต่ละหลักต้องไม่ซ้ำกัน และเมื่อนำจำนวนทั้งหมดที่สร้างได้มาบวกกัน จะได้ผลลัพธ์เท่าไร
8. เลือกตัวอักษร 4 ตัว จากคำว่า EQUATION มาสร้างเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายได้กี่วิธี เมื่อต้องการให้
 - 8.1 ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยสระ
 - 8.2 ประกอบด้วยสระเท่านั้น
 - 8.3 ประกอบด้วยพยัญชนะทั้ง 3 ตัว
 - 8.4 I และ U ต้องไม่ปรากฏพร้อมกัน
9. มีพยัญชนะภาษาอังกฤษตัวใหญ่ไม่ซ้ำกัน 7 ตัว อักษรภาษาอังกฤษตัวเล็กที่เป็นสระไม่ซ้ำกัน 3 ตัว และเป็นพยัญชนะไม่ซ้ำกัน 5 ตัว ถ้าต้องการสร้างคำที่ประกอบด้วยตัวอักษรที่ไม่ซ้ำกัน 4 ตัว โดยต้องขึ้นต้นด้วยอักษรตัวใหญ่ และที่เหลือเป็นอักษรตัวเล็ก และมีสระอย่างน้อย 1 ตัว จะสร้างได้ทั้งหมดกี่คำ

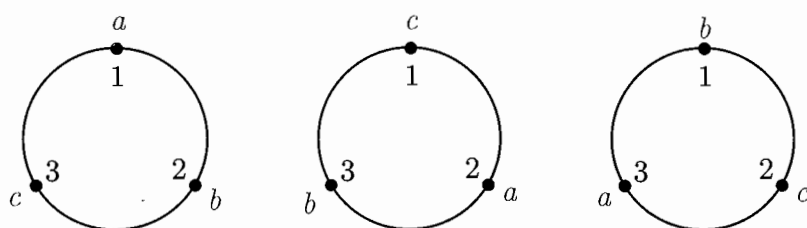
10. ครอบครัวหนึ่งประกอบด้วย พ่อ แม่ และลูก 3 คน ต้องการเข้าแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูป จะมีวิธีการยืนที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี เมื่อต้องการให้
 - 10.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 10.2 พ่อและแม่ยืนติดกัน
 - 10.3 พ่อและแม่แยกกัน
 - 10.4 ลูกทั้ง 3 คน ยืนแยกกันหมด
11. ต้องการสลับอักษรในคำว่า EQUATION โดยไม่ให้พยัญชนะอยู่ติดกัน จะสลับได้กี่วิธี
12. ชั้วหนังสือชั้นหนึ่งประกอบด้วย หนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม ฟิสิกส์ 3 เล่ม และเคมี 2 เล่ม โดยที่หนังสือทุกเล่มแตกต่างกันหมด ต้องการเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้น จะทำได้กี่วิธี ถ้า
 - 12.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 12.2 หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่ติดกันหมด
 - 12.3 หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่แยกกันหมด
 - 12.4 วิชาเดียวกันต้องอยู่ติดกัน
 - 12.5 หนังสือคณิตศาสตร์ต้องอยู่ติดกันหมด และหนังสือฟิสิกส์อยู่แยกกันหมด
13. ม้านั่งวางเรียงกันเป็นแถวยาว 9 ตัว ถ้าต้องการให้ชาย 4 คน ไปนั่งบนม้านั่งเหล่านี้ จะมีวิธีนั่งที่แตกต่างกันกี่วิธี ถ้า
 - 13.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 13.2 ชายทั้งสี่นั่งติดกัน
 - 13.3 ชายทั้งสี่นั่งแยกกันหมด
14. ต้องการสลับอักษรในคำว่า MAGNITUDE โดยต้องการให้มีอักษร 3 ตัว คั่นระหว่าง G กับ T จะสลับได้ทั้งหมดกี่วิธี
15. มีรถสีแดง 3 คัน สีฟ้า 2 คัน และสีขาว 2 คัน โดยที่รถทุกคันแตกต่างกันหมด ถ้าต้องการจอดรถทั้งหมดเรียงเป็นแถวยาว จะมีวิธีการจอดกี่วิธี ถ้าต้องการให้
 - 15.1 รถคันที่อยู่หัวและท้ายของแถวเป็นสีเดียวกัน
 - 15.2 รถคันที่อยู่หัวและท้ายของแถวเป็นคนละสีกัน
16. มีสามภรรยา 4 คู่ เข้าไปนั่งชมภาพยนตร์บนเก้าอี้แถวหนึ่ง ซึ่งมี 9 ตัว โดยที่สามภรรยาทุกคู่ต้องนั่งติดกันเสมอ จะมีวิธีเลือกนั่งได้ทั้งหมดกี่วิธี
17. โต๊ะยาวตัวหนึ่งมีเก้าอี้วางอยู่ 2 ข้าง ๆ ละ 4 ตัว คน 8 คน นั่งรับประทานอาหารที่โต๊ะนี้ได้กี่วิธี ถ้ามีอยู่ 2 คน ไม่ยอมนั่งติดกัน
18. จากข้อที่แล้ว ถ้า 2 คนนั้นไม่ยอมนั่งติดกันและไม่ยอมนั่งตรงข้ามกัน จะจัดได้กี่วิธี

19. ชาย 6 คน หญิง 6 คน ยืนเรียงเป็นแถวตรงได้กี่วิธี ถ้า
 - 19.1 ชายและหญิงยืนสลับกันคนต่อคน
 - 19.2 ชายและหญิงยืนสลับกันทีละ 2 คน
 - 19.3 ชายและหญิงยืนสลับกันทีละ 3 คน
 - 19.4 ชายหญิงคู่หนึ่งต้องยืนติดกันเสมอ
 - 19.5 ชายหญิงคู่หนึ่งต้องยืนแยกกันเสมอ
 - 19.6 ชายยืนติดกันหมด
 - 19.7 หญิงยืนแยกกันหมด
 - 19.8 หญิงไม่ยืนติดกันหมด
 - 19.9 ชายยืนติดกันหมด และหญิงยืนติดกันหมด
 - 19.10 มีชาย 3 คน ต้องยืนติดกันเสมอ
 - 19.11 มีชาย 3 คน ต้องยืนแยกกันเสมอ
 - 19.12 มีชายคนหนึ่งไม่ยอมยืนติดกับชายคนอื่น ๆ
 - 19.13 ชายยืนแยกกันหมด และมีหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.14 ชายยืนแยกกันหมด และมีชายหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.15 ชายและหญิงยืนสลับกันคนต่อคน และชายหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.16 ชายและหญิงยืนสลับกันทีละ 2 คน และชายหญิงคู่หนึ่งยืนติดกันเสมอ
 - 19.17 ชายและหญิงยืนสลับกันคนต่อคน และชายหญิงคู่หนึ่งยืนแยกกันเสมอ
 - 19.18 คนที่ยืนหัวแถวและท้ายแถวต้องเป็นเพศเดียวกัน

1.3 การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม

การเรียงสับเปลี่ยนในหัวข้อที่แล้วเป็นการเรียงสิ่งของเป็นเส้นตรง ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของเป็นวงปิด ซึ่งเรียกว่า การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม(circular permutation)

พิจารณาปัญหาการเรียงของ 3 ชิ้นที่ต่างกัน คือ a, b, c ลงในตำแหน่ง 3 ตำแหน่งบนเส้นรอบวงของวงกลม ให้ตำแหน่งทั้งสามมีหมายเลข 1, 2 และ 3 กำกับอยู่ ดังแสดงในรูป



จะเห็นว่าการเรียง a, b, c ในรูปข้างบนก็คือการเรียงสับเปลี่ยน

$$abc, cab, bca$$

ตามลำดับ ในกรณีเช่นนี้ การเรียงสับเปลี่ยนของเป็นวงกลมไม่มีอะไรแตกต่างจากการเรียงสับเปลี่ยนของเป็นเส้นตรง แต่การเรียงสับเปลี่ยนของเป็นวงกลมจะน่าสนใจในกรณีที่ไม่มีตัวเลขกำกับแต่ละตำแหน่งบนวงกลม นั่นคือ มีเพียงตำแหน่งสัมพัทธ์บนวงกลมเท่านั้นที่จะแยกแยะแต่ละตำแหน่งออกจากตำแหน่งอื่นๆ จึงเห็นได้จากรูปข้างบนว่าเมื่อไม่มีหมายเลขกำกับตำแหน่ง เราสามารถหมุนการเรียงสับเปลี่ยนวิธีใดวิธีหนึ่ง ให้ตรงกับอีก 2 วิธีที่เหลือได้ จึงกล่าวว่าการเรียงสับเปลี่ยนทั้ง 3 วิธีนั้นเหมือนกัน ในกรณีทั่วไป เมื่อเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของกลุ่มหนึ่งเป็นวงกลม เราจะกล่าวว่าการเรียงสับเปลี่ยนสองวิธีเหมือนกันเมื่อสามารถหมุนวิธีหนึ่งไปเป็นอีกวิธีหนึ่งได้

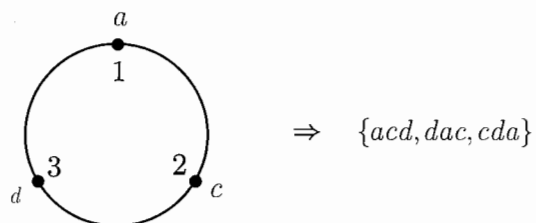
ให้ A เป็นเซตของของที่แตกต่างกัน n สิ่ง การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมที่ละ r สิ่ง (โดยที่ $0 \leq r \leq n$) ของเซต A คือการนำของ r สิ่งจากเซต A มาเรียงเป็นวงกลม ให้ Q_r^n เป็นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมที่ละ r สิ่งของเซต A เราจะหาสูตรสำหรับ Q_r^n โดยเริ่มต้นพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.3.1 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมทีละ 3 สิ่งของเซต A

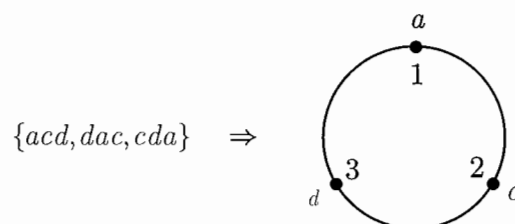
วิธีทำ จากตัวอย่าง 1.2.1 จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงทีละ 3 สิ่งของเซต A คือ 24 ซึ่งสามารถจัดเป็นกลุ่มได้ทั้งหมด 8 กลุ่ม แต่ละกลุ่มประกอบการเรียงสับเปลี่ยน 3 วิธี ดังตาราง

abc	cab	bca	acb	bac	cba
abd	dab	bda	adb	bad	dba
acd	dac	cda	adc	cad	dca
bcd	dbc	cdb	bdc	cdb	dcb

แต่ละวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมทีละ 3 สิ่งของเซต A จะแทนได้ด้วยกลุ่มหนึ่งในตาราง เช่น



ในนัยกลับ แต่ละกลุ่มแทนการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมทีละ 3 สิ่งของเซต A เพียงหนึ่งวิธี



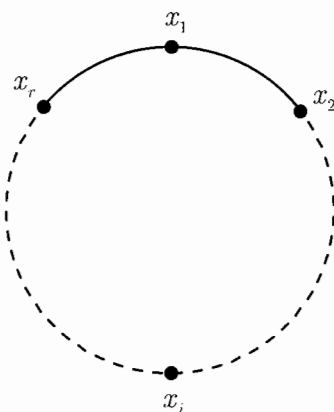
ดังนั้น

$$Q_3^4 = \frac{24}{3} = 8$$

■

จากตัวอย่าง 1.3.1 จะเห็นว่า $Q_3^4 = \frac{1}{3} P_3^4$ ในกรณีทั่วไป เราจะหาความสัมพันธ์ระหว่าง Q_r^n และ P_r^n ได้ดังนี้

พิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมทีละ r สิ่งของของ r สิ่งที่แตกต่างกัน ซึ่งสมมติว่าเป็น $x_1, x_2, \dots, x_r$



การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมดังแสดงในรูปจะทำให้การเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง r วิธีที่แตกต่างกัน ได้แก่

$$x_1 x_2 \cdots x_r, x_r x_1 x_2 \cdots x_{r-1}, \dots, x_2 x_3 \cdots x_r x_1$$

ซึ่งได้จากการหมุนการ $x_1 x_2 \cdots x_r$ ไปที่ละตำแหน่ง ในนัยกลับ ทุกการเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง r วิธีให้การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม 1 วิธีเท่านั้น

สรุปได้ว่า ทุกการเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรง r วิธี สมัยกับการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมหนึ่งวิธี ดังนั้น

$$Q_r^n = \frac{P_r^n}{r}$$

ในกรณีเฉพาะเมื่อ $r = n$ จะได้จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมของของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เท่ากับ

$$Q_n^n = \frac{P_n^n}{n} = (n-1)!$$

ตัวอย่าง 1.3.2 จัดผู้ชาย 5 คนและผู้หญิง 3 คนนั่งรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี ถ้า

1. ไม่มีเงื่อนไขใดๆ
2. มีหญิงชายคู่หนึ่งที่ไม่ต้องการนั่งติดกัน
3. ไม่มีผู้หญิงนั่งติดกัน

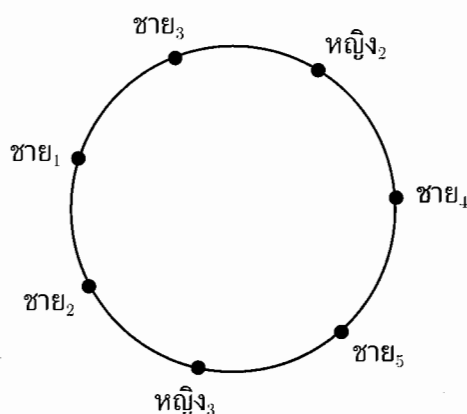
วิธีทำ

1. เมื่อไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม จึงจัดคน 8 คนนั่งรอบโต๊ะกลมได้ $Q_8^8 = 7!$ วิธี

2. ให้หญิงและชายคู่ที่ไม่ต้องการนั่งติดกันคือ ชาย₁ และหญิง₁

จัดผู้ชาย 5 คนและผู้หญิง 2 คน ยกเว้น หญิง₁ เข้านั่งรอบโต๊ะกลม ทำได้ $(7 - 1)! = 6!$ วิธี

พิจารณาการนั่งรอบโต๊ะกลมของทั้ง 7 คนวิธีหนึ่ง ดังรูป



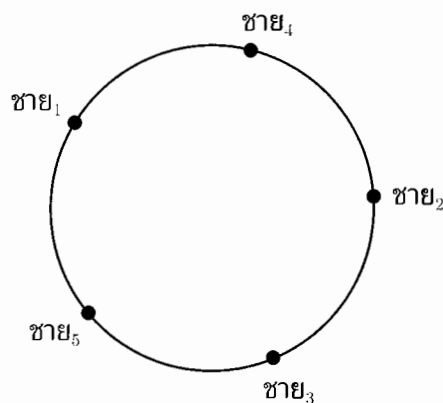
จะเห็นว่า มี 5 ตำแหน่งที่เมื่อ หญิง₁ เข้าไปแทรกแล้วจะไม่นั่งติดกับ ชาย₁

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนนั่งรอบโต๊ะกลมตามเงื่อนไขที่ต้องการเท่ากับ

$$6! \cdot 5 = 3600$$

3. จัดให้ผู้ชายทั้ง 5 นั่งรอบโต๊ะกลม ทำได้ $(5 - 1)! = 4!$ วิธี

พิจารณาการนั่งรอบโต๊ะกลมของผู้ชายทั้ง 5 คนวิธีหนึ่ง ดังรูป



จัดให้ผู้หญิงแต่ละคนเข้าไปแทรกตำแหน่งระหว่างผู้ชาย

ให้ หญิง₁ เลือกที่เข้าไปแทรกก่อนได้ 5 วิธี

จากนั้น หญิง₂ และหญิง₃ เลือกตำแหน่งเข้าไปนั่งแทรกได้ 4 และ 3 วิธี ตามลำดับ

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดคนนั่งรอบโต๊ะกลมตามเงื่อนไขที่ต้องการเท่ากับ

$$4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$$

■

ในตัวอย่าง 1.3.2 การจัดคนเข้าไปนั่งตามเงื่อนไขที่ 2 สามารถทำได้โดยอาศัย หลักคอมพลีเมนต์ ต่อไปนี้

หลักคอมพลีเมนต์ (Principle of Complementation)

ถ้า A เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์จำกัด U และ A' เป็นคอมพลีเมนต์(complement) ของเซต A แล้ว

$$|A'| = |U| - |A|$$

จำนวนวิธีจัดให้ผู้ชาย 5 คนและผู้หญิง 3 คนนั่งรอบโต๊ะกลมโดยมีเงื่อนไขว่า ชาย₁ นั่งติดกับ หญิง₁ (ถือเสมือนหนึ่งว่า ชาย₁ และหญิง₁ ผูกติดกันเป็นชิ้นเดียว) คือ

$$(7 - 1)! \cdot 2 = 1440$$

โดยหลักคอมพลีเมนต์ จำนวนวิธีจัดคนเข้าไปนั่ง โดย ชาย₁ นั่งไม่ติดกับ หญิง₁ คือ

$$7! - 1440 = 3600$$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงหาจำนวนวิธีในการจัดให้คู่สามีภรรยา n คู่ นั่งรอบโต๊ะกลม ตามเงื่อนไขในแต่ละกรณีต่อไปนี้

1. ผู้ชายนั่งสลับกับผู้หญิง
2. ผู้หญิงต้องนั่งติดกับสามีของตนเอง

วิธีทำ

1. จัดผู้ชาย n คนนั่งรอบโต๊ะกลม ได้ $(n-1)!$ วิธี
จากนั้นจัดให้ผู้หญิง n คนเข้าไปแทรกที่ว่าง n ที่ระหว่างผู้ชายได้ $n!$ วิธี
ดังนั้น จัดคู่สามีภรรยาทั้งหมดให้นั่งสลับชายหญิงได้ $(n-1)!n!$ วิธี
2. มองสามีภรรยาเป็นคู่ๆ ทั้งหมด n คู่ ที่ไม่แยกจากกัน
จัด n คู่เรียงรอบโต๊ะกลมได้ $(n-1)!$ วิธี
แต่ละคู่สลับตำแหน่งกันเองได้ภายในคู่ ได้คู่ละ $2!$ วิธี
ดังนั้น จัดคู่สามีภรรยาทั้งหมดให้ผู้หญิงนั่งติดกับสามีของตนเองได้ $(n-1)!2^n$ วิธี ■

ตัวอย่าง 1.3.4 มีลูกปัด n ลูกที่ต่างกัน เมื่อ $n \geq 3$ จงหาร้อยกำไลด้วยลูกปัดทั้งหมดได้กี่วิธี

วิธีทำ เรียงสับเปลี่ยนลูกปัด n ลูกเป็นวงกลมได้ $(n-1)!$ วิธี

แต่เนื่องจากกำไลพลิกได้ ทุก 2 วิธีในการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมให้การร้อยกำไลหนึ่งวิธี และในนัยกลับ วิธีการร้อยกำไลหนึ่งวิธีให้การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม 2 วิธี

ดังนั้น จัดนำลูกปัดมาร้อยกำไลได้ $\frac{(n-1)!}{2}$ วิธี ■

แบบฝึกหัด 1.3

1. จะจัดเด็ก 6 คน เข้าแถวเป็นวงกลมได้ต่างกันทั้งหมดกี่วิธี
2. มีเด็ก 10 คน จะจัดเข้าแถวเป็นวงกลมคราวละ 6 คน ได้แตกต่างกันกี่วิธี
3. เด็ก 10 คน จะจัดให้เข้าแถวเป็นวงกลม 2 วง โดยให้มีวงละ 6 คน กับวงละ 4 คน จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี
4. ดอกไม้ 5 สี ต่าง ๆ กัน จะนำมาร้อยพวงมาลัยโดยใช้ดอกไม้ทั้ง 5 สี ได้กี่วิธี
5. จะจัดคน 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลมตัวหนึ่งได้กี่วิธี ถ้า
 - 5.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 5.2 มีคน 2 คน ที่ต้องนั่งติดกันเสมอ
 - 5.3 มีคน 2 คน ที่ต้องนั่งแยกกันหมด
 - 5.4 มีคน 2 คน ต้องนั่งตรงข้ามกันเสมอ
6. สามภรรยา 6 คู่ นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลมได้กี่วิธี ถ้า
 - 6.1 ชายและหญิงนั่งสลับกันทีละคน
 - 6.2 ชายและหญิงนั่งสลับกันทีละ 2 คน
 - 6.3 ชายและหญิงนั่งสลับกันทีละ 3 คน
 - 6.4 สามภรรยาคู่หนึ่งต้องนั่งติดกันเสมอ
 - 6.5 สามภรรยาคู่หนึ่งต้องนั่งแยกกันเสมอ
 - 6.6 หญิงนั่งติดกันหมด
 - 6.7 หญิงนั่งแยกกันหมด
 - 6.8 มีสามภรรยา 2 คู่ ที่ต้องนั่งติดกับคู่ของตัวเองเสมอ
 - 6.9 สามภรรยาทุกคู่ต้องนั่งติดกันเสมอ
 - 6.10 มีชายอยู่ 3 คน ต้องนั่งแยกกันเสมอ
 - 6.11 มีสามภรรยาคู่หนึ่งต้องนั่งตรงข้ามกันเสมอ
 - 6.12 สามภรรยาทุกคู่ต้องนั่งตรงข้ามกันเสมอ
 - 6.13 ชายและหญิงนั่งสลับกันคนต่อคน และมีสามภรรยาคู่หนึ่งนั่งติดกันเสมอ
 - 6.14 ชายและหญิงนั่งสลับกันคนต่อคน และมีสามภรรยาคู่หนึ่งนั่งแยกกันเสมอ
 - 6.15 ชายและหญิงนั่งสลับกันทุก 2 คน และมีสามภรรยาคู่หนึ่งต้องนั่งติดกันเสมอ
 - 6.16 ชายและหญิงนั่งสลับกันคนต่อคน และสามภรรยาทุกคู่ต้องนั่งติดกันเสมอ
 - 6.17 ชายและหญิงนั่งสลับกันทุก 2 คน และสามภรรยาทุกคู่ต้องนั่งติดกันเสมอ
 - 6.18 ไม่มีสามภรรยาคู่ใดนั่งติดกับคู่ตัวเองเลย

7. ชาย 3 คน หญิง 4 คน นั่งรอบโต๊ะกลมเพื่อรับประทานอาหารรวมกันได้กี่วิธี ถ้า
 - 7.1 ชายนั่งติดกันหมด
 - 7.2 ชายนั่งแยกกันหมด
 - 7.3 ชายนั่งติดกันหมด และหญิงนั่งติดกันหมด
8. มีสามีภรรยา 4 คู่ นั่งรอบโต๊ะกลม โดยให้ชายหญิงนั่งสลับกัน และไม่มีสามีภรรยาคู่ใดนั่งติดกัน จะนั่งได้กี่วิธี
9. มีครอบครัว 4 ครอบครัว แต่ละครอบครัวมี พ่อ แม่ และลูก 1 คน ถ้าเชิญทุกคนมารับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม จะมีวิธีนั่งที่แตกต่างกันกี่วิธี ถ้า
 - 9.1 พ่อบ้านทั้ง 4 คน นั่งติดกัน และแม่บ้านทั้ง 4 คน นั่งติดกัน
 - 9.2 พ่อบ้านทั้ง 4 คน นั่งติดกัน และแม่บ้านทั้ง 4 คน นั่งแยกกัน
 - 9.3 แต่ละครอบครัวอยู่ติดกัน และลูกนั่งตรงกลางระหว่างพ่อกับแม่
10. มีลูกแก้ว 7 ลูก ซึ่งมีสีต่างกันหมด โดยมีสีแดง สีขาว สีน้ำเงิน และสีอื่นๆ จงหาจำนวนวิธีที่จะเรียงลูกแก้วเป็นวงกลม โดยให้ลูกแก้วสีแดงและสีขาวอยู่เรียงติดกัน แต่ลูกแก้วสีแดงไม่ติดกับลูกแก้วสีน้ำเงิน
11. ต้องการจัดอักษร A, A, A, B, B, C เป็นวงกลม จะมีวิธีจัดกี่วิธี ถ้า
 - 11.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 11.2 อักษรที่ซ้ำอยู่ติดกัน
 - 11.3 อักษร A อยู่ติดกัน
 - 11.4 อักษร B แยกกันหมด
12. ต้องการจัดอักษร A, A, B, B, B, B เป็นวงกลม จะมีวิธีจัดกี่วิธี
13. ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่งมีคน 25 คน นั่งรอบโต๊ะกลมใหญ่ ต้องการเรียกคน 3 คน จากโต๊ะนี้ออกมาเพื่อร้องเพลงบนเวที จะมีกี่วิธีที่อย่างน้อย 2 คน ที่เรียกออกมาจะเป็นคนที่นั่งติดกัน

1.4 การจัดหมู่

ให้ A เป็นเซตของของ n สิ่งที่แตกต่างกัน การจัดหมู่(combination) ของเซต A กล่าวได้ง่ายๆ ว่าเป็นเซตย่อยของเซต A กล่าวให้ชัดขึ้นคือ สำหรับจำนวนเต็ม r ซึ่ง $0 \leq r \leq n$ การจัดหมู่ทีละ r สิ่งของเซต A เป็นการเลือกเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัวจากเซต A ตัวอย่างเช่น ถ้า $A = \{a, b, c, d\}$ แล้วการจัดหมู่ทีละ 3 สิ่งของเซต A มีวิธีที่เป็นไปได้ดังต่อไปนี้

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$$

ซึ่งทำได้ทั้งหมด 4 วิธี ให้ C_r^n หรือ $\binom{n}{r}$ (อ่านว่า n เลือก r) เป็นจำนวนวิธีในการจัดหมู่ทีละ r สิ่งของเซต A ที่มีสมาชิกต่างกัน n ตัว จากตัวอย่างที่แสดงให้เห็น จะได้ $C_3^4 = \binom{4}{3} = 4$ ต่อไปเราจะหาสูตรสำหรับ C_r^n

ข้อแตกต่างระหว่างการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่คือ การเรียงสับเปลี่ยนเป็นการนำของมาเรียง ลำดับจึงมีความสำคัญ ในขณะที่การจัดหมู่เป็นเพียงเซตของสิ่งของเท่านั้น ลำดับจึงไม่มีความสำคัญ ในความเป็นจริงแล้ว การเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่งของเซต A ทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 สร้างการจัดหมู่ทีละ r สิ่งทั้งหมดของเซต A

ขั้นที่ 2 เรียงสับเปลี่ยนของ r นั้นเป็นเส้นตรง

ขั้นที่ 1 ทำได้ C_r^n วิธี และขั้นที่ 2 ทำได้ $r!$ วิธี โดยหลักการคูณ จึงได้

$$P_r^n = C_r^n \cdot r!$$

ดังนั้น

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

สังเกตว่า

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = C_{n-r}^n$$

ดังนั้น

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

ตัวอย่างค่า $\binom{n}{r}$ เมื่อ $0 \leq r \leq n$ และ $n \leq 9$ แสดงในตารางต่อไปนี้

n	r									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

จากตาราง จะสังเกตเห็นว่า $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = 56 + 70 = 126 = \binom{9}{4}$ ซึ่งสามารถพิสูจน์เป็นกรณีทั่วไปได้
ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.4.1 จงพิสูจน์ว่า $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ เมื่อ $n, r \in \mathbb{N}$ และ $r \leq n$

บทพิสูจน์เชิงพีชคณิต

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} \\
 &= \frac{(n-1)!r + (n-1)!(n-r)}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{(n-1)!(r+n-r)}{r!(n-r)!} \\
 &= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}
 \end{aligned}$$

บทพิสูจน์เชิงการนับ

ให้ $A = \{1, 2, \dots, n\}$ และให้ S เป็นการจับหมู่ทีละ r สิ่งของเซต A จึงมีเซต S ได้ $\binom{n}{r}$ วิธี

เราจะนับจำนวนวิธีในการจับหมู่ในอีกวิธีหนึ่ง โดยพิจารณาว่าเซต S จะต้องมี 1 หรือไม่มี 1

กรณี $1 \in S$ ต้องจับหมู่ทีละ $r-1$ สิ่งจากสมาชิกอีก $n-1$ ตัวที่เหลือ ทำได้ $\binom{n-1}{r-1}$ วิธี

กรณี $1 \notin S$ ต้องจับหมู่ทีละ r สิ่งจากสมาชิกอีก $n-1$ ตัวที่เหลือ ทำได้ $\binom{n-1}{r}$ วิธี

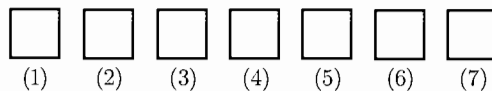
โดยหลักการบวก จึงได้

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

■

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาจำนวนเลขฐานสองที่มี 7 หลักและประกอบด้วยเลข 0 จำนวน 3 ตัว และเลข 1 จำนวน 4 ตัว

วิธีทำ พิจารณาเลขฐานสองที่มี 7 หลัก ซึ่งมี 7 ตำแหน่ง



เลือก 3 ตำแหน่งจาก 7 ตำแหน่งสำหรับเลข 0 ดังนั้น ตำแหน่งที่เหลือต้องเป็นเลข 1 เท่านั้น

เลือกตำแหน่งสำหรับเลข 0 ได้ $\binom{7}{3}$ วิธี และหลังจากนั้นเลือกตำแหน่งสำหรับเลข 1 ได้ $\binom{4}{4}$ วิธี

ดังนั้น มีเลขฐานสองที่ต้องการอยู่ $\binom{7}{3}\binom{4}{4} = 35$ จำนวน

■

ข้อสังเกต ถ้าเลือก 4 ตำแหน่งจาก 7 ตำแหน่งสำหรับเลข 1 ก่อน จะได้คำตอบเป็น $\binom{7}{4} = 35$ เท่าเดิม

ตัวอย่าง 1.4.8 ต้องการเลือกคณะกรรมการที่มีสมาชิก 5 คนจากคนทั้งหมด 11 คนที่ประกอบด้วยครู 4 คนและนักเรียน 7 คน จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า

1. ไม่มีเงื่อนไขใดๆ ในการเลือก
2. คณะกรรมการต้องมีครู 2 คนพอดี
3. คณะกรรมการต้องมีครูอย่างน้อย 3 คน
4. มีครูและนักเรียนอยู่คู่หนึ่งที่ไม่ต้องการอยู่ในคณะกรรมการด้วยกัน

วิธีทำ

1. เลือกคน 5 คนจาก 11 คนทำได้ $\binom{11}{5} = \frac{11!}{5!6!} = 462$ วิธี
2. ขั้นแรกเลือกครู 2 คนจาก 4 คน แล้วเลือกนักเรียน 3 คนจาก 7 คน
จึงเลือกได้ทั้งหมด $\binom{4}{2}\binom{7}{3} = 6 \cdot 35 = 210$ วิธี
3. มีสองกรณีที่ไม่เกิดร่วมกันคือ กรณีมีครู 3 คนและกรณีมีครู 4 คนอยู่ในคณะกรรมการ

กรณีมีครู 3 คน ต้องมีนักเรียน 2 คน เลือกได้ $\binom{4}{3}\binom{7}{2} = 4 \cdot 21 = 84$ วิธี

กรณีมีครู 4 คน ต้องมีนักเรียน 1 คน เลือกได้ $\binom{4}{4}\binom{7}{1} = 1 \cdot 7 = 7$ วิธี

โดยหลักการบวก จึงเลือกคณะกรรมการให้มีครูอย่างน้อย 3 คน ได้ $84 + 7 = 91$ วิธี

4. ให้ครูและนักเรียนคู่หนึ่งคือ ครู₁ และ นร₁ เราจะใช้หลักคอมพลีเมนต์
โดยนับวิธีเลือกคณะกรรมการโดยมีทั้ง ครู₁ และ นร₁ อยู่ในคณะกรรมการก่อน
เมื่อเลือกทั้ง ครู₁ และ นร₁ แล้ว จะต้องเลือกอีก 3 คนจาก 9 คนที่เหลือ ซึ่งทำได้ $\binom{9}{3}$ วิธี
แต่จากข้อ (1) เลือกคณะกรรมการโดยไม่มีเงื่อนไขใดๆ ได้ $\binom{11}{5}$ วิธี

โดยหลักคอมพลีเมนต์ จึงเลือกคณะกรรมการได้ $\binom{11}{5} - \binom{9}{3} = 462 - 84 = 378$ วิธี

■

สมมติว่ามีนักเทนนิส 8 คนคือ a, b, c, d, e, f, g, h เข้าแข่งกันในรายการเทนนิสชิงแชมป์โลก ในรอบแรกของการแข่งขัน ได้แบ่งผู้เล่นออกเป็น 4 คู่ ซึ่งมีวิธีการแบ่งได้หลายวิธี เช่น

1. a แข่งกับ b , c แข่งกับ f , d แข่งกับ h , e แข่งกับ g

หรือ 2. a แข่งกับ h , b แข่งกับ g , c แข่งกับ f , d แข่งกับ e

จะมีวิธีการแบ่งคู่นักเทนนิสได้ทั้งหมดกี่วิธี

ในเชิงคณิตศาสตร์ เราสนใจเซต A ที่มีสมาชิก $2n$ ตัวต่างกัน การจับคู่ในเซต A คือการแบ่ง A ออกเป็นเซตย่อย n เซต ที่มีสมาชิกเซตละ 2 ตัว ในตัวอย่างการแบ่งกลุ่มนักเทนนิส 8 คนข้างต้น เขียนในรูปเซตได้ดังนี้

$$\{\{a, b\}, \{c, f\}, \{d, h\}, \{e, g\}\}$$

$$\text{และ } \{\{a, h\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{d, e\}\}$$

เป็นการจับคู่ที่ต่างกันของเซต A สังเกตว่าลำดับของเซตย่อยและลำดับของสมาชิก 2 ตัวในแต่ละเซตย่อยไม่มีความสำคัญ

ตัวอย่าง 1.4.4 ให้ A เป็นเซตที่มีสมาชิก $2n$ ตัว โดยที่ $n \geq 1$ จงหาว่ามีการจับคู่เซต A ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ เราจะแสดงการแก้ปัญหาด้วยวิธีที่แตกต่างกัน 3 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 ให้ผู้เล่นคนหนึ่งเลือกคู่เล่น ทำได้ $2n - 1$ วิธี

ให้ผู้เล่นอีกคนหนึ่งจากที่เหลือเลือกคู่เล่น ทำได้ $2n - 3$ วิธี

และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนหมดผู้เล่น

โดยหลักการคูณ จะได้จำนวนวิธีการจับคู่เซต A ทั้งหมดเท่ากับ

$$(2n - 1)(2n - 3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$$

วิธีที่ 2 เลือกผู้เล่น 2 คนจาก $2n$ คนมาเข้าคู่เล่นเทนนิส ทำได้ $\binom{2n}{2}$ วิธี

เลือกผู้เล่น 2 คนจาก $2n - 2$ คนมาเข้าคู่เล่นเทนนิส ทำได้ $\binom{2n-2}{2}$ วิธี

และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนหมดผู้เล่น

โดยหลักการคูณ จะได้จำนวนเลือกผู้เล่นมาเป็นคู่ๆ อย่างมีลำดับเท่ากับ

$$\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{4}{2} \binom{2}{2}$$

แต่ลำดับในการเลือกคู่ผู้เล่นไม่มีความสำคัญ จึงเหลือจำนวนวิธีการจับคู่เซต A ทั้งหมดเท่ากับ

$$\frac{1}{n!} \binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \cdots \binom{4}{2} \binom{2}{2}$$

วิธีที่ 3 เรียงผู้เล่นทั้ง $2n$ คนเป็นแถวตรง ทำได้ $(2n)!$ วิธี

ให้ผู้เล่น 2 คนแรกจากทางซ้ายเป็นคู่เล่นคู่ที่หนึ่ง

ให้ผู้เล่น 2 คนถัดไปเป็นคู่เล่นคู่ที่สอง

และทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนหมดผู้เล่น

แต่เนื่องจากลำดับของผู้เล่นทั้งสองในคู่เดียวกันไม่มีความสำคัญ และลำดับระหว่างคู่อีกไม่มีความสำคัญ เช่นกัน

จึงได้จำนวนวิธีการจับคู่เซต A ทั้งหมดเท่ากับ

$$\frac{(2n)!}{\underbrace{(2!2!\cdots 2!)_n} n!} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$$

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่าคำตอบจากทั้ง 3 วิธีมีค่าเท่ากัน ■

ปัญหาในตัวอย่าง 1.4.4 สามารถขยายเป็นนัยทั่วไปได้โดยพิจารณาเซต A ที่มีสมาชิกต่างกัน kn ตัว โดยที่ $k, n \in \mathbb{N}$ การจับกลุ่มทีละ k ของเซต A คือการแบ่งเซต A ออกเป็นเซตย่อยที่มีสมาชิกเซตละ k ตัว จำนวนวิธีในการจับกลุ่มทีละ k ของเซต A เป็นเท่าไร

ตัวอย่าง 1.4.5 (IMO 1989) ให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกและให้ S เป็นเซตของจุด n จุดในระนาบ ซึ่ง

(1) ไม่มี 3 จุดใดใน S อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน

(2) สำหรับแต่ละจุด P ใน S จะมีอย่างน้อย k จุดใน S ที่อยู่ห่างจากจุด P เป็นระยะเท่า ๆ กัน

จงพิสูจน์ว่า $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$

วิธีทำ ลากเส้นเชื่อมระหว่างสองจุดใดๆ ในเซต S

เนื่องจากมีทั้งหมด n จุด จึงมีเส้นทั้งหมด $\binom{n}{2}$ เส้น

สำหรับแต่ละจุด P ในเซต S สามารถเขียนวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด P และมีอย่างน้อย k จุดในเซต S อยู่บนเส้นรอบวงได้ ซึ่งมีเส้นเชื่อมระหว่าง 2 จุดใดๆ ใน k จุดนี้อยู่อย่างน้อย $\binom{k}{2}$ เส้น

แต่เนื่องจากมีจุด P ดังกล่าวได้ n จุด จึงมีเส้นได้อย่างน้อย $n\binom{k}{2}$ เส้น ซึ่งอาจมีการนับเส้นซ้ำ

การนับเส้นซ้ำเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อเส้นนั้นเป็นคอร์ตร่วมของวงกลมอย่างน้อย 2 วง

เนื่องจากวงกลมสองวงมีคอร์ตร่วมได้อย่างมากเส้นเดียว และมีวงกลมทั้งหมด n วง

จึงมีคอร์ตร่วมได้อย่างมาก $\binom{n}{2}$ เส้น ดังนั้น

$$n\binom{k}{2} - \binom{n}{2} \leq \binom{n}{2}$$

$$n\binom{k}{2} \leq 2\binom{n}{2}$$

ซึ่งจะได้

$$k^2 - k - 2(n-1) \leq 0$$

ดังนั้น

$$k \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 8(n-1)}}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{8n} = \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

ตามต้องการ ■

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาการเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม ซึ่งเป็นการเรียงของบนเส้นรอบวงของวงกลม ในตัวอย่างต่อไปนี้จะขยายการเรียงสับเปลี่ยนดังกล่าวบนวงกลมมากกว่า 1 วง

ตัวอย่าง 1.4.6 จงหาจำนวนวิธีในการจัดคน 6 คนเข้านั่งรอบโต๊ะกลมจำนวนหนึ่ง โดยแต่ละโต๊ะต้องมีคนนั่งอย่างน้อย 1 คน เมื่อ

1. มีโต๊ะ 2 ตัว
2. มีโต๊ะ 3 ตัว

วิธีทำ

1. เมื่อมี 2 โต๊ะ และแต่ละโต๊ะต้องมีอย่างน้อย 1 คน แบ่งกรณีตามจำนวนคนที่นั่งในแต่ละโต๊ะได้ 3 กรณี คือ $5+1$, $4+2$ และ $3+3$

กรณี $5 + 1$ มีวิธีแบ่งคน 6 คนเป็น 2 กลุ่มที่มีสมาชิก 5 และ 1 คนตามลำดับได้ $\binom{6}{5}$ วิธี

จัดคน 5 คนเข้านั่งรอบโต๊ะกลมได้ $(5 - 1)!$ วิธี และจัดคน 1 คนนั่งรอบโต๊ะกลมได้ $(1 - 1)!$ วิธี

ในกรณีนี้ จึงจัดคนเข้านั่งได้ $\binom{6}{5} 4! 0! = 144$ วิธี

กรณี $4 + 2$ มีวิธีแบ่งคน 6 คนเป็น 2 กลุ่มที่มีสมาชิก 4 และ 2 คนตามลำดับได้ $\binom{6}{4}$ วิธี

ในกรณีนี้ จึงจัดคนเข้านั่งได้ $\binom{6}{4} 3! 1! = 90$ วิธี

กรณี $3 + 3$ กรณีนี้ต้องระวังเป็นพิเศษ เพราะจำนวนวิธีในการแบ่งคน 6 คนออกเป็น 2 กลุ่มที่มีสมาชิกกลุ่มละ 3 คนตามลำดับได้ $\frac{1}{2} \binom{6}{3}$ วิธี

ในกรณีนี้ จึงจัดคนเข้านั่งได้ $\frac{1}{2} \binom{6}{3} 2! 2! = 40$ วิธี

โดยหลักการบวก จำนวนวิธีจัดคนเข้านั่งคือ $144 + 90 + 40 = 274$ วิธี

2. เมื่อมี 3 โต๊ะ และแต่ละโต๊ะต้องมีอย่างน้อย 1 คน แบ่งกรณีตามจำนวนคนที่นั่งในแต่ละโต๊ะได้ 3 กรณี เช่นกัน คือ $4 + 1 + 1$, $3 + 2 + 1$ และ $2 + 2 + 2$

จำนวนจัดคนเข้านั่งโต๊ะในแต่ละกรณีคือ

กรณี $4 + 1 + 1$ จัดคนเข้านั่งได้ $\frac{1}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{3} 3! 0! 0! = 90$

กรณี $3 + 2 + 1$ จัดคนเข้านั่งได้ $\binom{6}{3} \binom{3}{2} 2! 1! 1! = 120$

กรณี $2 + 2 + 2$ จัดคนเข้านั่งได้ $\frac{1}{3!} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2} 1! 1! 1! = 15$

โดยหลักการบวก จำนวนวิธีจัดคนเข้านั่งคือ $90 + 120 + 15 = 225$ วิธี ■

สำหรับจำนวนเต็ม r และ n ซึ่ง $0 \leq n \leq r$ ให้ $s(r, n)$ เป็นจำนวนวิธีจัดคน r คนเข้านั่งรอบโต๊ะกลม n ตัวที่เหมือนกัน โดยโต๊ะแต่ละตัวต้องมีคนนั่งอย่างน้อย 1 คน $s(r, n)$ เรียกว่า จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่หนึ่ง (Stirling numbers of the first kind) ตามชื่อของ เจมส์ สเตอร์ลิง (ค.ศ. 1696-1770) จากตัวอย่าง 1.4.6 เราได้เห็นแล้วว่า $s(6, 2) = 274$ และ $s(6, 3) = 225$ ผลต่อไปนี้เป็นกรณีเฉพาะที่เห็นได้ชัด

$$\begin{aligned}
 s(r, 0) &= 0 && \text{เมื่อ } r \geq 1 \\
 s(r, r) &= 1 && \text{เมื่อ } r \geq 1 \\
 s(r, 1) &= (r-1)! && \text{เมื่อ } r \geq 2 \\
 s(r, r-1) &= \binom{r}{2} && \text{เมื่อ } r \geq 2
 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.4.5 จงแสดงว่า $s(r, n) = s(r-1, n-1) + (r-1)s(r-1, n)$ เมื่อ $r, n \in \mathbb{N}$ และ $n \leq r$
 สูตรดังกล่าวช่วยให้เราคำนวณ $s(r, n)$ ได้จากกรณีที่ r และ n มีค่าน้อยกว่า

วิธีทำ เพื่อความสะดวก ให้คน r คนแทนด้วย $1, 2, \dots, r$

พิจารณาคนที่ 1 มีสองกรณีที่ไม่เกิดร่วมกันคือ คนที่ 1 นั่งคนเดียว และคนที่ 1 นั่งรวมกับคนอื่น

กรณีคนที่ 1 นั่งคนเดียว จัด $r-1$ คนที่เหลือนั่งรอบโต๊ะ $n-1$ ตัว ทำได้ $s(r-1, n-1)$ วิธี

กรณีคนที่ 1 นั่งรวมกับคนอื่น จัด $r-1$ คนที่เหลือให้นั่งรอบโต๊ะ n ตัวก่อน ทำได้ $s(r-1, n)$ วิธี

จากนั้นจัดให้คนที่ 1 เลือกนั่งอยู่ด้านขวาของใครคนใดคนหนึ่ง ใน $r-1$ คน ได้ $r-1$ วิธี

ในกรณีนี้ จึงจัดคนเข้านั่งได้ $(r-1)s(r-1, n)$ วิธี

โดยหลักการบวก จึงได้ $s(r, n) = s(r-1, n-1) + (r-1)s(r-1, n)$ ■

โดยอาศัยค่าเริ่มต้น $s(0, 0) = 1, s(r, 0) = 0$ เมื่อ $r \geq 1$ และ $s(r, 1) = (r-1)!$ เมื่อ $r \geq 1$ พร้อมทั้งเอกลักษณ์ในตัวอย่าง 1.4.6 จะสามารถคำนวณค่า $s(r, n)$ ได้ ดังตัวอย่างในตารางข้างล่าง

r	n									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

แบบฝึกหัด 1.4

1. มีข้อสอบ 8 ข้อ จะเลือกทำเพียง 6 ข้อ ได้ทั้งหมดกี่วิธี
2. ทหารหมู่หนึ่งมี 20 นาย ทุกคืนจะจัดยามไว้เฝ้า 3 นาย ถ้าต้องการให้ยามในแต่ละคืนเป็นคนละชุดกัน จะจัดได้มากที่สุดกี่คืน และทหารแต่ละคนจะยืนยามทั้งหมดกี่คืน
3. ไฟล์รับหนึ่งมี 52 ใบ สุ่มหยิบมา 2 ใบ จงหาจำนวนวิธีที่
 - 3.1 หยิบได้ K ทั้งคู่
 - 3.2 หยิบได้โพแดงทั้งคู่
 - 3.3 หยิบได้ K และ Q อย่างละ 1 ใบ
4. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 3 ลูกต่างกัน สีเขียว 3 ลูกต่างกัน และสีน้ำเงิน 2 ลูกต่างกัน หยิบออกมา 4 ลูก จงหาจำนวนวิธีที่จะได้
 - 4.1 สีแดง 2 ลูก สีเขียว 1 ลูก สีน้ำเงิน 1 ลูก
 - 4.2 ต้องได้สีแดงอย่างน้อย 1 ลูก
 - 4.3 ไม่ได้สีน้ำเงินเลย
5. นักเรียนห้องหนึ่งมี 18 คน เป็นชาย 10 คน หญิง 8 คน จะเลือกกรรมการห้อง 5 คน ได้กี่วิธี ถ้าต้อง
 - 5.1 เป็นชาย 3 คน
 - 5.2 เป็นชายอย่างน้อย 1 คน
 - 5.3 เป็นชายอย่างมาก 3 คน
6. มีข้อสอบ 10 ข้อ ให้เลือกตอบ 8 ข้อ ถ้านาย ก สอบวิชานี้ นาย ก จะมีวิธีเลือกทำข้อสอบทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 6.1 เลือกทำข้อใดก็ได้
 - 6.2 ต้องทำ 3 ข้อแรก
 - 6.3 ต้องทำอย่างน้อย 4 ข้อ จาก 5 ข้อแรก
7. ในชมรมส่งเสริมศีลธรรม มีสมาชิกเป็นพ่อบ้าน 4 คน แม่บ้าน 2 คน และเยาวชน 5 คน ต้องการเลือกกรรมการชุดหนึ่งที่มี 3 คน โดยจะต้องมีเยาวชนอย่างน้อย 1 คน จะเลือกได้กี่วิธี
8. คณะกรรมการสภานักเรียน ประกอบด้วยตัวแทนจากนักเรียนชั้น ม.1 – ม.6 ชั้นละ 3 คน ต้องการเลือกประธาน 1 ตำแหน่ง รองประธาน 2 ตำแหน่ง และกรรมการ 3 ตำแหน่ง โดยมีเงื่อนไขว่าประธานต้องเป็นนักเรียนชั้น ม.6 ส่วนรองประธานต้องเป็นนักเรียน ม.ปลาย จะเลือกได้กี่ชุดที่แตกต่างกัน

9. หยิบไพ่ 3 ใบ ออกจากไพ่อันดับหนึ่ง จงหาจำนวนวิธีที่จะได้
 - 9.1 ไพ่ทั้ง 3 ใบ มีดอกต่างกัน
 - 9.2 ไพ่ทั้ง 3 ใบ มีแต้มต่างกัน
 - 9.3 ไพ่ทั้ง 3 ใบ มีแต้มเหมือนกัน
10. ชายคนหนึ่งมีเพื่อน 8 คน ซึ่งรวมนาย ก และนาย ข ด้วย เขาต้องการเชิญเพื่อน 5 คน มางานเลี้ยงที่บ้าน เขาจะเชิญได้กี่วิธี ถ้า
 - 10.1 ต้องให้นาย ก และนาย ข มาด้วย
 - 10.2 นาย ก และนาย ข ไม่ยอมมาพร้อมกัน
11. มีคน 10 คน มีห้อง 2 ห้อง ห้องหนึ่งเป็นห้องแอร์ ส่วนอีกห้องเป็นห้องพัดลม แต่ละห้องพักได้ 5 คน จะจัดคนทั้งสิบเข้าพักในห้องได้กี่วิธี ถ้ามี 3 คน ไม่นอนห้องพัดลม และ 1 คน ไม่นอนห้องแอร์
12. มีสามีภรรยา 5 คู่ ถ้าต้องการเลือกออกมา 4 คน จะทำได้กี่วิธี เมื่อต้องการให้
 - 12.1 เป็นชาย 2 คน หญิง 2 คน
 - 12.2 ทั้ง 4 คน ไม่มีคู่สามีภรรยากันเลย
 - 12.3 เป็นคู่สามีภรรยากัน 1 คู่
 - 12.4 เป็นคู่สามีภรรยากันอย่างน้อย 1 คู่
13. สมชายมีหนังสือคณิตศาสตร์ 7 เล่ม สมศรีมีหนังสือเคมี 5 เล่ม ทั้ง 2 คนจะแลกเปลี่ยนหนังสือกันอ่านได้กี่วิธี ถ้าหลังจากแลกเปลี่ยนแล้วทั้ง 2 คน ยังมีหนังสือเท่าเดิม
14. บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง มีจุดที่แตกต่างกัน 8 จุด ถ้าลากคอร์ดเชื่อมจุดทั้ง 8 จุด จงหา
 - 14.1 จำนวนคอร์ดทั้งหมด
 - 14.2 จำนวนสามเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด
 - 14.3 จำนวนรูปเหลี่ยมทั้งหมดที่มีจุดเหล่านี้เป็นจุดยอด
 - 14.4 จำนวนจุดตัดที่มากที่สุดของคอร์ด (ถือว่าไม่มีคอร์ด 3 เส้นใดตัดกันที่จุด ๆ เดียว)
 - 14.5 จำนวนอาณาบริเวณที่ถูกแบ่งด้วยคอร์ดทั้งหมด
15. จงหาจำนวนเส้นทแยงมุมของรูป n เหลี่ยม
16. มีวงกลม 5 วง เส้นตรง 4 เส้น ตัดกันได้มากที่สุดกี่จุด
17. มีจุด 9 จุด บนระนาบ ในจำนวนนี้มี 5 จุด อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน
 - 17.1 จะลากเส้นตรงเชื่อมระหว่าง 2 จุดใด ๆ ได้ทั้งหมดกี่เส้น
 - 17.2 จะสร้างสามเหลี่ยมได้ทั้งหมดกี่รูป

18. มีจุด 16 จุด 8 จุดเป็นจุดยอดของรูป 8 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ส่วนอีก 8 จุดเป็นจุดกึ่งกลางของด้านทั้งแปด จงหาจำนวนเส้นตรงที่เกิดจากการลากเส้นเชื่อมจุดเหล่านี้
19. ในรูป 10 เหลี่ยม ถ้าต้องการโยงจุดมุมเหล่านี้ทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยม จะได้สามเหลี่ยมทั้งหมดกี่รูป ถ้า
 - 19.1 จุดมุมของสามเหลี่ยมเป็นจุดใดก็ได้ใน 10 จุดนี้
 - 19.2 สามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นต้องมีด้านซ้ำกันกับด้านของรูป 10 เหลี่ยม 1 ด้าน
 - 19.3 สามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นต้องมีด้านซ้ำกันกับด้านของรูป 10 เหลี่ยม 2 ด้าน
 - 19.4 สามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นต้องไม่มีด้านใดซ้ำกับด้านของรูป 10 เหลี่ยม
20. จะเลือกตัวอักษร 4 ตัว จากคำว่า SAPHIRE มาสร้างเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายได้กี่คำ ถ้า
 - 20.1 คำนั้นต้องไม่มี R
 - 20.2 คำนั้นต้องมี R
 - 20.3 คำนั้นต้องขึ้นต้นด้วย S
 - 20.4 คำนั้นต้องมีพยัญชนะ 2 ตัว และสระ 2 ตัว
21. มีนักเรียน 7 คน ซึ่งรวม ก และ ข ด้วย ต้องการจัดเข้าแถวหน้ากระดานคราวละ 5 คน จะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้ามีเงื่อนไขว่า
 - 21.1 ต้องมี ก
 - 21.2 ต้องมี ก แต่ไม่มี ข
 - 21.3 ถ้ามี ก ต้องไม่มี ข
 - 21.4 ต้องมี ก หรือ ข คนใดคนหนึ่งเท่านั้น
22. มีคน 10 คน ในจำนวนนี้มี นาย A, B, C, D รวมอยู่ด้วย ถ้าให้คนทั้ง 10 คน มานั่งเรียงเป็นแถวยาว จะมีวิธีการนั่งที่แตกต่างกันกี่วิธี ถ้าต้องการให้ ในจำนวน 4 คน ดังกล่าว มีคนนั่งติดกันเพียง 2 คนเท่านั้น
23. มีคน 10 คน เป็นชาย 5 คน หญิง 5 คน เลือกมายืนเข้าแถวหน้าห้องเพียง 7 คน ได้กี่วิธี ถ้า
 - 23.1 ชายทุกคนยืนติดกันหมด
 - 23.2 ชายทุกคนยืนแยกกันหมด
24. ในการสัมภาษณ์ผู้สมัครเข้าทำงาน มีผู้สมัครเป็นชาย 5 คน หญิง 5 คน ถ้าผู้สัมภาษณ์ตัดสินใจเรียกผู้สมัครมาสัมภาษณ์เพียง 5 คน โดยเลือกชาย 3 คน และหญิง 2 คน จากผู้สมัครทั้งหมดโดยการสุ่ม จงหาจำนวนวิธีในการจัดลำดับผู้สมัครสอบสัมภาษณ์โดยให้ผู้สมัครที่เป็นชายเข้าสอบติดต่อกัน
25. สร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก โดยใช้เลข 0 – 9 ได้กี่จำนวน ถ้าต้องการให้

$$\text{เลขหลักหน่วย} < \text{เลขหลักสิบ} < \text{เลขหลักร้อย}$$
26. มีสลาก 10 ใบ มีหมายเลขตั้งแต่ 3 – 12 สลากละ 1 หมายเลข สุ่มหยิบขึ้นมา 4 ใบ จงหาจำนวนวิธีที่จะได้หมายเลขที่หารด้วย 2 ลงตัว 2 ใบ และหารด้วย 3 ลงตัว 2 ใบ

1.5 หลักหนึ่งต่อหนึ่งและหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

สมมติว่ามีนักเรียน n คนเข้าฟังการบรรยายในห้องบรรยายที่มีความจุ 200 ที่นั่ง โดยไม่มีนักเรียนคนใดที่นั่งเก้าอี้มากกว่าหนึ่งตัว และไม่มีนักเรียนสองคนใดนั่งเก้าอี้ตัวเดียวกัน ถ้าทราบว่านักเรียนทุกคนมีที่นั่ง แสดงว่า $n \leq 200$ และถ้าทราบว่าไม่มีที่นั่งใดว่าง จะสรุปได้ทันทีว่า $n = 200$ โดยไม่ต้องนับจำนวนนักเรียนตรงๆ นี่เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นถึงหลักการที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้ ก่อนอื่น จะให้บทนิยามบางประการ ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด และมีฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$

1. ถ้า $f(a_1) \neq f(a_2)$ ใน B เมื่อ $a_1 \neq a_2$ ใน A เรียก f ว่า หนึ่งต่อหนึ่ง (injective หรือ one-to-one)
2. ถ้า สำหรับแต่ละ $b \in B$ จะมี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = b$ เรียก f ว่า ทั่วถึง (surjective หรือ onto)

ถ้า f เป็นทั้งหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง เรียก f ว่า หนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (bijective)

หลักหนึ่งต่อหนึ่ง (Injection Principle)

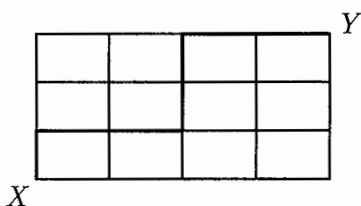
ให้ A และ B เป็นเซตจำกัดสองเซต ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B แล้ว $|A| \leq |B|$

หลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง (Bijection Principle)

ให้ A และ B เป็นเซตจำกัดสองเซต ถ้ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไป B แล้ว $|A| = |B|$

ในทำนองเดียวกับหลักการบวก หลักการคูณ และหลักคอมพลีเมนต์ จะเห็นว่าหลักหนึ่งต่อหนึ่งและหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงเป็นหลักการที่เห็นได้ชัด แต่มีประโยชน์อย่างยิ่งในการแก้ปัญหาคำนับ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.1.1 นักเรียนคนหนึ่งต้องการเดินจากจุด X ไปยังจุด Y ผ่านถนนตามที่กำหนดในแผนที่ข้างล่าง จงหาว่ามีเส้นทางที่สั้นที่สุดกี่เส้นทางจากจุด X ไปยังจุด Y



วิธีทำ ให้ A เป็นเซตของเส้นทางที่สั้นที่สุดทั้งหมดจากจุด X ไปยังจุด Y เราต้องการหา $|A|$

สังเกตว่าทุกเส้นทางในเซต A ประกอบด้วยส่วนย่อย 7 ส่วน โดยที่แต่ละส่วนย่อยคือส่วนของถนนที่เชื่อมจุดตัดสองจุดระหว่างถนน ในส่วนย่อย 7 ส่วนนี้ มี 4 ส่วนในแนวนอนและมี 3 ส่วนในแนวตั้ง

ถ้าให้ 0 แทนส่วนย่อยในแนวนอนและ 1 แทนส่วนย่อยในแนวตั้ง แล้วทุกเส้นทางในเซต A จะแทนได้ด้วยเลขฐานสอง 7 หลักที่ประกอบด้วย 0 สี่ตัวและ 1 สามตัวได้เพียงแบบเดียวเท่านั้น ยกตัวอย่างเช่น เส้นทางในรูปข้างบนแทนได้ด้วย 1001100 การแทนเส้นทางด้วยเลขฐานสองเช่นนี้นิยามฟังก์ชัน f จาก A ไป B โดยที่ B คือเซตของเลขฐานสอง 7 ทั้งหมดที่ประกอบด้วย 0 สี่ตัวและ 1 สามตัว

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง โดยหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จึงสรุปได้ว่า

$$|A| = |B| = \binom{7}{3}$$

■

ตัวอย่าง 1.5.2 ถ้า $|X| = n$ จงแสดงว่า $|P(X)| = 2^n$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ เมื่อ $P(X)$ คือเซตกำลังของ X

วิธีทำ สมมติให้ $X = \{1, 2, \dots, n\}$

ให้ $B = \{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i = 0 \text{ หรือ } 1 \text{ ทุก } i = 1, 2, \dots, n\}$ เป็นเซตของเลขฐานสองทั้งหมดที่มี n หลัก นิยามฟังก์ชัน $f: P(X) \rightarrow B$ ดังนี้ สำหรับแต่ละ $S \in P(X)$ (กล่าวคือ $S \subseteq X$) นิยาม

$$f(S) = b_1 b_2 \dots b_n$$

โดยที่

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } i \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } i \notin S \end{cases}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ แล้ว $f(\{4\}) = 00010$ และ $f(\{2, 3, 5\}) = 01101$

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก $P(X)$ ไป B

โดยหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จึงได้

$$|P(X)| = |B| = 2^n$$

■

ตัวอย่าง 1.5.3 ให้ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่าการจัดหมู่ทีละ r สิ่งของเซต X โดยไม่มีจำนวนเต็มที่มีค่าเรียงติดกัน ทำได้ $\binom{n-r+1}{r}$ วิธี เมื่อ $0 \leq r \leq n-r+1$

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตของวิธีการจัดหมู่ทีละ r สิ่งของเซต A โดยไม่มีจำนวนเต็มที่มีค่าเรียงติดกัน และให้ B เป็นเซตของการจัดหมู่ทีละ r สิ่งของเซต Y โดยที่

$$Y = \{1, 2, \dots, n - (r - 1)\}$$

เราจะสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไป B

ให้ $S = \{s_1, s_2, s_3, \dots, s_r\}$ เป็นสมาชิกในเซต A โดยไม่เสียนัยทั่วไป เราให้ $s_1 < s_2 < s_3 < \dots < s_r$ นิยาม

$$f(S) = \{s_1, s_2 - 1, s_3 - 2, \dots, s_r - (r - 1)\}$$

เนื่องจาก s_i และ s_{i+1} ไม่ใช่จำนวนเต็มที่มีค่าเรียงติดกัน สมาชิกทุกตัวใน $f(S)$ จึงมีค่าต่างกันหมด ดังนั้น $f(S) \in B$ จึงได้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

เราสามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

เพื่อแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $T = \{t_1, t_2, t_3, \dots, t_r\}$ เป็นสมาชิกในเซต B พิจารณา

$$S = \{t_1, t_2 + 1, t_3 + 2, \dots, t_r + (r - 1)\}$$

เราสามารถตรวจสอบได้ว่า S เป็นสมาชิกในเซต A และ $f(S) = T$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่า $f: A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง โดยหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จึงได้

$$|A| = |B| = \binom{n-r+1}{r}$$

ข้อสังเกต ปัญหาในตัวอย่าง 1.5.3 สามารถขยายเป็นนัยทั่วไปในดังนี้

ให้ $m \in \mathbb{N}$ เซต $S = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ ของจำนวนเต็มบวกโดยที่ $a_1 < a_2 < \dots < a_r$

จะเรียกว่า **ห่างกัน m** เมื่อ $a_i - a_{i-1} \geq m$ สำหรับแต่ละ $i = 2, 3, \dots, r$

ดังนั้น S ห่างกัน 2 ก็ต่อเมื่อ S ไม่มีจำนวนเต็มที่มีค่าเรียงติดกัน

ให้ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$ โดยอาศัยหลักหนึ่งต่อหนึ่ง เราสามารถหาสูตรสำหรับจำนวนเซตย่อยของ X ที่มีสมาชิก r และห่างกัน m ได้

ในตัวอย่างข้างต้น เราได้เห็นตัวอย่างการสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไป B ไปแล้ว ซึ่งโดยหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จะได้ $|A| = |B|$ ในแต่ละตัวอย่างที่อธิบายไปนั้น การนับจำนวนสมาชิกในเซต A นั้นทำตรงๆ ได้ยาก ในขณะที่ การนับจำนวนสมาชิกในเซต B ทำได้ง่ายกว่ามาก ดังนั้น หลักการหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง ทำให้เราแปลงปัญหาที่ยากให้เป็นปัญหาที่ง่ายได้ และนี่เป็นขั้นตอนที่สำคัญในการแก้ปัญหา

ในตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการใช้ทั้งหลักหนึ่งต่อหนึ่งและหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง

ตัวอย่าง 1.5.4 (IMO 1989) การเรียงสับเปลี่ยน $x_1 x_2 \dots x_{2n}$ ของเซต $\{1, 2, \dots, 2n\}$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$ เรียกว่ามีสมบัติ P ถ้ามี $i \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ อย่างน้อยหนึ่งค่าที่ $|x_i - x_{i+1}| = n$ จงแสดงว่าสำหรับแต่ละ n มีการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมบัติ P อยู่มากกว่าการเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีสมบัติ P

ก่อนจะแสดงบทพิสูจน์ เราจะทำความเข้าใจปัญหาให้ดียิ่งขึ้นก่อน ให้ $S = \{1, 2, \dots, 2n\}$ เห็นได้ชัดว่าการเรียงสับเปลี่ยนของ S จะไม่มีสมบัติ P ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $k = 1, 2, \dots, n$ คู่ของจำนวน k และ $n+k$ ไม่อยู่ติดกันในการเรียงสับเปลี่ยน สำหรับกรณี $n = 2$ เซต A ของการเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีสมบัติ P และเซต B ของการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมบัติ P คือ

$$A = \{1234, 1432, 2143, 2341, 3214, 3412, 4123, 4321\}$$

$$B = \{1243, 1324, 1342, 1423, 2134, 2314, 2413, 2431, \\ 3124, 3142, 3241, 3421, 4132, 4213, 4231, 4312\}$$

เห็นได้ชัดว่า $|B| = 16 > 8 = |A|$

วิธีทำ กรณี $n = 1$ นั้นเห็นได้ชัด จึงพิจารณากรณี $n \geq 2$

ให้ A และ B เป็นเซตของการเรียงสับเปลี่ยนของ $S = \{1, 2, \dots, 2n\}$ ที่ไม่มีและมีสมบัติ P ตามลำดับ

เพื่อที่จะแสดงว่า $|B| > |A|$ โดยหลักหนึ่งต่อหนึ่งและหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง เป็นการเพียงพอที่จะหาฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ซึ่งเป็นหนึ่งต่อหนึ่งและไม่ทั่วถึง

เพื่อความสะดวก จะเรียกสมาชิกในเซต $\{k, n+k\}$ เมื่อ $k = 1, 2, \dots, n$ ว่าเป็นคู่ของอีกสมาชิกอีกตัวหนึ่ง ถ้า k และ $n+k$ เป็นคู่ที่อยู่ติดกันในการเรียงสับเปลี่ยน จะเรียก $\{k, n+k\}$ ว่าเป็นคู่ที่ติดกัน

ให้ $\alpha = x_1 x_2 \dots x_{2n}$ เป็นสมาชิกในเซต A

เนื่องจาก α ไม่มีสมบัติ P คู่ของ x_1 จึงไม่ใช่ x_2

ให้ x_r เป็นคู่ของ x_1 สำหรับบางค่าของ r ในเซต $\{3, 4, \dots, 2n\}$

กำหนด

$$f(\alpha) = x_2 x_3 \dots x_{r-1} x_1 x_r x_{r+1} \dots x_{2n}$$

ซึ่งเป็นการนำ x_1 ไปวางไว้ข้างหน้า x_r เห็นได้ชัดว่าใน $f(\alpha)$ มีเพียง $\{x_1, x_r\}$ เท่านั้นที่เป็นคู่ที่ติดกัน (ยกตัวอย่างเช่น $f(1234) = 2134$ และ $f(2143) = 1243$)

เห็นได้ชัดว่า $f(\alpha) \in B$ และ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ให้

$$\alpha = x_1 x_2 \dots x_{2n}$$

$$\beta = y_1 y_2 \dots y_{2n}$$

เป็นสมาชิกในเซต A ซึ่งคู่ของ x_1 คือ x_r และคู่ของ y_1 คือ y_s โดยที่ $3 \leq r, s \leq 2n$

สมมติว่า $f(\alpha) = f(\beta)$ นั่นคือ

$$x_2 x_3 \dots x_1 x_r \dots x_{2n} = y_2 y_3 \dots y_1 y_s \dots y_{2n}$$

เนื่องจาก $\{x_1, x_r\}$ (และ $\{y_1, y_s\}$) เป็นคู่ที่ติดกันเพียงคู่เดียวใน $f(\alpha)$ (และ $f(\beta)$)

เราจึงได้ $r = s, x_1 = y_1, x_r = y_r$ ซึ่งได้ตามมาว่า $x_i = y_i$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, 2n$

ดังนั้น $\alpha = \beta$ จึงสรุปได้ว่า f เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

สังเกตอีกว่า $f(A)$ ประกอบด้วยการเรียงสับเปลี่ยนของ S ที่มีคู่ที่ติดกันเพียงคู่เดียวเท่านั้น ในขณะที่มีการเรียงสับเปลี่ยนของ S ในเซต B ที่มีคู่ที่ติดกันมากกว่าหนึ่งคู่ ดังนั้น f จึงไม่ทั่วถึง

จึงสรุปได้ว่า มีการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสมบัติ P อยู่มากกว่าการเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีสมบัติ P ■

แบบฝึกหัด 1.5

- (AIME 2001) โยนลูกเต๋าที่ไม่ถ่วงลูกหนึ่ง 4 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่แต้มที่ขึ้นในการโยนสามครั้งสุดท้ายแต่ละครั้งมีค่าไม่น้อยกว่าแต้มที่ขึ้นในครั้งก่อนหน้า
- ตัวรวมเลขเป็นเลข 6 หลักตั้งแต่ 000000 ถึง 999999 ถ้าผลบวกของเลขโดดใน 3 หลักแรกเท่ากับผลบวกของเลขโดดในสามหลักหลังแล้วจะถือว่าเป็นตัวโชคดี ถ้าผลบวกของเลขโดดทุกตัวเป็น 27 แล้วจะถือว่าเป็นตัวดี จงหาว่ามีตัวโชคดีมากกว่าตัวดีอยู่กี่ใบ
- ให้ $n \in \mathbb{N}$ จุด $A_1, A_2, \dots, A_n$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง สำหรับ $1 \leq i < j \leq n$ สร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{A_i A_j}$ จงหาว่าส่วนของเส้นตรงทั้งหมดที่สร้างตัดกันได้มากที่สุดกี่จุด
- ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{100}\}$ และ $B = \{1, 2, \dots, 50\}$ จงหาจำนวนฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไป B โดยมีเงื่อนไขว่า $f(a_1) \leq f(a_2) \leq \dots \leq f(a_{100})$ ถ้า f ไม่จำเป็นต้องทั่วถึง จะมีจำนวนฟังก์ชันได้เท่าไร
- สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ เมื่อเลข n เป็นเลขฐานสองแล้ว ให้ $D(n)$ เป็นจำนวนคู่ของเลขหลักที่ติดกันซึ่งมีเลขโดดตรงกัน เช่น $D(3) = D(11_2) = 0$ และ $D(21) = D(10101_2) = 4$ เป็นต้น จงหาว่ามีจำนวนนับ n กี่ตัวที่มีค่าไม่เกิน 2005 และ $D(n) = 2$
- ให้

$$\prod_{n=1}^{1996} (1 + nx^{3^n}) = 1 + a_1 x^{k_1} + a_2 x^{k_2} + \dots + a_m x^{k_m}$$
 โดยที่ $a_1, a_2, \dots, a_m \neq 0$ และ $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ จงหา a_{1234}
- (Putnam 2002) ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากกว่า 1 และให้ T_n เป็นจำนวนเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่มีสมบัติว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของสมาชิกทั้งหมดในเซตย่อยนั้นเป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า $T_n - n$ เป็นจำนวนคู่เสมอ
- สร้างตารางสามเหลี่ยมโดยการนำรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ยาวด้านละ 1 หน่วยจำนวน n^2 รูปมาเรียงต่อกันให้เกิดเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าใหญ่ที่ยาวด้านละ n หน่วย จงหาว่ามีรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนที่ยาวด้านละ 1 หน่วยทั้งหมดกี่รูปที่มีด้านทุกด้านอยู่บนตารางสามเหลี่ยมนี้
- ให้ $P_1 P_2 \dots P_{325}$ เป็นรูป 325 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า จงหาจำนวนรูปสามเหลี่ยมที่ไม่เท่ากันทุกประการที่มีจุด P_i, P_j, P_k เป็นจุดยอด เมื่อ $1 \leq i, j, k \leq 325$
- (USAMO 1996) ให้ a_n เป็นจำนวนเลขฐานสองที่มี n หลักและไม่มี 010 ให้ b_n เป็นจำนวนเลขฐานสองที่มี n หลักและไม่มี 0011 หรือ 1100 จงพิสูจน์ว่า $b_{n+1} = 2a_n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

1.6 การเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ที่มีของซ้ำ

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ศึกษาการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่ของที่แตกต่างกันหมด ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่เมื่อมีของซ้ำ

ตัวอย่าง 1.6.1 ให้ $A = \{a, b, c\}$ จงหาการเรียงสับเปลี่ยนทีละ 2 สิ่งของเซต A เมื่ออนุญาตให้หยาบของซ้ำได้

วิธีทำ เมื่ออนุญาตให้หยาบของซ้ำได้ จึงถือว่ามี a, b, c อยู่อย่างละไม่จำกัดจำนวน

การเรียงสับเปลี่ยนทีละ 2 สิ่งของเซต A เมื่อหยาบซ้ำได้ ได้แก่

$aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc$ ■

ในกรณีทั่วไป เราสรุปได้ว่า

การเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่งจากเซต $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ เมื่อ $r, n \in \mathbb{N}$ และอนุญาตให้หยาบซ้ำได้ มีทั้งหมด n^r วิธี

บทพิสูจน์ หยาบของชั้นที่ 1 ได้ n วิธี

เนื่องจากอนุญาตให้หยาบซ้ำได้ จึงยังคงมี n ตัวเลือกสำหรับการหยาบในอีก $r - 1$ ครั้งที่เหลือเสมอ

โดยหลักการคูณ จึงมีการเรียงสับเปลี่ยนตามต้องการเท่ากับ n^r วิธี ■

ตัวอย่าง 1.6.2 มีบ้านสี่ชั้นหลังหนึ่งและมีสี 6 สี ต้องการทาสีแต่ละชั้น จงหาว่ามีวิธีทาสีได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ จำนวนวิธีทาสีคือจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของทีละ 4 สิ่งจากเซต $\{1, 2, \dots, 6\}$ ของสี 6 สี

จึงทาสีได้ทั้งหมด 6^4 วิธี ■

การเรียงสับเปลี่ยนที่พิจารณาไปแล้วนั้น สามารถหยาบของซ้ำได้ไม่จำกัดจำนวน ต่อไปเราจะพิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนที่สมาชิกแต่ละตัวหยาบซ้ำได้จำกัดจำนวน

ตัวอย่าง 1.6.3 จงหาที่มีการเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร 5 ตัวคือ a, a, a, b, c ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ให้ α เป็นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน a, a, a, b, c

พิจารณาการเรียงสับเปลี่ยนวิธีหนึ่ง สมมติว่าเป็น $abaac$

จินตนาการว่า a ทั้งสามแตกต่างกัน นั่นคือมี a_1, a_2, a_3

$$\begin{array}{c}
 a_1 b a_2 a_3 c \\
 a_1 b a_3 a_2 c \\
 a_2 b a_1 a_3 c \\
 a_2 b a_3 a_1 c \\
 a_3 b a_1 a_2 c \\
 a_3 b a_2 a_1 c
 \end{array}
 \leftrightarrow
 abaac$$

จะสังเกตเห็นว่า $abaac$ สมัยกับเซตของ $3! = 6$ การเรียงสับเปลี่ยนของ $\{a_1, a_2, a_3, b, c\}$

แต่มีการเรียงสับเปลี่ยนของ $\{a_1, a_2, a_3, b, c\}$ ได้ทั้งหมด $5!$ วิธี ดังนั้น

$$\alpha \cdot 3! = 5!$$

นั่นคือ

$$\alpha = \frac{5!}{3!} = 20$$

ในกรณีทั่วไป เราสรุปได้ว่า

พิจารณาสิ่งของจำนวนหนึ่งที่ประกอบด้วย

ชนิดที่ 1 จำนวน r_1 ชิ้น

ชนิดที่ 2 จำนวน r_2 ชิ้น

$\vdots$

ชนิดที่ n จำนวน r_n ชิ้น

โดยที่ $r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$

การเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของเหล่านี้แทนด้วย $P(r; r_1, r_2, \dots, r_n)$ และสูตรคำนวณค่าคือ

$$P(r; r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1! r_2! \cdots r_n!}$$

บทพิสูจน์ เราสามารถขยายแนวคิดในตัวอย่าง 1.6.3 เพื่อพิสูจน์สูตรสำหรับ $P(r; r_1, r_2, \dots, r_n)$ ได้

แต่จะแสดงวิธีคิดในอีกแนวหนึ่ง ดังนี้

ทุกการเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของทั้ง r สิ่งนี้ จะต้องมีการจัดตำแหน่งเป็นของชนิดที่ i ทุก $i = 1, 2, \dots, n$

การเลือกตำแหน่งที่ต่างกันในวางของแต่ละชนิด ทำให้เกิดการเรียงสับเปลี่ยนที่ต่างกัน

ขั้นที่ 1 เลือก r_1 ตำแหน่งจาก r ตำแหน่ง มาวางของชนิดที่ 1 ทำได้ $\binom{r}{r_1}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก r_2 ตำแหน่งจาก $r - r_1$ ตำแหน่งที่เหลือ มาวางของชนิดที่ 2 ทำได้ $\binom{r - r_1}{r_2}$ วิธี

⋮

ขั้นที่ n เลือก r_n ตำแหน่งจาก $r - r_1 - r_2 - \dots - r_{n-1}$ ตำแหน่งที่เหลือ มาวางของชนิดที่ n ทำได้ $\binom{r - r_1 - r_2 - \dots - r_{n-1}}{r_n}$ วิธี

โดยหลักการคูณ จึงได้

$$\begin{aligned} P(r; r_1, r_2, \dots, r_n) &= \binom{r}{r_1} \binom{r - r_1}{r_2} \dots \binom{r - r_1 - r_2 - \dots - r_{n-1}}{r_n} \\ &= \frac{r!}{r_1! (r - r_1)!} \cdot \frac{(r - r_1)!}{r_2! (r - r_1 - r_2)!} \cdot \dots \cdot \frac{(r - r_1 - r_2 - \dots - r_{n-1})!}{r_n! (r - r_1 - r_2 - \dots - r_n)!} \\ &= \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!} \end{aligned}$$

■

สูตรการเรียงสับเปลี่ยนที่มีของซ้ำสามารถเขียนได้ง่ายขึ้นโดยใช้สัญลักษณ์ที่เรียกว่า เซตซ้ำ (multi-set) ซึ่งเป็นเซตที่สมาชิกซ้ำกันได้ เช่น $M = \{a, b, a, c, b, a\}$ เป็นเซตซ้ำที่มีสมาชิก a 3 ตัว b 2 ตัว และ c 1 ตัว เราสามารถเขียนเซตซ้ำให้อ่านง่ายขึ้นโดยการระบุจำนวนครั้งที่ซ้ำไว้ข้างหน้าสมาชิกแต่ละตัว เช่น $M = \{3 \cdot a, 2 \cdot b, c\}$ เป็นต้น ในกรณีทั่วไป เซตซ้ำจะอยู่ในรูป

$$M = \{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$$

เมื่อ $n, r_1, r_2, \dots, r_n$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นของที่แตกต่างกัน

เซตซ้ำ M นี้มี a_1 อยู่ r_1 ตัว มี a_2 อยู่ r_2 ตัว ... และมี a_n อยู่ r_n ตัว สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \dots, n$ เรียก r_i ว่า จำนวนซ้ำ ของ a_i และเพื่อความสะดวก จะเขียน $\infty \cdot a$ แทนความหมายว่า a มีซ้ำได้ไม่จำกัดจำนวน ตัวอย่างเช่น เซตซ้ำที่สมาชิก b และ c มีได้ไม่จำกัดจำนวน และสมาชิก a, d มีจำนวนซ้ำเท่ากับ 2, 7, 4 ตามลำดับ เขียนในรูปเซตซ้ำได้เป็น $\{2 \cdot a, \infty \cdot b, 7 \cdot c, 4 \cdot d, \infty \cdot e\}$

การเรียงสับเปลี่ยนที่ละ r สิ่งของเซตซ้ำ $M = \{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$ คือการนำของ r สิ่งจาก M มาเรียงเป็นเส้นตรง โดยมี a_i ได้ไม่เกิน r_i ชิ้น เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ การเรียงสับเปลี่ยนของ M คือการเรียงสับเปลี่ยนสมาชิกทั้งหมดของ M เป็นเส้นตรง และการเรียงสับเปลี่ยนที่ละ r สิ่งของ $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ ก็นิยามได้ในทำนองเดียวกัน เพียงแต่ไม่จำกัดจำนวนของของของแต่ละชนิดเท่านั้น

โดยอาศัยสัญลักษณ์และคำจำกัดความข้างต้น เราสามารถเขียนสูตรการเรียงสับเปลี่ยนที่มีของซ้ำได้ดังนี้

การเรียงสับเปลี่ยนทีละ r สิ่งของเซตซ้ำ

$$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$$

ทำได้ n^r วิธี

ให้ $M = \{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$ และ $r = r_1 + r_2 + \dots + r_n$

จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของเซต M คือ

$$P(r; r_1, r_2, \dots, r_n) = \frac{r!}{r_1! r_2! \dots r_n!}$$

ตัวอย่าง 1.6.4 จงหาจำนวนเลขฐาน 3 ทั้งหมดที่มี 10 หลักและประกอบด้วย 0 สองตัว 1 สามตัว และ 2 ห้าตัว

วิธีทำ จำนวนเลขฐาน 3 ที่ต้องการคือจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของเซตซ้ำ $\{2 \cdot 0, 3 \cdot 1, 5 \cdot 2\}$ ซึ่งเท่ากับ

$$\frac{10!}{2!3!5!} = 2520$$

■

ตัวอย่าง 1.6.5 จงแสดงว่า $(4n)!$ เป็นพหุคูณของ $2^{3n} \cdot 3^n$ ทุกจำนวนนับ n

วิธีทำ พิจารณาเซตซ้ำ

$$M = \{4 \cdot a_1, 4 \cdot a_2, \dots, 4 \cdot a_n\}$$

จำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของเซตซ้ำ M คือ

$$P(4n; 4, 4, \dots, 4) = \frac{(4n)!}{(4!)^n} = \frac{(4n)!}{(2^3 \cdot 3)^n} = \frac{(4n)!}{2^{3n} \cdot 3^n}$$

แต่ $P(4n; 4, 4, \dots, 4)$ เป็นจำนวนเต็ม จึงสรุปได้ว่า $(4n)!$ เป็นพหุคูณของ $2^{3n} \cdot 3^n$ ทุกจำนวนนับ n ■

ต่อไปเราจะศึกษาจำนวนวิธีในการจัดหมู่ที่มีของซ้ำ

ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ มีจำนวนวิธีในการจัดหมู่ทีละ 3 สิ่งของ A อยู่ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี โดยเลือกสมาชิกไม่ซ้ำกัน

ถ้าอนุญาตให้เลือกสมาชิกซ้ำกันได้ จะมีวิธีการจัดหมู่ทีละ 3 สิ่งได้ทั้งหมดกี่วิธี? เราหาคำตอบโดยไล่หาวิธีการจัดหมู่ตามต้องการทั้งหมด ดังแสดงข้างล่าง ซึ่งมีทั้งหมด 20 วิธี

$$\begin{array}{ccccc}
 \{1,1,1\} & \{1,2,2\} & \{1,3,4\} & \{2,2,4\} & \{3,3,3\} \\
 \{1,1,2\} & \{1,2,3\} & \{1,4,4\} & \{2,3,3\} & \{3,3,4\} \\
 \{1,1,3\} & \{1,2,4\} & \{2,2,2\} & \{2,3,4\} & \{3,4,4\} \\
 \{1,1,4\} & \{1,3,3\} & \{2,2,3\} & \{2,4,4\} & \{4,4,4\}
 \end{array}$$

ให้

$$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$$

เป็นเซตซ้ำเมื่อ $n \in \mathbb{N}$ จะเรียกเซตซ้ำในรูป $\{m_1 \cdot a_1, m_2 \cdot a_2, \dots, m_n \cdot a_n\}$ เมื่อ m_i เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ว่าเป็นเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก $(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$ ตัวของ M ในตัวอย่างที่แสดงข้างบนคือเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก 3 ตัวทั้งหมดของ $\{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3, \infty \cdot 4\}$ ให้ H_r^n เป็นจำนวนเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของ M ดังนั้น จากตัวอย่างข้างบนจะเห็นว่า $H_3^4 = 20$ เราต้องการหาสูตรสำหรับ H_r^n โดยเริ่มต้นพิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.3.3 ในภัตตาคารแห่งหนึ่ง มีแซนวิชอยู่ 3 ชนิดคือ ไก่ ปลา และหมู และสมมติว่าภัตตาคารมีแซนวิชแต่ละชนิดไม่จำกัดจำนวน จงหาว่าจำนวนวิธีในการสั่งแซนวิช 6 ชิ้น

วิธีทำ ปัญหาข้อนี้ต้องการคำนวณ H_6^3 ซึ่งยากที่จะไล่นับเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก 6 ตัวของ

$$\{\infty \cdot \text{ไก่}, \infty \cdot \text{ปลา}, \infty \cdot \text{หมู}\}$$

ลองพิจารณาตัวอย่างวิธีการสั่งต่อไปนี้

ไก่	ปลา	หมู
๐ ๐	๐	๐ ๐ ๐
๐	๐ ๐ ๐ ๐	๐
	๐ ๐	๐ ๐ ๐ ๐
๐ ๐ ๐		๐ ๐ ๐

สิ่งที่น่าสนใจคือ ถ้าแทนแซนวิชแต่ละชิ้นด้วย 0 และแทนเส้นกั้นระหว่างหลักในตารางข้างบนด้วย 1 แล้ววิธีการสั่งแซนวิชทั้ง 4 วิธีที่แสดงไว้ จะแทนได้ด้วยเลขฐานสองตามลำดับ ดังนี้

00101000

01000010

10010000

00011000

จะเห็นว่าแต่ละวิธีการสังเขป 6 ชั้น สมัยกับเลขฐานสองที่มี 8 หลักและมี 0 อยู่ 6 ตัว มี 1 อยู่ 2 ตัว ซึ่งวิธีการสังเขปที่ต่างกัน จะแทนได้ด้วยเลขฐานสองที่ต่างกัน ในอีกแง่หนึ่ง ทุกๆ เลขฐานสองดังกล่าวจะแทนวิธีการสังเขป 6 ชั้น ยกตัวอย่างเช่น 01001000 แทนวิธีการสังเขป 6 ชั้น 2 ชั้น และ 2 ชั้น และ 2 ชั้น ดังนั้น จึงมีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจากเซตของวิธีการสังเขป 6 ชั้นไปเซตของเลขฐานสองที่มี 0 อยู่ 6 ตัวและมี 1 อยู่ 2 ตัว โดยหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จำนวนวิธีในการสังเขปคือ

$$H_6^3 = \binom{8}{2}$$

เราสามารถขยายแนวคิดเพื่อหาสูตร H_r^n ได้ดังนี้

ในตารางข้างล่าง แสดงของ n สิ่งทีเลือกจากเซตซ้ำ $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ โดยมีเส้นคั่นระหว่างของแต่ละชนิดทั้งหมด $n-1$ เส้น

a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_n
$\underbrace{00\dots0}_{r_1}$	$\underbrace{00\dots0}_{r_2}$	$\underbrace{00\dots0}_{r_3}$	$\dots$	$\underbrace{00\dots0}_{r_n}$

ทุกเซตซ้ำย่อย $\{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$ ของ M เมื่อ $r_i \geq 0$ สำหรับทุก i แทนได้ 0 จำนวน r_i ตัว ในช่องของ a_i และแทนเส้นคั่นระหว่างหลักด้วย 1 นั่นคือ ทุกเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก r ตัว สมัยกับเลขฐานสองที่มี $r+n-1$ หลัก โดยมี 0 อยู่ r ตัว และมี 1 อยู่ $n-1$ ตัว แท้จริงแล้ว การสมัยกันนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงระหว่างเซตของเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของ M กับเซตของเลขฐานสองทั้งหมดที่มีจำนวน 0 และ 1 ตามที่กล่าวไว้แล้ว โดยหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง จึงได้ผลต่อไปนี้

ให้ $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ จำนวนเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของ M คือ

$$H_r^n = \binom{r+n-1}{r}$$

แบบฝึกหัด 1.6

1. ต้องการสลับตัวอักษรในคำว่า ASSESSES จะสลับได้ทั้งหมดกี่วิธี
2. ต้องการสลับอักษรในคำว่า FOOTBALL จะสลับได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 2.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 2.2 ต้องขึ้นต้นด้วย L
 - 2.3 ต้องขึ้นต้นด้วยพยัญชนะ
3. ต้องการสลับอักษรในคำว่า MISSISSIPPI จะสลับได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 3.1 อักษรที่ซ้ำอยู่ติดกันหมด
 - 3.2 ขึ้นต้นด้วย S แต่ลงท้ายด้วย P
 - 3.3 ลงท้ายด้วยพยัญชนะ
4. ต้องการสลับอักษรในคำว่า PRINCESSES จะสลับได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 4.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 4.2 อักษร S อยู่ติดกันหมด
 - 4.3 อักษร S อยู่แยกกันหมด
5. มีอักษร A 3 ตัว B 6 ตัว นำมาสร้างเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมายได้กี่วิธี ถ้าต้องการให้อักษร A อยู่แยกกันหมด
6. ต้องการสลับตัวอักษรในคำว่า ENGINEER จะสลับได้กี่วิธี ถ้า
 - 6.1 สระอยู่ติดกันหมด
 - 6.2 สระอยู่แยกกันหมด
 - 6.3 พยัญชนะอยู่แยกกันหมด
 - 6.4 ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยอักษรตัวเดียวกัน
7. จากตัวเลข 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3 จะสร้างตัวเลขที่มีค่ามากกว่า 1 ล้านได้กี่จำนวน
8. มีหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม ฟิสิกส์ 2 เล่ม เคมี 2 เล่ม โดยที่หนังสือวิชาเดียวกันเหมือนกัน จะมีวิธีการเรียงหนังสือทั้งหมดบนชั้นได้กี่วิธี ถ้า
 - 8.1 ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
 - 8.2 หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน
 - 8.3 หนังสือคณิตศาสตร์อยู่ติดกันหมด
 - 8.4 หนังสือคณิตศาสตร์อยู่แยกกันหมด

9. จากโจทย์ข้อที่แล้ว ถ้าหนังสือคณิตศาสตร์ทั้ง 3 เล่ม ต่างกันหมด จะเรียงหนังสือตั้งเงื่อนไขต่าง ๆ ได้กี่วิธี
10. มีหนังสือ 8 เล่ม นำไปจัดเรียงบนชั้นวางหนังสือได้ทั้งหมด 3,360 วิธี อยากทราบว่า จะมีหนังสือบางเล่ม ซ้ำกันหรือไม่ ถ้ามีจะซ้ำกันอย่างละกี่เล่ม
11. แผ่นป้าย 10 แผ่น ที่มีหมายเลข 1 – 10 แผ่นละ 1 หมายเลข ต้องการนำมาแขวนเรียงกัน จะจัดได้กี่วิธี ถ้าต้องการให้เลขคู่เรียงลำดับจากแต่น้อยไปแต่มาก จากซ้ายไปขวา (แต่ไม่จำเป็นต้องติดกันหมด)
12. ชาย 4 คน หญิง 4 คน ยืนเข้าแถวหน้ากระดานได้กี่วิธี ถ้า
 - 12.1 ชายที่สูงกว่าต้องอยู่ทางขวาของชายคนที่เตี้ยกว่าเสมอ
 - 12.2 แต่ละเพศ คนที่สูงกว่าต้องอยู่ทางขวาของคนที่ย่อยกว่าเสมอ
13. โยนเหรียญ 1 เหรียญ 10 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่จะขึ้นหัว 6 ครั้ง ก้อย 4 ครั้ง
14. ทอดลูกเต๋า 1 ลูก 6 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีขึ้นหน้า 1 เพียง 2 ครั้ง
15. ถ้าต้องการสลับอักษรในคำว่า ENGINEERING จะสลับได้กี่วิธี ถ้าต้องการให้
 - 15.1 อักษร E อยู่ติดกันทั้ง 3 ตัว
 - 15.2 อักษร E อยู่ติดกันเพียง 2 ตัว
16. คนเฒ่าคนหนึ่ง สามารถเดินไปข้างหน้าหรือถอยหลังได้ รวมแล้ว 11 ก้าว ถ้าต้องการให้หลังจากเดินเสร็จแล้ว เขาอยู่หน้าห่างจากจุดเดิม 5 ก้าว เขาจะเดินได้กี่วิธี
17. กระดานหมากรุกไทยขนาด 8×8 มีเรือ 1 ตัว อยู่ท่ามกลางซ้าย ต้องการเดินเรือไปยังมุมตรงข้าม (บนขวา) โดยให้เดินไปทางขวาหรือเดินขึ้นเท่านั้น จะเดินได้กี่วิธี

1.7 การแจกของ

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการนับจำนวนวิธีในการแจกของ r ชิ้นลงกล่อง n กล่องที่ต่างกัน และแต่ละกล่องสามารถบรรจุของได้ไม่จำกัดจำนวน โดยจะแยกพิจารณาสองกรณีคือ กรณีที่ของต่างกันหมด และกรณีที่ของเหมือนกันหมด

ในกรณีที่ของต่างกันหมด ของแต่ละชิ้นสามารถเลือกกล่องลงได้ชิ้นละ n วิธี โดยหลักการคูณ จึงแจกของลงกล่องได้ n^r วิธี

ในกรณีที่ของเหมือนกันหมด จะแยกพิจารณาสองกรณีย่อย คือ

1. แต่ละกล่องมีของกี่ชิ้นก็ได้ (หรือไม่มีของเลยก็ได้) วิธีแจกของแต่ละวิธีแทนได้ด้วยเซตซ้ำ

$$\{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$$

โดยที่ r_i เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบและ $r_1 + r_2 + \dots + r_n = r$ ซึ่งหมายความว่า มีของ r_i ชิ้นในกล่องที่ i ดังนั้นจำนวนวิธีแจกของลงกล่องก็คือจำนวนเซตซ้ำย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของ $M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$ นั่นเอง ซึ่งมีจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ

$$H_r^n = \binom{r+n-1}{r}$$

2. แต่ละกล่องต้องมีของอย่างน้อยหนึ่งชิ้น ซึ่งแสดงว่า $r \geq n$ กรณีนี้ทำได้ง่ายโดยใส่ของลงทุกกล่อง กล่องละชิ้นก่อน เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ต้องการให้แต่ละกล่องมีของอย่างน้อยหนึ่งชิ้น จากนั้นแจกของอีก $r-n$ ชิ้นที่เหลือลงกล่อง n กล่อง โดยที่บางกล่องอาจไม่ได้รับแจกของเลยก็ได้ ซึ่งทำได้

$$H_{r-n}^n = \binom{(r-n)+n-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n}$$

แต่จากเอกลักษณ์ $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ จึงได้จำนวนวิธีในการแจกของเท่ากับ

$$\binom{r-1}{n-1}$$

ตัวอย่าง 1.7.1 จงหาว่าจะเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรในคำ VISITING ได้กี่วิธี โดยไม่มี I ติดกัน

วิธีทำ ตัวอักษรในคำที่กำหนดให้ประกอบด้วย I 3 ตัว และ V,S,T,N,G อย่างละตัว

วิธีที่ 1 ตัด I ออกจากการพิจารณาก่อน เรียงตัวอักษรที่เหลืออีก 5 ตัวได้ $5!$ วิธี พิจารณาวีธีเรียงวิธีหนึ่งในรูปข้างล่าง

_ V _ S _ T _ N _ G _

จะเห็นว่ามที่ว่าง 6 ที่ ให้นำ I 3 ตัวไปใส่ ซึ่งเลือกที่ว่างได้ $\binom{6}{3}$ วิธี

โดยหลักการคูณ จึงเรียงสับเปลี่ยนคำตามเงื่อนไขที่ต้องการได้

$$5! \binom{6}{3} \text{ วิธี}$$

วิธีที่ 2 เรียง I ทั้ง 3 ลงไปก่อน ทำให้เกิดที่ว่าง 4 ที่

_ I _ I _ I _

สมมติก่อนว่าตัวอักษรทั้ง 5 ตัวที่เหลือเหมือนกันหมด เพื่อความง่าย ให้แทนด้วย x 5 ตัว

ต้องการใส่ตัวอักษรลงที่ว่าง 4 ที่ โดยต้องการให้มีตัวอักษรคั่นระหว่าง I ทั้ง 3 ตัว จึงใส่ x ลงสองช่อง กลางก่อน ช่องละตัว ดังรูป

_ I _ x _ I _ x _ I _

เหลือ x อีก 3 ตัวที่ต้องการใส่ลงช่อง 4 ช่อง ทำได้ $H_3^4 = \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3}$ วิธี

จากนั้น คั่น x แต่ละตัวเป็นตัวอักษร V,S,T,N,G ตามเดิม ซึ่งมีการเรียงสับเปลี่ยนได้อีก $5!$ วิธี

โดยหลักการคูณ จึงมีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรตามต้องการได้

$$\binom{6}{3} \cdot 5! \text{ วิธี}$$

■

ตัวอย่าง 1.7.2 ให้ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่าการจัดหมู่ทีละ r สิ่งของเซต X โดยไม่มีจำนวนเต็มที่มีค่าเรียงติดกัน ทำได้ $\binom{n-r+1}{r}$ วิธี โดยที่ $0 \leq r \leq n-r+1$

วิธีทำ สร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจากเซต A ของการจัดหมู่ทีละ r สิ่งทั้งหมดของ X ไปเซต B ของเลขฐานสอง n หลัก ที่มี 1 อยู่ r ตัว และมี 0 อย่างน้อยหนึ่งตัวอยู่ระหว่าง 1 สองตัวใดๆ

นิยาม $f: A \rightarrow B$ ดังนี้ สำหรับแต่ละการจัดหมู่ $S = \{k_1, k_2, \dots, k_r\}$ ของ X โดยที่ $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n$ ให้ $f(S) = b_1 b_2 \dots b_n$ โดยที่

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } i = k_1, k_2, \dots, k_r \\ 0 & \text{ในกรณีอื่นๆ} \end{cases}$$

ตัวอย่างเช่น ถ้า $n = 8$ และ $r = 3$ แล้ว

$$f(\{3, 6, 7\}) = 00100110 \quad \text{และ} \quad f(\{1, 4, 8\}) = 10010001$$

เราตรวจสอบได้โดยง่ายว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจาก A ไป B

จึงต้องการหา $|B|$ สังเกตว่าเลขฐานสองใน B ก็คือการแจกของที่เหมือนกัน $n-r$ ขึ้นลงกล่องที่ต่างกัน $r+1$ กล่อง โดยที่กล่องที่ 2, 3, ..., r ไม่ว่าง ดังตัวอย่างข้างล่าง

$$\begin{array}{lcl} 00100110 & \leftrightarrow & \underline{00 \mid 00 \mid \quad \mid 0} \\ 10010001 & \leftrightarrow & \underline{\quad \mid 00 \mid 000 \mid} \end{array}$$

การแจกของตามเงื่อนไขดังกล่าว ทำได้โดยแจกของลงกล่องที่ 2, 3, ..., r กล่องละชิ้นก่อน

เหลือของอีก $(n-r) - (r-1) = n-2r+1$ ชิ้น ให้แจกลงกล่อง $r+1$ กล่อง (รวมกล่องหัวท้ายด้วย)

ซึ่งทำได้ $H_{n-2r+1}^{r+1} = \binom{(n-2r+1) + (r+1) - 1}{n-2r+1}$ วิธี

ดังนั้น

$$|A| = |B| = \binom{n-r+1}{n-2r+1} = \binom{n-r+1}{r}$$

■

ต่อไปเราจะศึกษาปัญหาสำคัญ กล่าวคือ การหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

ที่มี $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่า โดยที่ r และ n เป็นจำนวนเต็มที่ $r \geq 0$ และ $n \geq 1$

พิจารณาตัวอย่างสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

สมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มได้มากมาย เช่น $(-2, 3, 0)$, $(4, -1, -2)$, $(0, 1, 0)$ เป็นต้น ในความเป็นจริงแล้ว เราพบว่าสมการนี้มีผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มอยู่มากมายเป็นจำนวนอนันต์ผลเฉลย ในหัวข้อนี้ เราจะสนใจเฉพาะผลเฉลยที่ไม่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบเท่านั้น

ตัวอย่าง 1.7.3 จงแสดงว่าผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$$

มีอยู่ทั้งหมด $\binom{r+n-1}{r}$ ผลเฉลย

วิธีทำ ทุกผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการนี้สมนัยกับวิธีแจกของที่เหมือนกัน r ชิ้นลงกล่องที่ต่างกัน n กล่อง จำนวนของที่อยู่ในกล่องที่ i ก็คือค่าของ x_i เมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$ นั่นเอง ซึ่งทำได้

$$\binom{r+n-1}{r} \text{ วิธี}$$

■

เพื่อให้ง่ายต่อการอ้างอิง เราจะสรุปได้ว่า $H_r^n = \binom{r+n-1}{r}$ มีความหมายดังต่อไปนี้

1. จำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของเซตซ้ำ $\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$
2. จำนวนวิธีแจกของ r ชิ้นที่เหมือนกันลงกล่องที่ต่างกัน n กล่อง
3. จำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$

ต่อไปจะศึกษาปัญหาการแจกของที่ต่างกันลงกล่องที่เหมือนกัน สำหรับแต่ละจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ r และ n นิยาม จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง (Stirling numbers of the second kind) เขียนแทนด้วย $S(r, n)$ ให้เป็นจำนวนวิธีในการแจกของ r ชิ้นที่ต่างกันลงกล่อง n กล่องที่เหมือนกัน โดยไม่มีกล่องใดว่าง

เราสามารถแสดงเอกลักษณ์ต่อไปนี้ได้ไม่ยาก

1. $S(0, 0) = 1$
2. $S(r, 0) = S(0, n) = 0$ สำหรับทุก $r, n \in \mathbb{N}$
3. $S(r, n) > 0$ เมื่อ $r \geq n \geq 1$
4. $S(r, n) = 0$ เมื่อ $n > r \geq 1$
5. $S(r, 1) = 1$ เมื่อ $r \geq 1$
6. $S(r, r) = 1$ เมื่อ $r \geq 1$
7. $S(r, 2) = 2^{r-1} - 1$
8. $S(r, 3) = \frac{1}{2}(3^{r-1} + 1) - 2^{r-1}$
9. $S(r, r-1) = \binom{r}{2}$
10. $S(r, r-2) = \binom{r}{3} + 3\binom{r}{4}$

ตัวอย่าง 1.7.4 จงแสดงว่า $S(r, n) = S(r-1, n-1) + nS(r-1, n)$ เมื่อ $r, n \in \mathbb{N}$ และ $r \geq n$

วิธีทำ ให้ a_1 เป็นของชิ้นหนึ่งใน r ชิ้นที่ต่างกัน

เมื่อแจกของทั้ง r ชิ้นลงกล่องแล้ว มีเพียงสองกรณีที่ไม่เกิดร่วมกันคือ

กรณีที่ a_1 เป็นของเพียงชิ้นเดียวในกล่อง ซึ่งแจกของที่เหลือลงกล่องได้ $S(r-1, n-1)$ วิธี

กรณีที่ a_1 อยู่รวมกับของชิ้นอื่น ให้แจกของ $r-1$ ชิ้นที่เหลือลงกล่อง n กล่องก่อน

ทำได้ $S(r-1, n)$ วิธี จากนั้นเลือกกล่องมา 1 กล่องเพื่อใส่ a_1 ทำได้ n วิธี

โดยหลักการคูณ ในกรณีนี้จึงแจกของได้ $nS(r-1, n)$ วิธี

โดยหลักการบวก จึงได้

$$S(r, n) = S(r-1, n-1) + nS(r-1, n)$$

■

โดยอาศัยค่าเริ่มต้นของ $S(r, n)$ และอาศัยเอกลักษณ์ในตัวอย่าง 1.7.4 จะหาค่า $S(r, n)$ ได้ดังแสดงตัวอย่างในตารางข้างล่าง

r	n									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	3	1						
4	0	1	7	6	1					
5	0	1	15	25	10	1				
6	0	1	31	90	65	15	1			
7	0	1	63	301	350	140	21	1		
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

แบบฝึกหัด 1.7

1. มีเหรียญสลึง เหรียญบาท เหรียญ 5 บาท และเหรียญ 10 บาท อย่างละ 1 เหรียญในกระเป๋า จะมีวิธีการหยิบเหรียญจากกระเป๋าได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้า
 - 1.1 หยิบอย่างไรก็ได้
 - 1.2 ต้องหยิบอย่างน้อย 1 เหรียญ
2. มีหนังสือคณิตศาสตร์ที่แตกต่างกัน 4 เล่ม และฟิสิกส์ที่แตกต่างกัน 3 เล่ม จะหยิบออกมาอ่านได้กี่วิธี ถ้า
 - 2.1 ต้องอ่านอย่างน้อย 1 เล่ม
 - 2.2 ต้องอ่านอย่างน้อยวิชาละ 1 เล่ม
 - 2.3 ต้องอ่านคณิตศาสตร์อย่างน้อย 1 เล่ม
3. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 5 เล่ม ต้องการหยิบมาอ่านอย่างน้อย 2 เล่ม ได้กี่วิธี
4. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีเขียว 4 ลูก สีน้ำเงิน 3 ลูก ทุกลูกแตกต่างกันหมด จะหยิบลูกบอลออกมาจากกล่องได้กี่วิธี ถ้าต้องการให้
 - 4.1 หยิบได้ครบทุกสี
 - 4.2 ได้สีแดงอย่างน้อย 1 ลูก
5. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{1, 2\}$ ให้ S เป็นสับเซตใดๆ ของ A จงหาจำนวนสับเซต S ซึ่งมีสมบัติดังนี้
 - 5.1 $S \cap B = \emptyset$
 - 5.2 $S \cap B \neq \emptyset$
 - 5.3 $B \subset S$
 - 5.4 $B \not\subset S$
6. มีเงินอยู่ 10 บาท จะแจกให้เด็กคนหนึ่งได้กี่วิธี ถ้า
 - 6.1 แจกหรือไม่แจกก็ได้
 - 6.2 ต้องให้อย่างน้อย 1 บาท
7. มีหนังสือคณิตศาสตร์ที่เหมือนกัน 4 เล่ม ฟิสิกส์ที่เหมือนกัน 3 เล่ม อยู่ในตู้หนังสือ จะมีวิธีหยิบหนังสือออกมาจากตู้ได้กี่วิธี ถ้า
 - 7.1 หยิบหรือไม่หยิบก็ได้
 - 7.2 หยิบอย่างน้อย 1 เล่ม
 - 7.3 หยิบอย่างน้อยวิชาละ 1 เล่ม

8. มีหนังสือคณิตศาสตร์ 4 เล่ม แตกต่างกัน และฟิสิกส์ 3 เล่ม ที่เหมือนกัน อยู่ในตู้หนังสือ จะมีวิธีหยิบหนังสือดังกล่าวออกมาได้กี่วิธี ถ้า
 - 8.1 หยิบหรือไม่หยิบก็ได้
 - 8.2 หยิบอย่างน้อย 1 เล่ม
 - 8.3 หยิบอย่างน้อยวิชาละ 1 เล่ม
9. มีชูกัส 3 รส รสสตรอเบอร์รี่ 3 เม็ด รสส้ม 4 เม็ด รสอู่น 5 เม็ด เด็กคนหนึ่งจะมีวิธีเลือกกินชูกัสกี่วิธี ถ้า
 - 9.1 ต้องกินรสสตรอเบอร์รี่อย่างน้อย 1 เม็ด
 - 9.2 ต้องกินอย่างน้อย 1 เม็ด
 - 9.3 ต้องกินอย่างน้อยรสละ 1 เม็ด แต่ไม่เกิน 3 เม็ด
10. มีเสื้อผ้า 5 ชุด ต่างกัน นำไปแจกให้เด็กยากจน 2 คน ให้ได้อย่างน้อยคนละ 1 ชุด ได้กี่วิธี
11. ให้ $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ จงหาจำนวนสับเซตของ X ทั้งหมด ที่มี 6 เป็นสมาชิกที่มีค่ามากเป็นอันดับที่ 3
12. มีจำนวนเต็มบวกที่หาร 96 ลงตัว
13. ถ้า $p_1, p_2, \dots, p_k$ เป็นจำนวนเฉพาะ k จำนวน ที่แตกต่างกัน และ $n_1, n_2, \dots, n_k$ เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะมีจำนวนนับที่หาร $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ ลงตัว
14. จากข้อที่แล้ว มีกี่วิธีที่จะเขียน $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k}$ ให้เป็นผลคูณของจำนวนนับ 2 จำนวน ที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และแต่ละจำนวนมีค่ามากกว่า 1 (ลำดับของจำนวนทั้งสองไม่มีความสำคัญ)
15. จะจัดคน 5 คน เข้าพักในโรงแรมซึ่งมีห้องว่าง 2 ห้อง ห้องหนึ่งพักได้ 2 คน อีกห้องพักได้ 3 คน จะจัดได้แตกต่างกันกี่วิธี
16. ดินสอสี 10 แท่ง แบ่งเป็น 3 กอง ๆ ละ 2, 3, 5 แท่ง จะแบ่งได้กี่วิธี
17. แบ่งคน 10 คน เข้าพักในห้อง 3 ห้อง แต่ละห้องพักได้ 3, 3, 4 คน ตามลำดับ จะแบ่งได้กี่วิธี
18. แบ่งคน 10 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน 2 กลุ่ม และ 4 คน อีก 1 กลุ่ม จะแบ่งได้กี่วิธี
19. แบ่งคน 10 คน ออกเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน 2 กลุ่ม กลุ่มละ 2 คน 2 กลุ่ม จะแบ่งได้กี่วิธี
20. มีคน 10 คน จะจับคู่เพื่อเล่นเกมวิ่ง 3 ขา ได้กี่วิธี
21. แบ่งหนังสือ 20 เล่ม ออกเป็น 6 กอง กองละ 3 เล่ม 4 กอง กองละ 4 เล่ม 2 กอง จะแบ่งได้กี่วิธี
22. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 12 เล่ม นำไปแจกให้ ก, ข และ ค จะแจกได้กี่วิธี ถ้าต้องการให้ได้คนละเท่า ๆ กัน
 - 22.1 นาย ก ได้ 2 เล่ม อีก 2 คน ได้คนละ 5 เล่ม
 - 22.2 มีคนหนึ่งได้ 2 เล่ม อีก 2 คน ได้คนละ 5 เล่ม

23. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 5 เล่ม นำไปแจกให้ ก และ ข ได้กัวิธี ถ้าต้องการให้คนหนึ่งได้ 2 เล่ม ส่วนอีกคนหนึ่งได้ 3 เล่ม
24. มีนักเรียน 15 คน ในจำนวนนี้มี นาย ก, ข และ ค รวมอยู่ด้วย ต้องการแบ่งนักเรียนออกเป็น 3 กลุ่มๆ ละเท่าๆ กัน จะแบ่งได้กัวิธี เมื่อต้องการให้
 - 24.1 นาย ก, ข, ค อยู่กลุ่มเดียวกัน
 - 24.2 นาย ก, ข, ค อยู่คนละกลุ่ม
25. มีนักเรียน 15 คน ในจำนวนนี้มีนาย ก, ข, ค รวมอยู่ด้วย ต้องการแบ่งนักเรียนเข้าห้องพักซึ่งมี 3 ห้อง โดยที่พักได้ห้องละ 5 คน จะแบ่งได้กัวิธี ถ้า
 - 25.1 นาย ก, ข, ค อยู่ห้องเดียวกัน
 - 25.2 นาย ก, ข, ค อยู่คนละห้อง
26. ครู 3 คน นักเรียน 5 คน จะเข้าพักในห้องพัก ซึ่งมี 3 ห้อง โดยที่มี 2 ห้องพัก ได้ 3 คน ส่วนอีกห้องพักได้ 2 คน จะแบ่งคนเข้าพักได้กัวิธี เมื่อต้องการให้
 - 26.1 พักอย่างไรก็ได้
 - 26.2 ครูพักห้องเดียวกันหมด
 - 26.3 ครูพักคนละห้อง
27. มีคน 8 คน ซึ่งรวม นาย ก, ข, ค ด้วย ต้องการให้คนทั้งหมดเข้าพักในห้อง 3 ห้อง ซึ่งพักได้ห้องละ 2, 3, 4 คน ตามลำดับ จะแบ่งคนเข้าพักได้กัวิธี เมื่อต้องการให้
 - 27.1 พักอย่างไรก็ได้
 - 27.2 นาย ก, ข, ค พักห้องเดียวกัน
 - 27.3 นาย ก, ข, ค พักคนละห้อง
28. ต้องการจัดพนักงาน 6 คน ออกเป็น 3 กลุ่ม โดยจัดกลุ่มละกี่คนก็ได้ จะจัดได้กัวิธี ถ้า
 - 28.1 แต่ละกลุ่มแตกต่างกันหมด
 - 28.2 ไม่มีความแตกต่างระหว่างกลุ่มที่เท่ากัน
29. มีเงิน 20 บาท แบ่งให้เด็ก 5 คน ได้กัวิธี ถ้า
 - 29.1 ทุกคนต้องได้อย่างน้อย 1 บาท
 - 29.2 บางคนอาจไม่ได้รับ
30. ทอดลูกเต๋า 3 ลูก 1 ครั้ง จงหาจำนวนวิธีที่จะได้ผลบวกของแต้มเป็น 8
31. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวก 4 หลัก จากเลข 0 – 9 โดยที่แต่ละหลักซ้ำกันได้ และผลบวกของตัวเลขทุกหลักมีค่าเท่ากับ 9 จะสร้างได้กัจำนวน

32. มีจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 – 1,000,000 ก็จำนวน ซึ่งมีผลบวกของเลขแต่ละหลัก
- 32.1 เท่ากับ 6
 - 32.2 น้อยกว่า 6
33. มีของต่างกัน 5 ชิ้น แจกให้เด็ก 3 คน ได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้าต้องการให้
- 33.1 บางคนอาจไม่ได้รับ
 - 33.2 ได้ 2 ชิ้น 2 คน ได้ 1 ชิ้น 1 คน
 - 33.3 ทุกคนต้องได้อย่างน้อยคนละ 1 ชิ้น
34. มีลูกอม 20 เม็ด มีอยู่ 4 ชนิดๆ ละ 7, 6, 5, 2 เม็ด ตามลำดับ จะแบ่งให้คน 4 คน ได้กี่วิธี โดยที่
- 34.1 บางคนอาจไม่ได้รับก็ได้
 - 34.2 ทุกคนต้องได้ชนิดแรกอย่างน้อย 1 เม็ด
35. แจกของ 12 ชิ้น ให้คน 4 คน ให้ได้คนละ 3 ชิ้น ได้กี่วิธี ถ้า
- 35.1 ของเหมือนกันหมด
 - 35.2 ของต่างกันหมด
36. มีเงิน 15 บาท จะแจกให้เด็ก 3 คน ได้กี่วิธี ถ้า
- 36.1 ทุกคนต้องได้อย่างน้อย 1 บาท
 - 36.2 มีอยู่คนหนึ่งต้องได้ 3 บาท นอกนั้นได้อย่างน้อยคนละ 1 บาท
 - 36.3 มีอยู่คนหนึ่งต้องได้อย่างน้อย 3 บาท นอกนั้นได้อย่างน้อยคนละ 1 บาท
 - 36.4 ทุกคนต้องได้อย่างน้อย 2 บาท
37. จงหาจำนวนคำตอบของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$ เมื่อ $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ และ
- 37.1 $x_4 > 5$
 - 37.2 $x_1 > 2$ และ $x_2 \geq 3$
 - 37.3 ทุกตัวแปรมีความมากกว่า 6
38. ในการเลือกหัวหน้าห้องของนักเรียนห้องหนึ่ง ซึ่งมีนักเรียน 40 คน มีผู้สมัครเป็นหัวหน้าห้อง 5 คน นักเรียนทุกคนจะต้องออกเสียงคนละ 1 เสียง จงหาผลการลงคะแนนทั้งหมดที่เป็นไปได้ ถ้า
- 38.1 ผู้สมัครบางคนอาจไม่ได้รับคะแนนเสียงเลย
 - 38.2 ผู้สมัครทุกคนต้องได้อย่างน้อย 1 เสียง (เลือกตัวเอง)
 - 38.3 มีผู้สมัครคนหนึ่งได้คะแนนเสียงเกินครึ่ง
39. จงหาจำนวนคำตอบของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ เมื่อ $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $x_1 \leq 5$
40. มีจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 – 1,000,000 ก็จำนวน ซึ่งมีผลบวกของเลขแต่ละหลักเท่ากับ 13

41. จงหาจำนวนคำตอบของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100$ เมื่อ
 - 41.1 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$
 - 41.2 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
42. รถโดยสารคันหนึ่งเมื่อเริ่มต้นมีผู้โดยสาร 25 คน รถคันนี้จะหยุดให้ผู้โดยสารลง 10 แห่ง
 - 42.1 มีวิธีที่ผู้โดยสารจะเลือกลงได้
 - 42.2 ถ้าสนใจเพียงจำนวนผู้โดยสารที่ลงแต่ละแห่งโดยไม่สนใจว่าใครลง จะมีวิธีที่ผู้โดยสารลงได้
43. จากตัวอักษร A, B, C, D ต้องการเลือกมา 2 ตัว ซึ่งอาจซ้ำกันได้ จะมีวิธีเลือกทั้งหมดกี่วิธี และจะเขียนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้
44. ร้านขายไอศกรีมแห่งหนึ่งขายไอศกรีมต่างกัน 6 ชนิด เด็กคนหนึ่งต้องการสั่งไอศกรีม 4 ถ้วย โดยที่แต่ละถ้วยใส่ไอศกรีมเพียง 1 ชนิด เขาจะสั่งไอศกรีมได้ทั้งหมดกี่วิธี
45. มีแสดมโปอยู่ 10 แบบ จะสามารถซื้อแสดมโปได้ทั้งหมดกี่วิธี ถ้าต้องการซื้อ
 - 45.1 12 ดวง
 - 45.2 10 ดวง
46. ร้านขายเครื่องเขียนแห่งหนึ่งขายปากกาชนิดต่าง ๆ กัน 4 ชนิด ๆ ละ 6 ด้าม นาย ก ต้องการซื้อปากกา 6 ด้าม อยากทราบว่า นาย ก จะมีวิธีการสั่งซื้อปากกาได้ทั้งหมดกี่วิธี
47. สร้างจำนวนเต็มบวกที่มี 3 หลัก โดยใช้เลข 0 – 9 ได้กี่จำนวน ถ้าต้องการให้
 - 47.1 เลขหลักหน่วย $\leq$ เลขหลักสิบ $\leq$ เลขหลักร้อย
 - 47.2 เลขหลักหน่วย $\geq$ เลขหลักสิบ $\geq$ เลขหลักร้อย
48. กำหนด เซต A มีสมาชิก m ตัว และเซต B มีสมาชิก n ตัว จงหา
 - 48.1 จำนวนฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$
 - 48.2 จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $f: A \rightarrow B$ ($m \leq n$)
 - 48.3 จำนวนฟังก์ชันทั่วถึง $f: A \rightarrow B$ ($m \geq n$)
49. ในหอพักแห่งหนึ่งมี 6 ชั้น เจ้าของหอต้องการติดตั้งโทรทัศน์ 10 เครื่องตามชั้นต่าง ๆ โดยที่ชั้น 1 และชั้น 2 รวมกันมีโทรทัศน์ไม่เกิน 4 เครื่อง และอาจไม่ติดเครื่องในบางชั้นก็ได้ จงหาว่า มีวิธีติดโทรทัศน์กี่วิธี ถ้าสนใจแต่เพียงจำนวนโทรทัศน์ที่ติดในแต่ละชั้น
50. ในหอพักแห่งหนึ่งมี 6 ชั้น ต้องการจัดให้นักเรียน 10 คน เข้าพักตามชั้นต่าง ๆ ได้กี่วิธี ถ้าชั้น 1 และชั้น 2 รวมกันมีนักเรียนพักไม่เกิน 4 คน

แบบฝึกหัด เรื่องการเรียงสับเปลี่ยนและการจัดหมู่

1. จงหาจำนวนวิธีในการเลือก a และ b ที่ต่างกันจากเซต $\{1, 2, \dots, 100\}$ โดยที่ $|a - b| \leq 7$
2. จงหาจำนวนวิธีในจัดแถวผู้ชาย m คนและผู้หญิง n คน เมื่อ
 - 2.1 ไม่มีเงื่อนไขใดๆ
 - 2.2 ผู้หญิงทั้งหมดต้องยืนติดกัน
 - 2.3 ไม่มีผู้หญิงยืนติดกัน ($n \leq m + 1$)
 - 2.4 มีชายหญิงคู่หนึ่งที่ต้องการยืนติดกันเสมอ
3. จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$
4. จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$
5. (Spanish Olympiad 1985) จงแสดงว่า

$$(n+1)(n+2)\cdots(2n)$$
 เป็นพหุคูณของ 2^n สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
6. จงหาจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ 2548
7. จงหาจำนวนตัวหารร่วมทั้งหมดของ 48^{25} และ 84^{52}
8. จงแสดงว่าจำนวนตัวหารบวกทั้งหมดของ n^2 เป็นจำนวนคี่สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$
9. จงแสดงว่าจำนวนตัวหารบวกของ $\frac{111\dots 1}{2550}$ เป็นจำนวนคู่
10. ให้ $n, r \in \mathbb{N}$ โดยที่ $r \leq n$ จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้
 - 10.1 $P_r^n = n P_{r-1}^{n-1}$
 - 10.2 $P_r^n = (n - r + 1) P_{r-1}^n$
 - 10.3 $(n - r)P_r^n = n P_r^{n-1}$ เมื่อ $r < n$
 - 10.4 $P_r^{n+1} = P_r^n + r P_{r-1}^n$
 - 10.5 $P_{r+1}^{n+1} = (r+1)(P_r^n + P_r^{n-1} + \cdots + P_r^r)$
11. จงหาวิธีจัดคน 10 คนนั่งเก้าอี้ 14 ตัว และไม่ต้องการให้มีเก้าอี้ว่างติดกัน
12. จงหาจำนวนเลขฐานสองที่มี 1 อยู่ m ตัว และมี 0 อยู่ n ตัว และไม่มี 1 อยู่ติดกัน เมื่อ $m \leq n + 1$

13. ในกล่องใบหนึ่งมีบอลสีขาว 7 ลูกและบอลสีดำ 5 ลูก บอลสีเดียวกันเหมือนกันทุกประการ สุ่มหยิบบอลจากกล่องมาทีละลูกโดยไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกที่ 6 เป็นสีขาวและ 5 ลูกที่หยิบก่อนหน้ามีสีดำ 3 ลูก

14. จงหาจำนวนวิธีในการเลือกคน $2k$ คนจากสามภรรยา n คู่ เมื่อ $2k \leq n$ ตามเงื่อนไขต่อไปนี้

14.1 มีสามีภรรยาอยู่ k คู่

14.2 ไม่มีคู่สามีภรรยาอยู่เลย

14.3 มีคู่สามีภรรยาอย่างน้อยหนึ่งคู่

14.4 มีคู่สามีภรรยาสองคู่พอดี

15. ให้ $S = \{1, 2, \dots, n+1\}$ เมื่อ $n \geq 2$ และให้

$$T = \{(x, y, z) \in S^3 \mid x < z \text{ และ } y < z\}$$

โดยการนับ $|T|$ ด้วยสองวิธีที่ต่างกัน จงแสดงว่า

$$\sum_{k=1}^n k^2 = |T| = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

16. พิจารณาเซต A ของจุดในระนาบ xy

$$A = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 5\}$$

จงหาว่ามีสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดกี่รูปที่จุดยอดเป็นจุดในเซต A

17. มีจุด 20 จุดอยู่ในระนาบ ถ้าไม่มี 3 จุดใดๆ อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน ยกเว้นจุด A, B, C, D, E ที่อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน แล้วจงหา

17.1 จำนวนเส้นตรงที่ผ่านจุดอย่างน้อย 2 จุดใน 20 จุดนี้

17.2 จำนวนรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสามเป็นจุดใน 20 จุดนี้

18. จงหาจำนวนเลข 7 หลักที่เลขโดดแต่ละตัวปรากฏอย่างน้อย 2 ครั้ง เช่น 1225511, 6677676, 2222222

19. ให้ $A = \{1, 2, \dots, 500\}$ จงหาว่ามีกี่วิธีในการเลือกสมาชิก a, b และ c จากเซต A โดยที่

19.1 $4 \mid a + b + c$

19.2 $4 \mid a^2 + b^2 + c^2$

20. จงหาจำนวนวิธีในการจัดให้คน nk คนนั่งรอบโต๊ะกลม k โต๊ะที่ต่างกัน โดยแต่ละโต๊ะมีคนนั่งเท่ากัน

21. จงหาจำนวนนับ n ที่สอดคล้องกับสมการ

$$6\binom{9}{n}^{-1} = 6\binom{10}{n}^{-1} + 11\binom{11}{n}^{-1}$$

22. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$22.1 \quad \binom{n}{r} = \frac{n}{r} \binom{n-1}{r-1} \text{ เมื่อ } n \geq r \geq 1$$

$$22.2 \quad \binom{n}{r} = \frac{n-r+1}{r} \binom{n}{r-1} \text{ เมื่อ } n \geq r \geq 1$$

$$22.3 \quad \binom{n}{r} = \frac{n}{n-r} \binom{n-1}{r} \text{ เมื่อ } n > r \geq 0$$

$$22.4 \quad \binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$

23. จงใช้หลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง พิสูจน์ว่า $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

24. ให้ $X = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = \{S \subseteq X \mid n \notin S\}$ และ $B = \{S \subseteq X \mid n \in S\}$
จงใช้หลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงแสดงว่า $|A| = |B|$

25. จงแสดงว่า $r!$ หาร $(n+1)(n+2)\cdots(n+r)$ ลงตัวสำหรับทุก $n, r \in \mathbb{N}$

26. สร้างจำนวน 5 หลักทั้งหมดจากการเรียงสับเปลี่ยน 1, 2, 3, 4, 5 แล้วเรียงจากค่าน้อยไปค่ามาก

26.1 จงหาว่า 32514 อยู่ในตำแหน่งที่เท่าไร

26.2 จงหาจำนวนที่อยู่ในตำแหน่งที่ 100

27. นักวิทยาศาสตร์ 6 คนกำลังวิจัยงานลับชิ้นหนึ่งและต้องการเก็บเอกสารไว้ในตู้ใบหนึ่งที่จะเปิดได้ก็ต่อเมื่อนักวิทยาศาสตร์อยู่พร้อมกันอย่างน้อย 3 คน จงหาว่าต้องมีแม่กุญแจอย่างน้อยกี่อัน และนักวิทยาศาสตร์จะต้องถือกุญแจอย่างน้อยคนละกี่ดอก

28. จงหาจำนวนเซตย่อยทั้งหมดของเซตซ้ำ $M = \{r_1 \cdot a_1, r_2 \cdot a_2, \dots, r_n \cdot a_n\}$

29. จงหาจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของเซตซ้ำ $M = \{1 \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_n\}$

30. จงให้เหตุผลเชิงการนับว่าจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นจำนวนเต็ม สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

$$30.1 \quad \frac{(3n)!}{2^n \cdot 3^n}$$

$$30.2 \quad \frac{(6n)!}{5^n \cdot 3^{2n} \cdot 2^{4n}}$$

$$30.3 \quad \frac{(n^2)!}{(n!)^n}$$

$$30.4 \quad \frac{(n!)!}{(n!)^{(n-1)!}}$$

31. ให้ $r, n, k \in \mathbb{N}$ โดย $r \geq nk$ จงหาจำนวนวิธีในการแจกของ r ชิ้นที่เหมือนกันลงกล่อง n กล่องที่ต่างกัน และแต่ละกล่องมีของอย่างน้อย k ชิ้น

32. จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน $r, s, t, u, v, w, x, y, z$ เป็นเส้นตรง โดยมีเงื่อนไขว่า y อยู่ระหว่าง x และ z เสมอ แต่ x, y, z ไม่จำเป็นต้องอยู่ติดกัน

33. จงหาจำนวนผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$$

เมื่อ $x_i \geq i$ ทุก $i = 1, 2, 3, 4, 5$

34. จงหาจำนวนผลเฉลยของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

เมื่อ $x_1 \geq -3, x_2 \geq -1$ และ $x_3 \geq 2$

35. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$a + b + c + d \leq 2005$$

36. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$$

37. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของสมการ

$$rx_1 + x_2 + \cdots + x_n = kr$$

เมื่อ $k, r, n \in \mathbb{N}$

38. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ

$$(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 77$$

39. จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) = p$$

เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ p เป็นจำนวนเฉพาะ

40. เราสามารถเขียน 5 เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวก 3 จำนวนได้ 6 วิธี โดยลำดับมีความสำคัญ คือ

$$\begin{aligned} 5 &= 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 2 \\ &= 1 + 3 + 1 = 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 3 \end{aligned}$$

เมื่อกำหนด $r, n \in \mathbb{N}$ โดย $r \geq n$

จงหาจำนวนวิธีในการเขียน r เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวก n ตัว โดยลำดับมีความสำคัญ

41. จะกล่าวว่าจำนวนเต็มบวก d เพิ่มขึ้น เมื่อเขียน

$$d = d_m d_{m-1} \dots d_2 d_1$$

ในฐาน 10 แล้ว

$$0 < d_m \leq d_{m-1} \leq \dots \leq d_2 \leq d_1$$

ตัวอย่างเช่น 1337 และ 2455566799 ล้วนเป็นจำนวนเต็มบวกที่เพิ่มขึ้น

จงหาว่ามีจำนวนเต็มบวกทั้งหมดกี่จำนวนที่มีค่าน้อยกว่า 10^9 และเพิ่มขึ้น

42. ให้ $r, n \in \mathbb{Z}$ โดย $0 \leq n \leq r$ จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่หนึ่ง $s(r, n)$ คือจำนวนวิธีในการจัดของ r ชิ้นที่ต่างกันรอบโต๊ะกลม n ตัวที่เหมือนกัน โดยที่โต๊ะแต่ละตัวต้องมีอย่างน้อย 1 ชิ้น จงแสดงว่า

$$42.1 \quad s(r, 1) = (r-1)! \quad \text{เมื่อ } r \geq 1$$

$$42.2 \quad s(r, 2) = (r-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{r-1} \right) \quad \text{เมื่อ } r \geq 2$$

$$42.3 \quad s(r, r-1) = \binom{r}{2} \quad \text{เมื่อ } r \geq 2$$

$$42.4 \quad s(r, r-2) = \frac{1}{24} r(r-1)(r-2)(3r-1) \quad \text{เมื่อ } r \geq 2$$

$$42.5 \quad \sum_{n=0}^r s(r, n) = r!$$

43. จงแสดงว่า

$$x(x+1)(x+2)\dots(x+r-1) = \sum_{n=0}^r s(r, n) x^n$$

ทุก $r \in \mathbb{N}$

44. ให้ $r, n \in \mathbb{Z}$ โดย $0 \leq n \leq r$ จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง $S(r, n)$ คือจำนวนวิธีในการแจกของ r ชิ้นที่ต่างกันลงกล่อง n กล่องที่เหมือนกัน โดยไม่มีกล่องใดว่าง จงแสดงว่า

$$44.1 \quad S(r, 2) = 2^{r-1} - 1$$

$$44.2 \quad S(r, 3) = \frac{1}{2}(3^{r-1} + 1) - 2^{r-1}$$

$$44.3 \quad S(r, r-1) = \binom{r}{2}$$

$$44.4 \quad S(r, r-2) = \binom{r}{3} + 3\binom{r}{4}$$

45. จงแสดงว่า

$$x^r = \sum_{n=1}^r S(r, n) x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$

ทุก $r \in \mathbb{N}$

46. ให้ $k, m, n \in \mathbb{N}$ และ $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \dots, k\}$ จงหาจำนวนฟังก์ชัน $f: \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$ ทั้งหมด เมื่อ

46.1 ไม่มีเงื่อนไขใดๆ

46.2 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดย $n \leq m$

46.3 f มีสมบัติว่าถ้า $a < b$ ใน $\mathbb{N}_n$ แล้ว $f(a) < f(b)$ ใน $\mathbb{N}_m$ โดย $n \leq m$

46.4 f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้แสดงคำตอบในรูปของ $S(n, m)$ ซึ่งเป็นจำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง

47. (Putnam 1960) ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงหาจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ

$$\frac{xy}{x+y} = n$$

48. (APMO 1990) ให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

และให้ S_k เป็นผลรวมของผลคูณของ $a_1, a_2, \dots, a_n$ ที่ละ k ตัว จงแสดงว่า

$$S_k S_{n-k} \geq \binom{n}{k}^2 a_1 a_2 \cdots a_n$$

ทุก $k = 1, 2, \dots, n-1$

49. (AIME 1983) สำหรับเซต $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ และแต่ละเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่าง นิยามผลบวกสลับดังนี้ เรียงจำนวนทั้งหมดจากมากไปน้อย เริ่มจากจำนวนที่มีค่ามากที่สุด บวกและลบสมาชิกแต่ละตัวสลับกันไป ตามลำดับ (เช่น ผลบวกสลับของ $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ เป็น $9 - 6 + 4 - 2 + 1 = 6$ และผลบวกสลับของ $\{5\}$ คือ 5) จงหาผลบวกของผลบวกสลับของทุกเซตย่อยเมื่อ $n = 7$

50. (AIME 1986) ให้ S เป็นผลบวกของลอการิทึมฐาน 10 ของตัวหารแท้ทั้งหมดของ 1,000,000 (ตัวหารแท้ของจำนวนนับใด คือตัวหารบวกทั้งหมดยกเว้น 1 และตัวมันเอง) จงหาจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงกับ S ที่สุด

51. (AIME 1986) โยนเหรียญอันหนึ่ง 15 ครั้งและบันทึกหน้าที่ขึ้นตามลำดับ แล้วสังเกตรูปแบบของผลการโยนติดกันสองครั้ง เช่น HHTTHHHHTHHTTTT มี HH อยู่ 5 ครั้ง มี HT อยู่ 3 ครั้ง มี TH อยู่ 2 ครั้ง และมี TT อยู่ 4 ครั้ง จงหาว่ามีลำดับการโยนเหรียญหนึ่งอัน 15 ครั้งทั้งหมดกี่วิธีที่มี HH, HT, TH และ TT อยู่ 2, 3, 4 และ 5 ครั้ง ตามลำดับ

52. (AIME 1988) ให้ $\frac{m}{n}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำของความน่าจะเป็นเมื่อเลือกตัวหารบวกของ 10^{99} มาอย่างสุ่ม แล้วจะเห็นพหุคูณของ 10^{88} จงหาค่าของ $m + n$

บทที่ 2

สัมประสิทธิ์ทวินาม

2.1 ทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบททวินามที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ เซอร์ ไอแซก นิวตัน (ค.ศ. 1643-1727) เป็นผู้ค้นพบ ในปี ค.ศ. 1676

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 0$ และจำนวนจริง x และ y ใดๆ

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

บทพิสูจน์ (อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$“(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}x^{n-r}y^r”$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$

เนื่องจาก $(x + y)^0 = 1 = \binom{0}{0}x^0y^0$ จึงได้ $P(0)$ เป็นจริง

สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนเต็ม $k \geq 0$ ใดๆ นั่นคือ

$$(x + y)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r}x^{k-r}y^r$$

ต้องการพิสูจน์ว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย โดยสังเกตว่า

$$\begin{aligned}
 (x+y)^{k+1} &= (x+y)(x+y)^k \\
 &= (x+y) \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k-r} y^r \\
 &= \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k-r+1} y^r + \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} x^{k-r} y^{r+1} \\
 &= \binom{k}{0} x^{k+1} + \binom{k}{1} x^k y + \binom{k}{2} x^{k-1} y^2 + \cdots + \binom{k}{k} x y^k \\
 &\quad + \binom{k}{0} x^k y + \binom{k}{1} x^{k-1} y^2 + \cdots + \binom{k}{k-1} x y^k + \binom{k}{k} y^{k+1}
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\binom{k}{0} = 1 = \binom{k+1}{0}$ และ $\binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k}$

และโดยอาศัยเอกลักษณ์ $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ จะได้

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0} x^{k+1} + \binom{k+1}{1} x^k y + \cdots + \binom{k+1}{k} x y^k + \binom{k+1}{k+1} y^{k+1}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$

บทพิสูจน์ (วิธีเชิงการนับ)

เป็นการเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่าสัมประสิทธิ์ของ $x^{n-r} y^r$ ในการกระจาย $(x+y)^n$ คือ $\binom{n}{r}$

ในการกระจาย

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y) \cdots (x+y)}_n$$

ต้องเลือก x หรือ y จากแต่ละวงเล็บ และหาผลคูณของพจน์ที่เลือกจากแต่ละวงเล็บ

ดังนั้น พจน์ $x^{n-r} y^r$ เกิดจากการเลือก y จาก r วงเล็บ และเลือก x จากวงเล็บที่เหลือ

เลือก r วงเล็บจาก n วงเล็บได้ $\binom{n}{r}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างพจน์ $x^{n-r} y^r$ คือ $\binom{n}{r}$ ตามต้องการ

■

เนื่องจาก $\binom{n}{r}$ เป็นสัมประสิทธิ์ในการกระจายทวินาม $(x+y)^n$ จึงมีชื่อเรียกว่า สัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficients) นอกจากทฤษฎีบททวินามจะมีประโยชน์ในการกระจาย $(x+y)^n$ แล้วยังนำไปประยุกต์ใช้ได้หลากหลาย ตัวอย่างหนึ่งที่น่าสนใจคือ เอกลักษณะเกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ทวินาม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.1.1 จงแสดงว่า $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 โดยการแทนค่า $x = y = 1$ ในการกระจายทวินาม $(x+y)^n$ จะได้

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = (1+1)^n = 2^n$$

วิธีที่ 2 ให้ X เป็นเซตที่มีสมาชิก n ตัว และ $P(X)$ เป็นเซตกำลังของ X กล่าวคือเป็นเซตของเซตย่อยทั้งหมดของ X เราจะนับ $|P(X)|$ ด้วยวิธีที่ต่างกันสองวิธี

สำหรับแต่ละ $r = 0, 1, \dots, n$ จำนวนเซตย่อยของ X ที่มีสมาชิก r ตัว คือ $\binom{n}{r}$ ดังนั้น

$$|P(X)| = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}$$

ในอีกทางหนึ่ง ในการสร้างเซตย่อยของ X เรามี 2 วิธีในการเลือกหรือไม่เลือกสมาชิกแต่ละตัว นั่นคือ $|P(X)| = 2^n$ ดังนั้น

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

ตามต้องการ ■

ตัวอย่าง 2.1.2 จงแสดงว่า $\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

วิธีทำ โดยการแทนค่า $x = 1$ และ $y = -1$ ในการกระจายทวินาม $(x+y)^n$ จะได้

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} = (1-1)^n = 0$$

■

ตัวอย่าง 2.1.3 จงแสดงว่า $\sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 สังเกตว่า

$$r \binom{n}{r} = n \binom{n-1}{r-1}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} &= \sum_{r=1}^n n \binom{n-1}{r-1} = n \sum_{r=1}^n \binom{n-1}{r-1} \\ &= n \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} \quad (s = r-1) \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 แทน $y = 1$ ในการกระจายทวินาม $(x+y)^n$ จะได้

$$(x+1)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง จะได้

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} x^{r-1}$$

แทน $x = 1$ จะได้

$$\sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} = n(1+1)^{n-1} = n \cdot 2^{n-1} \quad \blacksquare$$

สำหรับจำนวนเต็ม r และ n ที่ $0 \leq r \leq n$ เราได้นิยาม $\binom{n}{r}$ หรือ C_r^n เป็นจำนวนวิธีจัดหมู่ทีละ r สิ่งของของ n สิ่งที่แตกต่างกัน เพื่อความสะดวก จะขยายนิยามให้ $\binom{n}{r} = 0$ เมื่อ $r > n$ หรือ $r < 0$ ดังนั้น

$$\binom{n}{r} = \begin{cases} \frac{n!}{r!(n-r)!} & \text{เมื่อ } 0 \leq r \leq n \\ 0 & \text{เมื่อ } r > n \text{ หรือ } r < 0 \end{cases}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม r และ n ซึ่ง $n \geq 0$

ตัวอย่าง 2.1.4 สำหรับทุก $m, n, r \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 พิจารณาเอกลักษณ์ $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m (1+x)^n$

โดยการกระจายทวินามทั้งสองข้าง จะได้

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k &= \left(\sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) \\ &= \binom{m}{0} \binom{n}{0} + \left\{ \binom{m}{0} \binom{n}{1} + \binom{m}{1} \binom{n}{0} \right\} x \\ &\quad + \left\{ \binom{m}{0} \binom{n}{2} + \binom{m}{1} \binom{n}{1} + \binom{m}{2} \binom{n}{0} \right\} x^2 \\ &\quad + \cdots + \binom{m}{m} \binom{n}{n} x^{m+n} \end{aligned}$$

เปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของ x^r ของทั้งสองข้าง จะได้

$$\binom{m+n}{r} = \binom{m}{0} \binom{n}{r} + \binom{m}{1} \binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r} \binom{n}{0}$$

วิธีที่ 2 ให้ $X = \{a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ เป็นเซตของของที่แตกต่างกัน $m+n$ ชิ้น ให้ A เป็นการจับหมู่ทีละ r สิ่งของ X เราจะนับจำนวนเซต A ทั้งหมด

สมมติว่า A มีสมาชิกในกลุ่ม $a_1, a_2, \dots, a_m$ อยู่ i ตัว เมื่อ $i = 0, 1, \dots, r$

จะเห็นว่าสมาชิกอีก $r-i$ ตัวที่เหลือมาจากกลุ่ม $b_1, b_2, \dots, b_n$

จึงมีเซต A ที่มีสมาชิกดังกล่าวอยู่ $\binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$ วิธี

โดยหลักการบวก จึงได้

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}$$

■

ข้อสังเกต ถ้า $m = n = r$ จะได้เอกลักษณ์

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

2.2 รูปสามเหลี่ยมปาสกาล

เราสามารถจัดเรียงสัมประสิทธิ์ทวินาม $\binom{n}{r}$ เป็นรูปสามเหลี่ยม โดย n มีค่าเพิ่มขึ้นจากบนลงล่าง และ r มีค่าเพิ่มขึ้นจากซ้ายไปขวาได้ดังรูปข้างล่าง

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} \\
 \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6}
 \end{array}$$

เมื่อคำนวณสัมประสิทธิ์ทวินามแต่ละตัว จะได้ตารางข้างล่าง

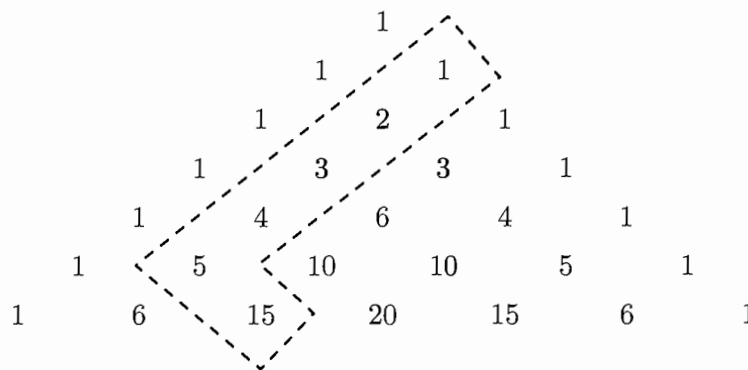
$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & &
 \end{array}$$

รูปสามเหลี่ยมในลักษณะที่แสดงข้างบนนี้เป็นรูปหนึ่งที่สำคัญในประวัติของคณิตศาสตร์และรู้จักกันอย่างแพร่หลายในชื่อ รูปสามเหลี่ยมปาสกาล(Pascal's triangle) ตามชื่อของนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ เบลส์ ปาสกาล (ค.ศ. 1623-1662) ที่เป็นผู้ค้นพบในปี ค.ศ. 1653

จากรูปสามเหลี่ยมปาสกาล เราได้ข้อสังเกตบางประการดังนี้

1. เอกลักษณ์ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ แสดงให้เห็นว่าด้านซ้ายและขวาของรูปสามเหลี่ยมปาสกาลสมมาตรกัน
2. เอกลักษณ์ $\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$ กล่าวว่าสมาชิกแต่ละตัวในรูปสามเหลี่ยมปาสกาลมีค่าเท่ากับผลรวมของสมาชิก 2 ตัวที่อยู่เหนือขึ้นไปหนึ่งระดับและอยู่เยื้องไปทางซ้ายและทางขวา
3. เอกลักษณ์ในตัวอย่าง 2.1.1 กล่าวว่าเมื่อรวมสมาชิกในแถว n (นับแถวตามค่า n ในสัมประสิทธิ์ทวินาม $\binom{n}{r}$ และแถวแรกเป็นแถว 0) จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 2^n เสมอ และเอกลักษณ์ในตัวอย่าง 2.1.2 กล่าวว่าเมื่อรวมสมาชิกในแถว n (ยกเว้นแถว 0) โดยสลับเครื่องหมายบวกและลบจะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 0 เสมอ

รูปข้างล่างแสดงให้เห็นอีกเอกลักษณ์หนึ่งจากรูปสามเหลี่ยมปาสกาล



เมื่อบวกจำนวนในรูปสามเหลี่ยมปาสกาล เริ่มจากตำแหน่งขวามือใด ๆ ไล่ลงตำแหน่งล่างเยื้องไปทางซ้ายดังรูป จนถึงตำแหน่งที่ต้องการ ผลบวกจะเท่ากับจำนวนที่อยู่ล่างลงไปหนึ่งระดับและอยู่เยื้องไปทางขวาของตำแหน่งสุดท้าย เช่น $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ ซึ่งเมื่อเขียนในรูปของสัมประสิทธิ์ทวินาม จะได้

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \binom{3}{1} + \binom{4}{1} + \binom{5}{1} = \binom{6}{2}$$

ซึ่งเห็นได้ชัดว่ากรณีเฉพาะที่แสดงให้เห็นนี้เป็นจริงเนื่องจาก

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \cdots + \binom{n}{1} = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะพิสูจน์ข้อสังเกตดังกล่าว

ตัวอย่าง 2.1.1 สำหรับทุก $n, r \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n \geq r$ จงแสดงว่า

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 (อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)

สำหรับแต่ละ $r \in \mathbb{N}$ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$ ”

ต้องการแสดงว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq r$

เนื่องจาก $\binom{r}{r} = 1 = \binom{r+1}{r+1}$ จึงได้ $P(r)$ จริง

สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริงสำหรับจำนวนนับ $k \geq r$ ใดๆ นั่นคือ

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r+1}$$

จะต้องแสดงว่า $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย พิจารณา

$$\begin{aligned} \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{k+1}{r} &= \left[\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \cdots + \binom{k}{r} \right] + \binom{k+1}{r} \\ &= \binom{k+1}{r+1} + \binom{k+1}{r} = \binom{k+2}{r+1} \\ &= \binom{(k+1)+1}{r+1} \end{aligned}$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq r$

วิธีที่ 2 (วิธีเชิงการนับ)

ให้ $X = \{a_1, a_2, \dots, a_{n+1-r}, \dots, a_{n+1}\}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก $n+1$ ตัว จำนวนเซตย่อย A ที่มีสมาชิก $r+1$ ตัวของ X มีอยู่ $\binom{n+1}{r+1}$ เซตย่อย แต่เราจะนับจำนวนด้วยอีกวิธีหนึ่ง โดยการแจกแจงกรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกัน $n+1-r$ กรณีต่อไปนี้

กรณีที่ 1 $a_1 \in A$ เลือกสมาชิกอีก r ตัวจาก $X - \{a_1\}$ ทำได้ $\binom{n}{r}$ วิธี

กรณีที่ 2 $a_1 \notin A$ และ $a_2 \in A$ เลือกสมาชิกอีก r ตัวจาก $X - \{a_1, a_2\}$ ทำได้ $\binom{n-1}{r}$ วิธี

$\vdots$

กรณีที่ $n-r$ $a_1, a_2, \dots, a_{n-1-r} \notin A$ และ $a_{n-r} \in A$ เลือกสมาชิกอีก r ตัวจาก

$X - \{a_1, a_2, \dots, a_{n-r}\}$ ซึ่งมีสมาชิกเหลืออยู่ $r+1$ ตัว ทำได้ $\binom{r+1}{r}$ วิธี

กรณีที่ $n+1-r$ $a_1, a_2, \dots, a_{n-r} \notin A$ เหลือสมาชิกอีก $r+1$ ตัวใน $X - \{a_1, a_2, \dots, a_{n-r}\}$

ซึ่งต้องเลือกทั้งหมด ทำได้ $\binom{r+1}{r+1} = 1 = \binom{r}{r}$ วิธี

โดยหลักการบวก จึงได้

$$\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$$

■

ข้อสังเกต เอกลักษณ์ในตัวอย่าง 2.2.1 สามารถเขียนได้อีกรูปหนึ่ง ดังนี้

$$\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \dots + \binom{r+k}{k} = \binom{r+k+1}{k}$$

ตัวอย่าง 2.2.2 (IMO 1981) ให้ $1 \leq r \leq n$ พิจารณาเซตย่อยทั้งหมดที่มีสมาชิก r ตัวของเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ แต่ละเซตย่อยที่มีสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุด ให้ $F(n, r)$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดเหล่านั้น จงแสดงว่า

$$F(n, r) = \frac{n+1}{r+1}$$

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตย่อยของ X ที่มีสมาชิก r ตัว มีเซต A ได้ทั้งหมด $\binom{n}{r}$ เซต

ให้ m_A เป็นสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดของเซต A สังเกตว่า $1 \leq m_A \leq n-r+1$

เราจะนับจำนวนเซตย่อย A ที่ $m_A = k$ เมื่อ $1 \leq k \leq n-r+1$

นั่นคือ k เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A และมีสมาชิกอีก $r-1$ ตัวจากเซต $\{k+1, k+2, \dots, n\}$

นั่นคือ จำนวนเซตย่อย A ที่ $m_A = k$ เท่ากับ $\binom{n-k}{r-1}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{r} F(n, r) &= \sum_{k=1}^{n-r+1} k \binom{n-k}{r-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-r+1} [(n+1) - (n-k+1)] \binom{n-k}{r-1} \\
 &= (n+1) \sum_{k=1}^{n-r+1} \binom{n-k}{r-1} - \sum_{k=1}^{n-r+1} (n-k+1) \binom{n-k}{r-1}
 \end{aligned}$$

สังเกตว่า $(n-k+1) \binom{n-k}{r-1} = r \binom{n-k+1}{r}$ ดังนั้น

$$\binom{n}{r} F(n, r) = (n+1) \sum_{k=1}^{n-r+1} \binom{n-k}{r-1} - r \sum_{k=1}^{n-r+1} \binom{n-k+1}{r}$$

โดยอาศัยเอกลักษณ์จากตัวอย่าง 2.2.1 จะได้

$$\binom{n}{r} F(n, r) = (n+1) \binom{n}{r} - r \binom{n+1}{r+1}$$

แทน $\binom{n+1}{r+1} = \frac{n+1}{r+1} \binom{n}{r}$ จะได้

$$F(n, r) = (n+1) - r \left(\frac{n+1}{r+1} \right) = \frac{n+1}{r+1}$$

ตามต้องการ ■

2.3 สัมประสิทธิ์อเนกนามและทฤษฎีบทอเนกนาม

ในหัวข้อนี้เราจะขยายการกระจายทวินามไปสู่การกระจายอเนกนาม ซึ่งคือการกระจาย

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$$

โดยที่ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $m \geq 2$

ก่อนอื่นจะขยายสัมประสิทธิ์ทวินามไปสู่ สัมประสิทธิ์อเนกนาม(multinomial coefficients) ดังนี้

ให้ $n_1, n_2, \dots, n_m$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ นิยาม

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}$$

ซึ่งคือจำนวนวิธีในเรียงสับเปลี่ยนของ n ชิ้นที่มีของซ้ำ โดยแบ่งเป็นของชนิดที่ 1 จำนวน n_1 ชิ้น ของชนิดที่ 2 จำนวน n_2 ชิ้น ... ของชนิดที่ m จำนวน n_m ชิ้น กล่าวอีกแง่หนึ่ง คือจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงสับเปลี่ยนของ เซตซ้ำ $\{n_1 \cdot x_1, n_2 \cdot x_2, \dots, n_m \cdot x_m\}$

พิจารณาการกระจาย

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \underbrace{(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_m)}_n$$

ซึ่งเป็นการคูณกันของ $x_1 + x_2 + \cdots + x_m$ ทั้งหมด n วงเล็บ ในแต่ละวงเล็บจะต้องเลือก $x_1, x_2, \dots, x_m$ มาเพียงพจน์เดียว แล้วคูณกับพจน์ที่เลือกจากวงเล็บที่เหลือทั้งหมด ดังนั้น แต่ละพจน์จากการกระจายจะอยู่ในรูป

$$x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

โดยที่ $n_1, n_2, \dots, n_m$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$

สัมประสิทธิ์ของ $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ คือจำนวนวิธีในการสร้างพจน์นี้นั่นเอง ซึ่งเราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงจากเซตของวิธีการเลือกพจน์จากแต่ละวงเล็บไปเซตของการเรียงสับเปลี่ยนของเซตซ้ำ $\{n_1 \cdot x_1, n_2 \cdot x_2, \dots, n_m \cdot x_m\}$ ดังนั้น พจน์ $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ จึงปรากฏในการกระจายอเนกนามในรูป

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$$

ทฤษฎีบทเนกนาม (Multinomial Theorem)

สำหรับทุก $m, n \in \mathbb{N}$ และสำหรับจำนวนจริง $x_1, x_2, \dots, x_m$ ใดๆ

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n \\ n_1, n_2, \dots, n_m \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_m^{n_m}$$

ตัวอย่าง 3.1.1 จงกระจาย $(x + y + z)^4$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทเนกนาม

$$\begin{aligned} (x + y + z)^4 &= \binom{4}{4, 0, 0} x^4 + \binom{4}{0, 4, 0} y^4 + \binom{4}{0, 0, 4} z^4 \\ &\quad + \binom{4}{3, 1, 0} x^3 y + \binom{4}{0, 3, 1} y^3 z + \binom{4}{1, 0, 3} z^3 x \\ &\quad + \binom{4}{1, 3, 0} x y^3 + \binom{4}{0, 1, 3} y z^3 + \binom{4}{3, 0, 1} z x^3 \\ &\quad + \binom{4}{2, 2, 0} x^2 y^2 + \binom{4}{0, 2, 2} y^2 z^2 + \binom{4}{2, 0, 2} x^2 z^2 \\ &\quad + \binom{4}{2, 1, 1} x^2 y z + \binom{4}{1, 2, 1} x y^2 z + \binom{4}{1, 1, 2} x y z^2 \\ &= x^4 + y^4 + z^4 + 4x^3 y + 4y^3 z + 4z^3 x + 4xy^3 + 4yz^3 + 4zx^3 \\ &\quad + 6x^2 y^2 + 6y^2 z^2 + 6x^2 z^2 + 12x^2 y z + 12xy^2 z + 12xyz^2 \end{aligned}$$

จากการกระจายเนกนาม เราจะได้ข้อสังเกตดังนี้

1. ถ้าแทน $x_1 = x_2 = \dots = x_m = 1$ ในการกระจายเนกนาม $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ จะได้

$$\sum_{\substack{n_1 + n_2 + \dots + n_m = n \\ n_1, n_2, \dots, n_m \geq 0}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m} = m^n$$

2. จำนวนพจน์ในการกระจายเนกนาม $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ คือจำนวนวิธีในการแจกลูกบอล n ลูกที่เหมือนกันลงกล่อง m กล่องที่ต่างกัน ซึ่งเท่ากับ $H_n^m = \binom{n + m - 1}{n}$

2.4 ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังใดๆ

จากที่ทราบแล้วว่าสามารถกระจาย $(1+x)^n$ ได้โดยทฤษฎีบททวินาม ดังนี้

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r$$

ซึ่งเป็นจริงเมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$ ทำให้เกิดคำถามว่าในกรณีที่ n มีค่าอื่นๆ จะกระจาย $(1+x)^n$ ได้หรือไม่

พิจารณากรณี $n = -1$ ก่อน เราทราบว่า

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^r$$

ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต และลู่เข้าเมื่อ $|x| < 1$ ถ้าหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง จะได้

$$-(1+x)^{-2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots$$

นั่นคือ

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - \dots = \sum_{r=0}^{\infty} (r+1)(-1)^r x^r$$

ซึ่งลู่เข้าเมื่อ $|x| < 1$ ถ้าหาอนุพันธ์ต่อไปเรื่อยๆ จะพบว่า

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{n-1} x^r$$

เมื่อ $|x| < 1$ ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ดังนี้

บทพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ “ $(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r$ เมื่อ $|x| < 1$ ”

ต้องการแสดงว่า $P(n)$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

เนื่องจาก $(1+x)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{1+r-1}{r} x^r$ จึงเห็นได้ว่า $P(1)$ เป็นจริง

สมมติให้ $P(k)$ เป็นจริงเมื่อ k เป็นจำนวนนับใด ๆ นั่นคือ

$$(1+x)^{-k} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{k+r-1}{r} x^r$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้าง จะได้

$$-k(1+x)^{-k-1} = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \binom{k+r-1}{r} (rx^{r-1})$$

สังเกตว่า

$$\begin{aligned} r \binom{k+r-1}{r} &= r \cdot \frac{(k+r-1)!}{r!(k-1)!} = \frac{(k+r-1)!}{(r-1)!(k-1)!} \\ &= k \cdot \frac{(k+r-1)!}{(r-1)!k!} \\ &= k \binom{k+r-1}{r-1} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(1+x)^{-k-1} = \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r-1} \binom{k+r-1}{r-1} x^{r-1}$$

โดยการเปลี่ยนตัวแปร $s = r-1$ จะได้

$$(1+x)^{-k-1} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{(k+1)+s-1}{s} x^s$$

นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริงด้วย

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงสรุปได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n ■

ข้อสังเกต ถ้าแทน x ในการกระจาย $(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{n+r-1}{r} x^r$ ด้วย $-x$ จะได้

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n+r-1}{r} x^r$$

ตัวอย่าง 2.4.1 จงกระจาย $(1+x)^{-4}$ เมื่อ $|x| < 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(1+x)^{-4} &= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{r+3}{r} x^r \\ &= \frac{1}{6} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r (r+1)(r+2)(r+3) x^r \\ &= 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + 35x^4 - \dots\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงแสดงว่า

$$\sum_{i=0}^r \binom{m+i}{m} \binom{n+r-i}{n} = \binom{m+n+r+1}{r}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม m, n, r ที่ไม่เป็นลบ

วิธีทำ พิจารณาเอกลักษณ์ $(1-x)^{-(m+n+2)} = (1-x)^{-(m+1)}(1-x)^{-(n+1)}$

ซึ่งเมื่อกระจายแต่ละพจน์จะได้

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+n+k+1}{k} x^k = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{m+i}{i} x^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+j}{j} x^j$$

สัมประสิทธิ์ของ x^r จากพจน์ทางซ้ายคือ $\binom{m+n+r+1}{r}$

สัมประสิทธิ์ของ x^r จากพจน์ทางขวาคือ

$$\binom{m}{0} \binom{n+r}{r} + \binom{m+1}{1} \binom{n+r-1}{r-1} + \dots + \binom{m+r}{r} \binom{n}{0}$$

โดยเอกลักษณ์ $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ จะได้

$$\binom{m}{m} \binom{n+r}{n} + \binom{m+1}{m} \binom{n+r-1}{n} + \dots + \binom{m+r}{m} \binom{n}{n} = \binom{m+n+r+1}{r}$$

ดังนั้น

$$\sum_{i=0}^r \binom{m+i}{m} \binom{n+r-i}{n} = \binom{m+n+r+1}{r}$$

ตามต้องการ

เราสามารถขยายทฤษฎีบททวินามให้ครอบคลุมการกระจาย $(1+x)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริงใดๆ ได้ เพื่อความสะดวก จะขยายบทนิยามสำหรับสัมประสิทธิ์ทวินามดังนี้

จากที่ทราบแล้วว่า เมื่อ n และ r เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq r \leq n$ นิยาม $\binom{n}{r}$ โดย

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

และเมื่อ n และ r เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq n < r$ นิยาม $\binom{n}{r} = 0$

เราจะขยายบทนิยามของสัมประสิทธิ์ทวินามให้ครอบคลุมกรณีที่ n เป็นจำนวนจริงใดๆ และ r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ในลักษณะที่คล้ายกับบทนิยามข้างต้นและครอบคลุมสิ่งที่นิยามมาก่อนหน้า ดังนี้

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

สังเกตว่าตัวเศษเป็นผลคูณของจำนวน r จำนวนที่ค่าลดลงไปที่ละ 1

ข้อสังเกต 1. ในกรณีที่ n และ r เป็นจำนวนเต็มที่ $0 \leq n < r$ จะเห็นได้ว่า

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n)\cdots(n-r+1)}{r!} = 0$$

2. พิจารณา

$$\begin{aligned} \binom{-n}{r} &= \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{r!} \\ &= (-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{r!} \\ &= (-1)^r \binom{n+r-1}{r} \end{aligned}$$

จึงสามารถเขียนการกระจายทวินามของ $(1+x)^{-n}$ ได้ในรูป

$$(1+x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-n}{r} x^r$$

โดยอาศัยบทนิยามของสัมประสิทธิ์ทวินามที่กล่าวมาแล้ว จะได้ทฤษฎีบททวินามสำหรับเลขชี้กำลังใดๆ ดังนี้

สำหรับจำนวนจริง n ใดๆ

$$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} x^r$$

ในกรณีที่ $n = 0, 1, 2, \dots$ อนุกรมดังกล่าวเป็นอนุกรมจำกัด
และในกรณีอื่นๆ อนุกรมจะลู่เข้าเมื่อ $|x| < 1$

บทพิสูจน์ของทฤษฎีบทนี้สามารถอ่านได้จากหนังสือแคลคูลัส เช่น James Stewart, *Calculus*, 5th Ed., Brooks/Cole, 2003, pp. 808-812

ตัวอย่าง 2.4.3 จงกระจาย $\sqrt{1+x}$ เมื่อ $|x| < 1$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= (1+x)^{1/2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{1/2}{r} x^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}-1\right) \left(\frac{1}{2}-2\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-r+1\right) x^r \\ &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2r-3}{2}\right) x^r \\ &= 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{r=2}^{\infty} (-1)^{r-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2r-3)}{r! \cdot 2^r} x^r \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัด เรื่องสัมประสิทธิ์ทวินาม

1. จงหาจำนวนเลขฐานสองที่มี $2n$ หลัก และเลข 0 ใน n หลักแรกมีจำนวนเท่ากับเลข 1 ใน n หลักสุดท้าย
2. ให้ $m, n, r \in \mathbb{N}$ จงหาจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก r ตัวของเซต $M = \{a_1, a_2, \dots, a_n, m \cdot a_{n+1}\}$ สำหรับแต่ละกรณีต่อไปนี้
 - 2.1 $r \leq m, r \leq n$
 - 2.2 $n \leq r \leq m$
 - 2.3 $m \leq r \leq n$
3. (AIME 1989) มีจุด 10 จุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง จะสร้างรูปหลายเหลี่ยมมุมที่มีจุดยอดอยู่ในจุดเหล่านี้ได้ทั้งหมดกี่รูป
4. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^6 ในการกระจาย $(1 + x + x^2)^{10}$
5. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{119} ในการกระจาย $(x + x^3 + x^5 + x^7)^{99}$
6. ให้ $X = \{1, 2, \dots, n\}$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$
ให้ $E = \{A \subseteq X \mid |A| \text{ เป็นจำนวนคู่}\}$ และ $O = \{A \subseteq X \mid |A| \text{ เป็นจำนวนคี่}\}$
จงแสดงว่า $|E| = |O|$ โดยการสร้างฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึงระหว่าง O กับ E
7. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{119} ในการกระจาย $(x + x^3 + x^5 + x^7)^{99}$
8. ให้ $1 \leq r \leq n$ พิจารณาเซตย่อยทั้งหมดที่มีสมาชิก r ตัวของเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ แต่ละเซตย่อยมีสมาชิกที่มีค่ามากที่สุด จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดเหล่านั้น
9. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^n และ x^{n+r} เมื่อ $1 \leq r \leq n$ ในการกระจาย

$$(1+x)^{2n} + x(1+x)^{2n-1} + x^2(1+x)^{2n-2} + \dots + x^n(1+x)^n$$
10. กำหนดพหุนามของ x โดย

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n}x^{2n} = (x + 2x^2 + \dots + nx^n)^2$$
 จงแสดงว่า

$$\sum_{i=n+1}^{2n} a_i = \frac{n(n+1)(5n^2 + 5n + 2)}{24}$$
11. จงแสดงว่า

$$P_r^r + P_r^{r+1} + \dots + P_r^{2r} = P_r^{2r+1}$$
 สำหรับทุกจำนวนเต็ม $r \geq 0$

12. ให้ m, n, r เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $r < n$ จงแสดงว่า

$$P_r^n + P_r^{n+1} + \cdots + P_r^{n+m} = \frac{1}{r+1} (P_{r+1}^{n+m+1} - P_{r+1}^n)$$

13. จงให้เหตุผลเชิงการนับเพื่อพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$13.1 \quad \binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}$$

$$13.2 \quad \binom{n+1}{m} = \binom{n}{m+1} + \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

$$13.3 \quad \binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$$

14. โดยเอกลักษณ์ $(1-x^2)^n = (1+x)^n(1-x)^n$ จงแสดงว่าสำหรับทุกจำนวนเต็ม $m \geq 0$ และ $m \leq n$

$$14.1 \quad \sum_{i=0}^{2m} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{2m-i} = (-1)^m \binom{n}{m}$$

$$14.2 \quad \sum_{i=0}^{2m+1} (-1)^i \binom{n}{i} \binom{n}{2m+1-i} = 0$$

$$14.3 \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}^2 = 0 \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

$$14.4 \quad \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}^2 = (-1)^{n/2} \binom{n}{n/2} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่}$$

15. จงหาค่าของผลบวก

$$S = m! + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \cdots + \frac{(m+n)!}{n!}$$

16. สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า

$$16.1 \quad \sum_{r=1}^n r^2 \binom{n}{r} = n(n+1)2^{n-2}$$

$$16.2 \quad \sum_{r=1}^n r^3 \binom{n}{r} = n^2(n+3)2^{n-3}$$

$$16.3 \quad \sum_{r=1}^n r^4 \binom{n}{r} = n(n+1)(n^2+5n-2)2^{n-4}$$

17. สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า

$$\sum_{r=1}^n \frac{1}{r} \binom{n}{r} = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r} (2^r - 1)$$

18. สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า

$$\sum_{r=1}^n r \binom{n}{r}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}$$

19. สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$19.1 \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \dots$$

$$19.2 \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{4} + \binom{n}{7} + \dots$$

$$19.3 \quad \binom{n}{2} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} + \dots$$

20. สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ จงหาผลบวกต่อไปนี้

$$20.1 \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \dots$$

$$20.2 \quad \binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \dots$$

$$20.3 \quad \binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \dots$$

$$20.4 \quad \binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \dots$$

21. สำหรับทุกจำนวนเต็ม m, n ที่ไม่เป็นลบ จงแสดงว่า

$$21.1 \quad \sum_{r=0}^n \frac{1}{r+1} \binom{n}{r} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1)$$

$$21.2 \quad \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^r}{r+1} \binom{n}{r} = \frac{1}{n+1}$$

$$21.3 \quad \sum_{r=m}^n \binom{n}{r} \binom{r}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m} \quad \text{เมื่อ } m \leq n$$

$$21.4 \quad \sum_{r=k}^m \binom{n+r}{n} = \binom{n+m+1}{n+1} - \binom{n+k}{n+1}$$

$$21.5 \quad \sum_{r=1}^{n-1} (n-r)^2 \binom{n-1}{r-1} = n(n-1) 2^{n-3}$$

$$21.6 \quad \sum_{r=0}^n \binom{2n}{r}^2 = \frac{1}{2} \left[\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}^2 \right]$$

$$21.7 \quad \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \binom{n}{r} \binom{p+r}{m+n} = \binom{p}{m} \binom{p}{n} \quad \text{เมื่อ } p \text{ เป็นจำนวนนับซึ่ง } p \geq m, n$$

$$21.8 \quad \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \binom{n}{r} \binom{p+m+n+r}{m+n} = \binom{p+m}{m} \binom{p+n}{n} \quad \text{เมื่อ } p \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

22. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ

22.1 จงแสดงว่า $\binom{p}{r} \equiv 0 \pmod{p}$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม r ซึ่ง $1 \leq r \leq p-1$

22.2 จงแสดงว่า $(1+x)^p \equiv (1+x^p) \pmod{p}$

23. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะคี่ จงแสดงว่า

$$\binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p}$$

24. ให้ $H_r^n = \binom{n+r-1}{r}$ จงแสดงเอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$24.1 \quad H_r^n = \frac{n}{r} H_{r-1}^{n+1}$$

$$24.2 \quad H_r^n = \frac{n+r-1}{r} H_{r-1}^n$$

$$24.3 \quad H_r^n = H_{r-1}^n + H_r^{n-1}$$

$$24.4 \quad \sum_{k=0}^r H_k^n = H_r^{n+1}$$

$$24.5 \quad \sum_{k=1}^r k H_k^n = n H_{r-1}^{n+2}$$

$$24.6 \quad \sum_{k=0}^r H_k^m H_{r-k}^n = H_r^{m+n}$$

25. (AIME 1983) ให้ $a_n = 6^n + 8^n$ จงหาเศษเหลือจากการหาร a_{83} ด้วย 49

26. (AIME 1986) ลำดับเพิ่ม 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... ประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกที่เป็นกำลังของ 3 หรือเป็นผลบวกของกำลังที่ต่างกันของ 3 จงหาพจน์ที่ 100 ของลำดับนี้

27. (AIME 1987) พหุนาม $1 - x + x^2 - x^3 + \cdots - x^{17}$ สามารถเขียนในรูปของ $a_0 + a_1 y + \cdots + a_{17} y^{17}$ โดยที่ $y = x + 1$ และ $a_0, a_1, \dots, a_{17}$ เป็นค่าคงตัว จงหาค่าของ a_2

28. (AIME 1991) ในการกระจายทวินามของ $(1 + 0.2)^{1000}$ จะได้

$$(1 + 0.2)^{1000} = A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + A_{1000}$$

โดยที่ $A_k = \binom{1000}{k} (0.2)^k$ สำหรับ $k = 0, 1, 2, \dots, 1000$

จงหาค่า k ที่ A_k มีค่ามากที่สุด

29. จงแสดงว่าในการกระจายอนเนกนาม

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n$$

มีพจน์ที่ต่างกันอยู่ทั้งหมด $H_n^m = \binom{n+m-1}{m}$ พจน์

30. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $m \in \mathbb{N}$

30.1 จงแสดงว่า $\binom{p}{n_1, n_2, \dots, n_m} \equiv 0 \pmod{p}$ เมื่อ $p \neq n_i$ ทุก $i = 1, 2, \dots, m$

30.2 จงแสดงว่า $\left(\sum_{i=1}^m x_i\right)^p \equiv \sum_{i=1}^m x_i^p \pmod{p}$

31. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $n \in \mathbb{N}$ เขียน n ในฐาน p ได้ดังนี้

$$n = n_0 + n_1 p + n_2 p^2 + \dots + n_k p^k$$

โดยที่ $n_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, k$

ให้ $m \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่าจำนวนพจน์ในการกระจาย $(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n$ ที่สัมประสิทธิ์หารด้วย p ไม่ลงตัวเท่ากับ

$$\prod_{i=0}^k \binom{n_i + m - 1}{m - 1}$$

32. จงแสดงว่า

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^2 \binom{2n + m - r}{2n} = \binom{m + n}{n}^2$$

33. จงแสดงว่า

$$\sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1}}{r} \binom{n}{r} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ทุกจำนวนนับ n

34. ให้ $r \geq 2$ เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n}{r}^{-1} = \frac{r}{r-1}$$

35. (Putnam 1958) ให้ $a_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r}^{-1}$ ทุกจำนวนนับ n จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

36. (Putnam 1962) ให้ $(z)_0 = 1$ และสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ให้

$$(z)_n = z(z-1)(z-2)\dots(z-n+1)$$

จงแสดงว่า

$$(x+y)_n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (x)_r (y)_{n-r}$$

37. (Putnam 1965) จงหาจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยน $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขว่าจำนวนเต็มทุกตัวยกเว้นตัวแรกจะต้องต่างจากจำนวนเต็มบางตัวทางซ้ายอยู่ 1

38. (Putnam 1965) จงแสดงว่า สำหรับจำนวนนับ n ใดๆ

$$\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left\{ \frac{n-2r}{n} \binom{n}{r} \right\}^2 = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$$

39. (Spanish MO 1988) ให้ $n \geq 2$ เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า

$$\sum_{r=1}^n r \sqrt{\binom{n}{r}} < \sqrt{2^{n-1} n^3}$$

40. ให้ $n, r \in \mathbb{N}$ และ $r \leq n$ จงแสดงว่า ห.ร.ม. ของ $\binom{n}{r}, \binom{n+1}{r}, \dots, \binom{n+r}{r}$ เท่ากับ 1

41. (Putnam 1972) ให้ $n, r \in \mathbb{N}$ และ $r+3 \leq n$ จงแสดงว่าไม่มีสมบัติทวินามที่เรียงติดกัน 4 ตัว

$$\binom{n}{r}, \binom{n}{r+1}, \binom{n}{r+2}, \binom{n}{r+3}$$

ที่เป็นลำดับเลขคณิต

42. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่า $\binom{n}{r}$ เป็นจำนวนคี่ ทุก $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ก็ต่อเมื่อมี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $n = 2^k - 1$

43. (Putnam 1974) โยนเหรียญไม่ถ่วงอันหนึ่ง n ครั้ง จงหาค่าเฉลี่ยของ $|H - T|$ เมื่อ H เป็นจำนวนหัว และ T เป็นจำนวนก้อย

44. (Putnam 1977) ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงแสดงว่า

$$\binom{pa}{pb} \equiv \binom{a}{b} \pmod{p}$$

สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b ซึ่ง $a \geq b \geq 0$

45. (Canadian MO 1983) จงแสดงว่าค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของเซต S ของจำนวนบวก n ตัวเท่ากับค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างทั้งหมดของ S

46. ให้ $k, n \in \mathbb{N}$ และให้ $S_k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ จงแสดงว่า

$$46.1 \quad \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} S_k(n) = (n+1)^m - 1$$

$$46.2 \quad S_m(n) - \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} S_k(n) = n^m \quad \text{เมื่อ } m \in \mathbb{N}$$

47. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามกำลัง n โดยที่ $P(k) = 2^k$ ทุก $k = 1, 2, \dots, n+1$ จงหาค่าของ $P(n+2)$

48. ให้ $S_n = \sum_{r=0}^n \binom{3n}{3r}$ จงแสดงว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n)^{\frac{1}{3n}} = 2$

49. ให้ $f_b(n)$ เป็นจำนวนหลักที่เป็น 0 เมื่อเขียน n ในฐาน b

49.1 จงหาค่าของ $S = 2^{f_{10}(1)} + 2^{f_{10}(2)} + \dots + 2^{f_{10}(10^{10}-1)}$

49.2 จงหาค่าของ $S_n = \sum_{k=1}^{b^n-1} a^{f_b(k)}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก และ b, n เป็นจำนวนนับซึ่ง $b \geq 2$

50. (Great Britain MO 1982) จงพิสูจน์ว่าเลขฐานสอง n หลักที่เมื่ออ่านจากซ้ายไปขวาแล้วพบ “01”

ทั้งหมด m ครั้ง มีอยู่ทั้งหมด $\binom{n+1}{2m+1}$ จำนวน

51. (23rd Moscow MO) มีคน n คนในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง ซึ่งมีทั้งคนที่รู้จักกันและไม่รู้จักกัน สำหรับทุกๆ 2 คนที่ไม่รู้จักกันจะมีเพื่อนร่วมกันจำนวน 2 คน และสำหรับทุกๆ 2 คนที่รู้จักกันจะไม่มีเพื่อนร่วมกันเลย จงพิสูจน์ว่าทุกคนมีเพื่อนเป็นจำนวนเท่าๆ กัน

52. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม สำหรับ $m = 1, 2, \dots$ นิยาม

$$A_m(n) = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} (-1)^k \left\{ \binom{n}{k} - \binom{n}{k-1} \right\}^m$$

จงพิสูจน์ว่าถ้า n เป็นจำนวนคี่แล้ว $A_2(n) = n A_1(n)$

53. ให้ $l, n, n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม โดย $l, n \leq m$ จงหาค่าของ

$$\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{m-i}{m-l} \binom{n}{j} \binom{m-n}{i-j}$$

54. ให้ $m, n, p, q, s \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{p}{r+s} \binom{q+r}{m+n} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \binom{q}{m+r} \binom{p+r}{n+s}$$

บทที่ 3

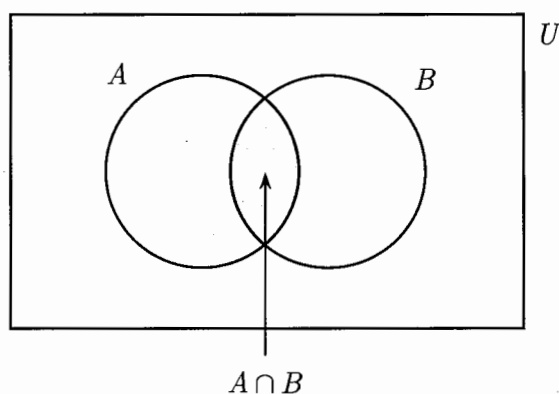
หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก

3.1 หลักการเบื้องต้น

เราได้ศึกษาหลักการบวก ซึ่งใช้นับจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซตจำกัดที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาถึงกฎที่ใช้ในการนับจำนวนสมาชิกของยูเนียนของเซตจำกัดที่อาจมีสมาชิกร่วมกันได้ เรียกว่า หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก(Principle of Inclusion and Exclusion) เราได้เคยศึกษาหลักการนี้มาบ้างแล้วในกรณีที่มีสองหรือสามเซต ในกรณีที่มีสองเซต มีสูตรว่า

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ทั้งนี้เนื่องจากในการนับจำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ ถ้านำจำนวนสมาชิกของ A และ B มารวมกัน จะได้ $|A| + |B|$ แต่ในจำนวนนี้ อาจมีสมาชิกบางตัวที่อยู่ในทั้งสองเซต ซึ่งจะถูกลบสองครั้ง จึงจำเป็นต้องหักจำนวนสมาชิกที่อยู่ในทั้งสองเซตออกไป จึงได้สูตรดังกล่าวข้างต้น



ตัวอย่าง 3.1.1 มีจำนวนเต็มสามหลักที่ขึ้นต้นด้วย 1 หรือลงท้ายด้วย 5

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มสามหลักที่ขึ้นต้นด้วย 1

ให้ B เป็นเซตของจำนวนเต็มสามหลักที่ลงท้ายด้วย 5

ดังนั้น เราต้องการนับจำนวนสมาชิกของ $A \cup B$

จำนวนเต็มสามหลักที่ขึ้นต้นด้วย 1 มีทั้งหมด $1 \times 10 \times 10 = 100$ จำนวน

จำนวนเต็มสามหลักที่ลงท้ายด้วย 5 มีทั้งหมด $9 \times 10 \times 1 = 90$ จำนวน

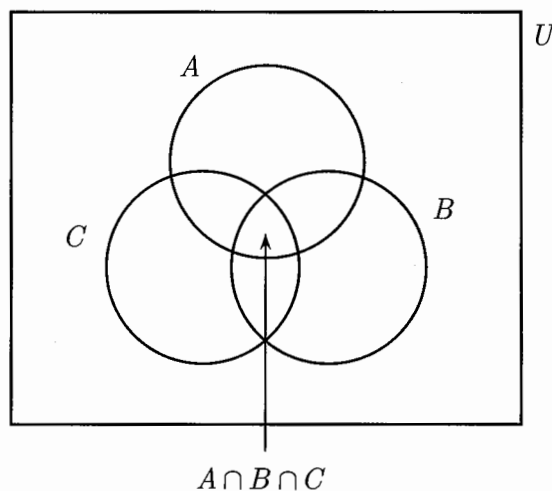
จำนวนเต็มสามหลักที่ขึ้นต้นด้วย 1 และลงท้ายด้วย 5 มีทั้งหมด $1 \times 10 \times 1 = 10$ จำนวน

ฉะนั้น $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 90 - 10 = 180$

สรุปได้ว่า จำนวนเต็มสามหลักที่ขึ้นต้นด้วย 1 หรือลงท้ายด้วย 5 มีทั้งหมด 180 จำนวน ■

ในกรณีที่มีสามเซต เราสามารถหาจำนวนสมาชิกของ $A \cup B \cup C$ ได้ในทำนองเดียวกัน โดยเริ่มต้นจากนำจำนวนสมาชิกของทั้งสามเซตมารวมกัน จะได้ $|A| + |B| + |C|$ แต่ว่าในค่านี้ เราอาจนับจำนวนสมาชิกที่อยู่ในเซตอย่างน้อยสองเซตเกินไป จึงจำเป็นต้องนำจำนวนสมาชิกของ $A \cap B$, $B \cap C$ และ $A \cap C$ มาหักออก ซึ่งจะได้ว่าขณะนี้สมาชิกที่อยู่ในสองเซตพอดีจะถูกนับหนึ่งครั้ง แต่ว่าอาจมีสมาชิกบางตัวที่อยู่ในทั้งสามเซต ซึ่งถูกนับสามครั้งในขั้นตอนแรก และต่อมาถูกลบออกไปสามครั้งในขั้นตอนที่สอง ทำให้เหลือศูนย์ตัวในค่าที่ได้ จึงจำเป็นต้องบวกเพิ่มจำนวนสมาชิกที่อยู่ในทั้งสามเซตเพื่อให้ได้ค่าที่ถูกต้อง ซึ่งสรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



ตัวอย่าง 3.1.2 ในที่ประชุมหนึ่งขององค์การการค้าโลก มีสมาชิกเข้าร่วมประชุม 70 คน ในบรรดาคนเหล่านี้ มี 47 คนที่พูดภาษาอังกฤษได้ มี 35 คนที่พูดภาษาฝรั่งเศสได้ มี 20 คนที่พูดภาษาเยอรมันได้ มี 23 คนที่พูดได้ทั้งอังกฤษและฝรั่งเศส มี 12 คนที่พูดได้ทั้งอังกฤษและเยอรมัน มี 11 คนที่พูด

ได้ทั้งฝรั่งเศสและเยอรมัน มี 5 คนที่พูดได้ทั้งสามภาษานี้ จงหาว่ามีกี่คนในที่ประชุมที่ไม่สามารถพูดภาษาใดในสามภาษานี้ได้

วิธีทำ ให้ E แทนเซตของคนที่พูดภาษาอังกฤษได้

ให้ F แทนเซตของคนที่พูดภาษาฝรั่งเศสได้

และให้ G แทนเซตของคนที่พูดภาษาเยอรมันได้

ฉะนั้นโจทย์ต้องการให้หาจำนวนสมาชิกของ $E' \cap F' \cap G'$

โดยกฎของเดอมอร์แกน จะได้ว่า $E' \cap F' \cap G' = (E \cup F \cup G)'$

ดังนั้น

$$|E' \cap F' \cap G'| = |U| - |E \cup F \cup G|$$

ต่อไป เราจะคำนวณหา $n(E \cup F \cup G)$ โดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออกของสามเซต

จากโจทย์ จะได้ว่า

$$|E| = 47, |F| = 35, |G| = 20$$

$$|E \cap F| = 23, |E \cap G| = 12, |F \cap G| = 11, |E \cap F \cap G| = 5$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} |E \cup F \cup G| &= |E| + |F| + |G| - |E \cap F| - |E \cap G| - |F \cap G| + |E \cap F \cap G| \\ &= 47 + 35 + 20 - 23 - 12 - 11 + 5 = 61 \end{aligned}$$

$$\text{ฉะนั้น } |E' \cap F' \cap G'| = |U| - |E \cup F \cup G| = 70 - 61 = 9 \text{ คน}$$

สรุปได้ว่า มี 9 คนในที่ประชุมที่ไม่สามารถพูดภาษาใดในสามภาษานี้ได้ ■

ตัวอย่าง 3.1.3 มีตัวอักษร a, b และ c อย่างละ 2 ตัว นำมาเรียงสับเปลี่ยนในแนวตรง ได้ทั้งหมดกี่วิธี

โดยที่ไม่มีตัวอักษรเดียวกันอยู่ติดกัน

วิธีทำ ให้ U เป็นเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดของตัวอักษร a, b และ c อย่างละ 2 ตัว

จะได้ว่า จำนวนสมาชิกของ U มีค่าเท่ากับ $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ จำนวน

ในการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนใน U ที่ไม่มีตัวอักษรเดียวกันอยู่ติดกัน เราจะหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนใน U ที่มีตัวอักษรเดียวกันอยู่ติดกัน แล้วนำไปลบออกจากจำนวนสมาชิกของ U

ให้ A เป็นเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนใน U ที่มี ตัวอักษร a ทั้งสองตัวอยู่ติดกัน

ให้ B เป็นเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนใน U ที่มี ตัวอักษร b ทั้งสองตัวอยู่ติดกัน

ให้ C เป็นเซตของวิธีเรียงสับเปลี่ยนใน U ที่มี ตัวอักษร c ทั้งสองตัวอยู่ติดกัน

$$\text{จะได้ว่า } |A| = |B| = |C| = \frac{5!}{2!2!1!} = 30 \text{ จำนวน}$$

$$\text{และ } |A \cap B| = |B \cap C| = |A \cap C| = \frac{4!}{2!1!1!} = 12 \text{ จำนวน}$$

$$\text{และ } |A \cap B \cap C| = 3! = 6 \text{ จำนวน}$$

$$\text{ฉะนั้น } |A \cup B \cup C| = 3 \times 30 - 3 \times 12 + 6 = 60 \text{ จำนวน}$$

$$\text{ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนใน } U \text{ ที่ไม่มีตัวอักษรเดียวกันอยู่ติดกัน} = 90 - 60 = 30 \text{ จำนวน} \quad \blacksquare$$

สำหรับการนับจำนวนสมาชิกยูเนียนของเซต m เซต ทำได้โดยการนับผลรวมของจำนวนสมาชิกของแต่ละเซต แล้วหักออกด้วยจำนวนสมาชิกที่อยู่ในเซตสองเซตขึ้นไป แล้วบวกด้วยจำนวนสมาชิกที่อยู่ในสามเซตขึ้นไป เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์คณิตศาสตร์ได้ดังนี้ ให้ $A_1, A_2, \dots, A_m$ เป็นเซตจำกัดใด ๆ และ กำหนดให้

$$\begin{aligned} S_1 &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_m| = \sum_{i=1}^m |A_i| \\ S_2 &= |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| + \dots = \sum_{1 \leq i < j \leq m} |A_i \cap A_j| \\ S_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots = \sum_{1 \leq i < j < k \leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\vdots \\ S_m &= |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

กล่าวคือ แต่ละ S_i จะนับผลรวมของจำนวนสมาชิกที่อยู่ในอินเตอร์เซกชันของเซต i เซตทั้งหมดที่เป็นไปได้
สังเกตว่า ในแต่ละ S_i จะประกอบด้วยผลบวกของ $\binom{m}{i}$ พจน์

เราจะได้สูตรสำหรับจำนวนสมาชิกของ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ ดังนี้

หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก (Principle of Inclusion-Exclusion)

ให้ $A_1, A_2, \dots, A_m$ เป็นเซตจำกัดใด ๆ และกำหนดสัญลักษณ์ดังกล่าวข้างต้น จะได้ว่า

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{m-1} S_m$$

บทพิสูจน์ เนื่องจากสมาชิกแต่ละตัวใน $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ จะถูกนับหนึ่งครั้งในค่าของ $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$ จึงเพียงพอที่จะแสดงว่าสมาชิกแต่ละตัวใน $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ จะถูกนับเพียงครั้งเดียวเช่นกันในสูตรทางขวามือ

ให้ $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ และสมมติว่า x อยู่ในเซต k เซตพอดีใน $A_1, A_2, \dots, A_m$

ดังนั้น x จะถูกนับทั้งหมด $k = \binom{k}{1}$ ครั้งในผลรวม S_1

จากนั้นจะถูกหักออก $\binom{k}{2}$ ครั้ง ในผลรวม S_2

และถูกนับรวมเข้ามาอีก $\binom{k}{3}$ ครั้งในผลรวม S_3 เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

ฉะนั้น x จะถูกนับทั้งหมด

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k}$$

ครั้ง ในผลรวมทางขวามือ

แต่จากเอกลักษณ์

$$\binom{k}{0} - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \dots + (-1)^k \binom{k}{k} = 0$$

จึงได้ว่า

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \binom{k}{k} = \binom{k}{0} = 1$$

ดังนั้น ผลรวม $S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{m-1} S_m$ จะนับสมาชิกแต่ละตัวของ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ เพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น จึงจบการพิสูจน์หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ■

ในทางปฏิบัติ บางครั้งเราต้องการหาจำนวนสมาชิกของ $A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_m$ ซึ่งคือคอมพลิเมนต์ของ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ นั่นเอง เราทำได้โดยการนับจำนวนสมาชิกของ $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ แล้วไปลบออกจากจำนวนสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ ซึ่งจะได้สูตรดังนี้

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_m| = |U| - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^m S_m$$

ตัวอย่าง 3.1.4 มีนักเรียน ชั้น ม.1 ถึง ม.4 ชั้นละ 10 คน ต้องการเลือกตัวแทนนักเรียนมา 5 คน
จะมีกี่วิธีที่จะได้นักเรียนครบทุกชั้นปี

วิธีทำ ในการเลือกนักเรียนให้ได้ครบทุกชั้นปี แสดงว่าต้องเลือกนักเรียนจากแต่ละชั้นอย่างน้อย 1 คน
เราจะหาคำตอบโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก นิยามเซตต่อไปนี้

ให้ U เป็นเซตของวิธีทั้งหมดในการเลือกนักเรียน 5 คนจาก 40 คน

ให้ A_1 เป็นเซตของวิธีทั้งหมดในการเลือกนักเรียน 5 คนจาก 40 คน โดยไม่มีนักเรียน ม.1 เลย

ให้ A_2 เป็นเซตของวิธีทั้งหมดในการเลือกนักเรียน 5 คนจาก 40 คน โดยไม่มีนักเรียน ม.2 เลย

ให้ A_3 เป็นเซตของวิธีทั้งหมดในการเลือกนักเรียน 5 คนจาก 40 คน โดยไม่มีนักเรียน ม.3 เลย

ให้ A_4 เป็นเซตของวิธีทั้งหมดในการเลือกนักเรียน 5 คนจาก 40 คน โดยไม่มีนักเรียน ม.4 เลย

$$\text{ดังนั้น } |U| = \binom{40}{5}$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = |A_4| = \binom{30}{5}$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_1 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3| = |A_2 \cap A_4| = |A_3 \cap A_4| = \binom{20}{5}$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = |A_1 \cap A_3 \cap A_4| = |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \binom{10}{5}$$

และ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$ เนื่องจาก $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$

ฉะนั้น จำนวนวิธีในการเลือกนักเรียน 5 คนจาก 40 คน โดยที่มียุทธศาสตร์บางชั้นปีที่ไม่ถูกเลือกเลย

ก็คือ $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$ และจำนวนวิธีในการเลือกนักเรียน 5 คนโดยมีนักเรียนครบทุกชั้นปี

ก็คือ $|A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'|$

โดยหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| &= |U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \\ &= |U| - \sum_{i=1}^4 |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &= \binom{40}{5} - 4 \binom{30}{5} + 6 \binom{20}{5} - 4 \binom{10}{5} \\ &= 180,000 \end{aligned}$$

นั่นคือ จำนวนวิธีในการเลือกนักเรียน 5 คนให้ได้ครบทุกชั้นปีมีทั้งหมด 180,000 วิธี

■

หมายเหตุ สำหรับตัวอย่างนี้ เราสามารถทำได้โดยใช้เพียงกฎการคูณ เนื่องจากต้องการเลือกนักเรียน 5 คน จากนักเรียน ม.1 ถึง ม.4 ให้ได้ครบทุกชั้นปี แสดงว่า ต้องมีนักเรียนจากหนึ่งชั้นปีที่ถูกเลือกมา 2 คน และนักเรียนจากชั้นปีอื่นถูกเลือกมา 1 คน

เลือกชั้นปีหนึ่งซึ่งจะเลือกนักเรียนมา 2 คน ทำได้ $\binom{4}{1} = 4$ วิธี

เลือกนักเรียน 2 คนจากชั้นปีนั้น ทำได้ $\binom{10}{2} = 45$ วิธี

อีกสามชั้นปีที่เหลือ เลือกนักเรียนมาชั้นปีละหนึ่งคน ทำได้ $10 \times 10 \times 10 = 1,000$ วิธี

โดยหลักการคูณ จะได้ว่า จำนวนวิธีในการเลือกนักเรียน 5 คนให้ได้ครบทุกชั้นปีทั้งหมด มีค่าเท่ากับ

$$4 \times 45 \times 1000 = 180,000 \text{ วิธี}$$

จะเห็นว่าวิธีหลังที่ใช้หลักการคูณสั้นกว่ามาก แต่ถ้าโจทย์เปลี่ยนเป็นให้เลือกนักเรียนมากกว่า 5 คน เช่น ต้องการเลือกนักเรียน 8 คนจากนักเรียน 4 ชั้นปีให้ได้ครบทุกชั้นปี วิธีนี้จะมีความยุ่งยากมากขึ้น เนื่องจากมีกรณีที่ต้องพิจารณาเพิ่มขึ้น ขณะที่วิธีแรกที่ใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก สามารถขยายไปสู่กรณีที่ต้องการเลือกนักเรียนจำนวนเท่าไรก็ตามได้ทันที

ข้อสังเกตประการหนึ่งในการใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ก็คือ ต้องมองให้ออกก่อนว่าสิ่งที่โจทย์ต้องการให้หานั้นสามารถเขียนได้ในรูปของยูเนียนหรืออินเตอร์เซกชันของเซต ถ้าอยู่ในรูปของยูเนียน ก็สามารถใช้สูตรของ $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m|$ ได้โดยตรง แต่ถ้าอยู่ในรูปของอินเตอร์เซกชัน ให้สร้างเซตที่เป็นคอมพลีเมนต์แล้วคำนวณหา $|A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_m|$ แทน

ตัวอย่าง 3.1.5 มีสิ่งของที่แตกต่างกัน 10 สิ่ง นำไปแจกให้เด็ก 4 คน โดยที่เด็กแต่ละคนต้องได้ของอย่างน้อยหนึ่งสิ่ง จะมีวิธีแจกที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การแจกของให้เด็กแต่ละคนได้รับอย่างน้อยหนึ่งสิ่ง

แสดงว่าเด็กคนที่ 1 ต้องได้ของอย่างน้อยหนึ่งสิ่ง เด็กคนที่สองต้องได้ของอย่างน้อยหนึ่งสิ่ง

เด็กคนที่สามต้องได้ของอย่างน้อยหนึ่งสิ่ง และ เด็กคนที่สี่ต้องได้ของอย่างน้อยหนึ่งสิ่ง

จะเห็นว่าสิ่งที่ต้องการคำนวณอยู่ในรูปของอินเตอร์เซกชันของเซต

จึงจะนิยามเซตให้อยู่ในรูปของคอมพลีเมนต์ของสิ่งที่ต้องการ

ให้ U เป็นเซตของวิธีแจกของแตกต่างกัน 10 สิ่ง ให้เด็ก 4 คน

ให้ A_1 เป็นเซตของวิธีแจกของแตกต่างกัน 10 สิ่ง ให้เด็ก 4 คน โดยที่เด็กคนที่ 1 ไม่ได้รับ

และนิยาม A_2, A_3, A_4 ในทำนองเดียวกันสำหรับเด็กคนที่ 2, 3, 4

สังเกตว่า A_i' ก็คือเซตของวิธีแจกของแตกต่างกัน 10 สิ่ง ให้เด็ก 4 คน โดยที่เด็กคนที่ i ต้องได้รับเสมอ

จะได้ว่า $|U| = 4^{10}$

$|A_i| = 3^{10}$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4$ (เนื่องจากจะเหมือนกับการแจกของ 10 สิ่งให้เด็ก 3 คน)

$|A_i \cap A_j| = 2^{10}$ สำหรับ $i, j = 1, 2, 3, 4$ ซึ่ง $i < j$

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = 1^{10} = 1$ สำหรับ $i, j, k = 1, 2, 3, 4$ ซึ่ง $i < j < k$

และ $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

ดังนั้น โดยหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |A_1' \cap A_2' \cap A_3' \cap A_4'| &= |U| - \sum_{1 \leq i \leq 4} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq 4} |A_i \cap A_j| - \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &= 4^{10} - \binom{4}{1} 3^{10} + \binom{4}{2} 2^{10} - \binom{4}{3} 1^{10} \\ &= 818,520 \end{aligned}$$

หมายเหตุ ตัวอย่างข้างต้นสามารถขยายไปสู่การนับจำนวนฟังก์ชันทั่วถึงระหว่างเซตจำกัดได้ โดยที่เรามองสมาชิกในโดเมนเหมือนกับของแตกต่างกันที่ต้องการแจก และสมาชิกในเรนจ์เหมือนกับเด็กที่รับของแจก การที่ฟังก์ชันจะถูกส่งไปแบบทั่วถึงจึงเหมือนกับว่าของที่แจกนั้นไปถึงผู้รับครบทุกคน เราจะสรุปเป็นสูตรไว้ได้ดังนี้

ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัดโดยที่ $|A| = m$ และ $|B| = r$ แล้วจำนวนฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ แบบทั่วถึงจะมีทั้งหมด

$$m^r - \binom{m}{1}(m-1)^r + \binom{m}{2}(m-2)^r - \binom{m}{3}(m-3)^r + \cdots \quad \text{ฟังก์ชัน}$$

3.2 ปัญหาเกี่ยวกับหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก

ปัญหาต่อไปเป็นเรื่อง การเรียงย้ายตำแหน่ง(derangement) ซึ่งเป็นการประยุกต์ที่สำคัญอันหนึ่งของหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก

ตัวอย่าง 3.2.1 สามีภรรยา n คู่ไปงานแต่งงานแห่งหนึ่ง ถ้าทุกคนที่ไปงานต้องจับคู่เต้นรำชายหญิง จงหาจำนวนวิธีที่ไม่มีสามีภรรยาใดเต้นรำด้วยกันเลย

วิธีทำ ให้ U เป็นเซตของวิธีจัดให้ชาย n คน จับคู่เต้นรำกับหญิง n คน และ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$ ให้ A_i เป็นเซตของวิธีจับคู่เต้นรำโดยที่สามีภรรยาคนที่ i ไม่ได้เต้นรำด้วยกันเอง ฉะนั้น

$$|U| = n!, \quad |A_i| = (n-1)!, \quad |A_i \cap A_j| = (n-2)!, \quad \dots, \quad |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| = 0!$$

จำนวนวิธีจับคู่เต้นรำที่ไม่มีคู่สามีภรรยาใดเต้นรำด้วยกันเลยก็คือ $|A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n|$

ดังนั้น โดยหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n| &= |U| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \\ &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \\ &= n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \end{aligned}$$

สูตรคำตอบของตัวอย่างนี้มีความสำคัญ ซึ่งเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ D_n และเรียกว่าการเรียงย้ายตำแหน่งของสมาชิก n ตัว จากการแทนค่า $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ จะได้ว่า

$$D_1 = 0, \quad D_2 = 1, \quad D_3 = 2, \quad D_4 = 9, \quad D_5 = 44, \quad D_6 = 265, \quad D_7 = 1854$$

ปัญหาเรื่องการเรียงย้ายตำแหน่งสามารถเขียนได้ในรูปของฟังก์ชันได้ดังนี้

บทนิยาม ให้ A เป็นเซต และให้ $f: A \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A จะกล่าวว่า จุด $a \in A$ เป็น จุดตรึง (fixed point) ของฟังก์ชัน f ถ้า $f(a) = a$

จำนวนของฟังก์ชัน จากเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ ไปยัง $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่ไม่มีจุดตรึง มีทั้งหมด D_n ฟังก์ชัน เมื่อ

$$D_n = n! \left(\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

ต่อไป จะแสดงตัวอย่างการใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน ก่อนอื่นขอทบทวนความรู้จากวิชาทฤษฎีจำนวนที่ต้องใช้เสียก่อน

1. ให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง n ซึ่งหารด้วย k ลงตัว มีทั้งหมด $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ จำนวน โดยที่สัญลักษณ์ $[x]$ หมายถึง จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x
2. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนนับใดๆ a หาร c ลงตัว และ b หาร c ลงตัว ก็ต่อเมื่อ ค.ร.น. ของ a และ b หาร c ลงตัว

ตัวอย่าง 3.2.2 มีจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 1000 ที่จำนวน ซึ่งหารด้วย 4 หรือ 6 ลงตัว

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 1000 ซึ่งหารด้วย 4 ลงตัว

และให้ B เป็นเซตของจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 1000 ซึ่งหารด้วย 6 ลงตัว

$$\text{ดังนั้น } |A| = \left\lfloor \frac{1000}{4} \right\rfloor = 250, \quad |B| = \left\lfloor \frac{1000}{6} \right\rfloor = 166 \quad \text{และ} \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor = 83$$

ฉะนั้น

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ &= 250 + 166 - 83 \\ &= 333 \end{aligned}$$

แสดงว่า จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 1000 ซึ่งหารด้วย 4 หรือ 6 ลงตัว มีทั้งหมด 333 จำนวน ■

ตัวอย่าง 3.2.3 กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนนับ m เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n ก็ต่อเมื่อ $(m, n) = 1$

เมื่อสัญลักษณ์ (m, n) หมายถึง ห.ร.ม. ของ m และ n

โดยทฤษฎีบทการแยกตัวประกอบ จะเขียน n ให้อยู่ในรูปของ

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$$

โดยที่ $p_1, p_2, \dots, p_l$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น m จะเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n ก็ต่อเมื่อ m ไม่มี $p_1, p_2, \dots, p_l$ เป็นตัวประกอบ

ฉะนั้น เราต้องการนับจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ซึ่ง $p_1, p_2, \dots, p_l$ หารไม่ลงตัว สำหรับ $i = 1, 2, \dots, l$ ให้ A_i เป็นเซตของจำนวนนับที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ n ซึ่ง p_i หารลงตัว ฉะนั้น โดยข้อสังเกตเกี่ยวกับทฤษฎีจำนวนที่กล่าวข้างต้นทั้งสองข้อ จะได้ว่า

$$|A_i| = \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor = \frac{n}{p_i} \quad \text{สำหรับ } i = 1, 2, \dots, l$$

$$|A_i \cap A_j| = \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor = \frac{n}{p_i p_j} \quad \text{สำหรับ } i, j = 1, 2, \dots, l \text{ ซึ่ง } i < j$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor = \frac{n}{p_i p_j p_k} \quad \text{สำหรับ } i, j, k = 1, 2, \dots, l \text{ ซึ่ง } i < j < k$$

เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนถึง $|A_i \cap A_j \cap \dots \cap A_l| = \frac{n}{p_i p_j \dots p_l}$

ดังนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n มีทั้งหมดเท่ากับ $|A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_l|$ ซึ่งสามารถคำนวณโดยใช้หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} n(A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_l) &= n - \sum_{1 \leq i \leq l} n(A_i) + \sum_{1 \leq i, j \leq l} n(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \leq i, j, k \leq l} n(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots \\ &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{n}{p_i p_j p_k} + \dots \\ &= n \left(1 - \sum_i \frac{1}{p_i} + \sum_{i < j} \frac{1}{p_i p_j} - \sum_{i < j < k} \frac{1}{p_i p_j p_k} + \dots \right) \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_l} \right) \end{aligned}$$

หมายเหตุ จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n ซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ n

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\varphi(n)$ และเรียกว่า ฟังก์ชันฟิของออยเลอร์ (Euler's Phi function)

กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใด ๆ ถ้าเขียน n ในรูปของการแยกตัวประกอบได้ว่า

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_l^{\alpha_l}$$

โดยที่ $p_1, p_2, \dots, p_l$ เป็นจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกัน และ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_l} \right)$$

แบบฝึกหัด เรื่องหลักการเพิ่มเข้าและตัดออก

1. มีวิธีการนำตัวอักษรในคำว่า ZIGZAG มาเรียงใหม่โดยที่ตัวอักษรตัวเดียวกันไม่อยู่ติดกัน
2. มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1,000,000 ที่จำนวนซึ่งมีเลข 1, 2, 3, 4 ปรากฏครบทั้งสี่ตัว
3. มีจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10,000 ทั้งหมดที่จำนวน ซึ่งผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักมีค่าเป็น 25
4. ทอดลูกเต๋า 10 ลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะขึ้นแต้มครบทุกแต้ม
5. มีจำนวนที่มี 4 หลักทั้งหมดที่จำนวนซึ่งตัวเลขที่เหมือนกันไม่อยู่ติดกันเลย
6. ในการแข่งขันตระกร้อประจำจังหวัด มีทีมที่เข้าร่วมแข่งขัน 5 ทีม แต่ละทีมจะต้องแข่งกับทีมอื่นๆ ทีมละหนึ่งครั้ง ผลการแข่งขันมีแต่ แพ้ กับ ชนะ เท่านั้น ไม่มีการเสมอ แต่ละทีมมีโอกาสแพ้หรือชนะเท่าๆ กัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลการแข่งขันที่ออกมา ไม่มีทีมใดที่แพ้ตลอด และไม่มีทีมใดที่ชนะตลอด
7. ในชนบทแห่งหนึ่ง มีหมู่บ้านทั้งหมด 5 หมู่บ้าน ทางกรมการก่อสร้างถนนเชื่อมหมู่บ้านเหล่านี้ โดยที่เมื่อสร้างเสร็จแล้ว จะไม่มีหมู่บ้านใดที่อยู่โดดเดี่ยวโดยไม่มีถนนเชื่อม จงหาว่ามีวิธีที่เป็นไปได้ในการสร้างถนนเชื่อมหมู่บ้านเหล่านี้
8. มีแก้ว 10 ตัว วางเป็นแนวตรง จะจัดสามัคคี 5 คู่ ให้นำแก้ว 5 คู่ โดยที่ไม่มีสามัคคีใดนั่งติดกันเลย ได้ทั้งหมดกี่วิธี
9. มีแก้ว 10 ตัว วางเป็นวงกลม จะจัดสามัคคี 5 คู่ ให้นำแก้ว 5 คู่ โดยที่ไม่มีสามัคคีใดนั่งติดกันเลย ได้ทั้งหมดกี่วิธี
10. มีตัวอักษร a, b, c, d, e อย่างละ 2 ตัว นำมาจัดเรียงเป็นคำใหม่โดยไม่คำนึงถึงความหมาย และตัวอักษรเดียวกันต้องไม่อยู่ติดกัน ได้ทั้งหมดกี่วิธี
11. มีคน 10 คนอยู่บนรถเมล์ ซึ่งจะจอดที่ป้าย 6 ป้าย จะมีวิธีที่คนจะเลือกลงที่ป้ายได้ ถ้าแต่ละป้ายต้องมีคนลงอย่างน้อยหนึ่งคน และสมมติว่าไม่มีคนขึ้นมาเพิ่ม
12. แจกของแตกต่างกัน 10 สิ่งให้เด็ก 6 คน จะมีวิธีแจกกี่วิธี ถ้ามีเด็กเพียง 4 คนเท่านั้นที่ได้รับ
13. มีจำนวนนับสามหลักที่จำนวนที่หารลงตัวด้วย 3, 5 หรือ 7
14. มีจำนวนนับที่จำนวน ซึ่งมีค่าไม่เกิน 300 และเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 70
15. เข้าวันหนึ่งเลขานุการมีจดหมายที่ต้องพิมพ์ถึงลูกค้า n คน ด้วยความรีบเร่งจึงใส่จดหมายที่เขียนถึงลูกค้าแต่ละคนในซองจดหมายที่พิมพ์ชื่อลูกค้าไว้แล้วอย่างสุ่มๆ จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่มีลูกค้าคนไหนได้รับจดหมายของตัวเองเลย

16. ลูกเสือ 8 คนเดินทางไกล โดยเดินเป็นแถวตอนเรียงเดียวเป็นเวลาสองวัน ในวันที่สอง ต้องการให้จัดแถวตอนใหม่โดยที่คนที่เดินตามหลังคนที่อยู่ติดกันข้างหน้าในวันแรก จะเดินตามหลังคนเดิมอีกไม่ได้ จะจัดให้เข้าแถวในวันที่สองได้ทั้งหมดกี่วิธี
17. มีผู้หญิง n คน ใส่ถุงมือมาในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง เมื่อถึงงานก็ถอดกองรวมกันไว้ พองานเลิกทุกคนก็หยิบถุงมือข้างซ้ายและข้างขวามาอย่างละ 1 ข้าง จงหาจำนวนวิธีที่
 - 17.1 ไม่มีใครได้ถุงมือของตัวเองเลยแม้แต่ข้างเดียว
 - 17.2 ไม่มีใครได้ถุงมือของตัวเองครบทั้งสองข้าง
18. มีนักเรียน 12 คน เข้าสอบสัมภาษณ์เพื่อรับการคัดเลือกให้ไปศึกษาต่อต่างประเทศ โดยนักเรียนแต่ละคนต้องเข้าสอบสัมภาษณ์สองห้อง ๆ ละ 5 นาที โดยห้องหนึ่งสัมภาษณ์วิชาคณิตศาสตร์ ส่วนอีกห้องหนึ่งสัมภาษณ์วิชาภาษาอังกฤษ ถ้าช่วงเวลาในการสอบสัมภาษณ์ทั้งหมดคือ 13.00 – 14.00 น. จงหาจำนวนวิธีที่สามารถจัดให้นักเรียนเข้าสอบสัมภาษณ์ทั้งสองวิชาครบทั้ง 12 คน
19. มีคน 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลมในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง เรียกคนกลุ่มนี้ออกมาเพื่อถ่ายรูปหมู่ เมื่อทุกคนกลับเข้าไปนั่งที่ก็นั่งอย่างสลับ ๆ จงหาจำนวนวิธีที่แต่ละคนได้นั่งกับคนใหม่ที่อยู่ขนานทั้งสองข้าง
20. จงหาจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

เมื่อ $0 \leq x_i \leq 18$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4$

21. ให้ $k, m, n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่าจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

โดยที่ $0 \leq x_i \leq k$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$ เท่ากับ

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m - (k+1)i + n - 1}{n-1}$$

22. ให้ $k, m, n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่าจำนวนคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$$

โดยที่ $1 \leq x_i \leq k$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, n$ เท่ากับ

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{m - ki - 1}{n-1}$$

23. จงหาจำนวนวิธีในการจัดคู่สามีภรรยา n คู่เป็นแถวตรง และไม่มีใครอยู่ติดกับคู่ของตนเอง
24. จงหาจำนวนวิธีในการจัดคู่สามีภรรยา n คู่เข้านั่งรอบโต๊ะกลม และไม่มีใครอยู่ติดกับคู่ของตนเอง

25. จงหาจำนวนเลขฐานสองที่มี n หลัก ที่ไม่มี 01 อยู่ และจงแสดงว่า

$$n + 1 = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{n-i}{i} 2^{n-2i}$$

26. (IMO 1987) ให้ $S = \{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 1$ ให้ $p_n(k)$ เป็นจำนวนของวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ S ซึ่งมีจุดตรึง k จุดพอดี จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{k=0}^n k p_k(n) = n!$$

27. จงหาจำนวนของฟังก์ชัน จากเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ ไปยัง $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่มีจุดตรึง k จุดพอดี เมื่อ $k = 0, 1, 2, \dots, n$

28. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$n! = \binom{n}{0} D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \binom{n}{2} D_{n-2} + \dots + \binom{n}{n} D_0$$

เมื่อ D_n คือการเรียงย้ายตำแหน่งของสมาชิก n ตัว

29. ให้ $D_n(k)$ เป็นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่มีจุดตรึง k จุดพอดี จงแสดงว่า

$$29.1 \quad D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k}$$

$$29.2 \quad (k+1)D_{n+1}(k+1) = (n+1)D_n(k)$$

$$29.3 \quad (k+1)D_{n+1}(k+1) = (n+1)D_n(k)$$

$$29.4 \quad D_n(0) - D_n(1) = (-1)^n$$

$$29.5 \quad \sum_{k=0}^n (k-1)^2 D_n(k) = n!$$

$$29.6 \quad \sum_{k=r}^n k(k-1)\dots(k-r+1)D_n(k) = n! \quad \text{เมื่อ } 0 \leq r \leq n$$

30. ให้ C_n เป็นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยที่ k ไม่ได้ตามด้วย $k+1$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$30.1 \quad \text{จงหา } C_n$$

$$30.2 \quad \text{จงแสดงว่า } C_n = D_n + D_{n-1}$$

31. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม และ r เป็นจำนวนนับ กำหนด

$$a_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{r}{i+r} \binom{n}{i}$$

จงแสดงว่า $a_n = \frac{n}{n+r} a_{n-1}$ และจงสรุปว่า $a_n = \left(\frac{n+r}{r}\right)^{-1}$

32. สุ่มเลือกตัวอักษร 28 ครั้ง ครั้งละ 1 ตัวอักษร จากเซต

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, J, K, L, U, X, Y, Z\}$$

ซึ่งมีสมาชิก 20 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

$$CUBAJULY1987$$

ในลำดับของตัวอักษรที่เลือก

33. สุ่มเลือกตัวอักษร 35 ครั้ง ครั้งละ 1 ตัวอักษรแบบใส่คืน จากเซต

$$\{A, B, C, \dots, X, Y, Z\}$$

จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

$$MERRYCHRISTMAS$$

ในลำดับของตัวอักษรที่เลือก

34. ให้ $\mathbb{C}$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน และให้ $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
สำหรับแต่ละฟังก์ชัน $f: S \rightarrow S$ และ $k \in \mathbb{N}$ นิยามฟังก์ชัน $f^k: S \rightarrow S$ โดย

$$f^k(z) = \underbrace{f(f(\dots(f(z))\dots))}_k$$

จะเรียกสมาชิก $w \in S$ ว่าจุดมีคาบ n ของ f ถ้า

$$f_i(w) \neq w \text{ สำหรับทุก } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ แต่ } f^n(w) = w$$

ถ้านิยามฟังก์ชัน $f: S \rightarrow S$ โดย

$$f(z) = z^m$$

เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ จงหาว่ามีจุดมีคาบ 1989 ของ f อยู่ทั้งหมดกี่จุด

35. สำหรับ $m, n \in \mathbb{N}$ ให้ U เป็นเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ทั้งหมดที่มีสมาชิกแต่ละตัวเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น ให้

$$A = \{M \in U \mid M \text{ มีแถวที่เป็น 0 หมดอย่างน้อย 1 แถว}\}$$

และให้

$$A = \{M \in U \mid M \text{ มีหลักที่เป็น 0 หมดอย่างน้อย 1 หลัก}\}$$

จงแสดงว่าจำนวนเมทริกซ์ในเซต $(U - A) \cap B$ เท่ากับ

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (2^{n-i} - 1)^m$$

36. สำหรับ $m, n \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m \leq n$ ให้ $P_n(m)$ เป็นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยที่ m เป็นตัวแรกที่ไม่มีการเปลี่ยนตำแหน่ง ดังนั้น

$$P_n(1) = (n-1)! \text{ และ } P_n(2) = (n-1)! - (n-2)!$$

จงแสดงว่า

$$36.1 \quad P_n(m) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \binom{m-1}{i} (n-1-i)!$$

$$36.2 \quad P_n(m+1) = P_n(m) - P_{n-1}(m) \text{ สำหรับทุก } m = 1, 2, \dots, n-1$$

37. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $r \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า

$$\sum_{k=0}^n k^r \binom{n}{k} D_{n-k} = n! \sum_{m=0}^{\min\{r, n\}} S(r, m)$$

จงแสดงว่าสำหรับ $n \geq r$

$$\sum_{k=0}^n k^r \binom{n}{k} D_{n-k} = B_r \cdot n!$$

โดยที่ B_r เป็นจำนวนเบลล์

38. (IMO 1991) ให้ $S = \{1, 2, \dots, 280\}$ จงหาจำนวนเต็ม n ที่เล็กที่สุดซึ่งแต่ละเซตย่อยที่มีสมาชิก n ตัวของ S มีสมาชิกอย่างน้อย 5 ตัวที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน

บทที่ 4

หลักrinkนกพิราบ

4.1 หลักrinkนกพิราบอย่างง่าย

หลักrinkนกพิราบเป็นเทคนิคการพิสูจน์แบบหนึ่ง ซึ่งได้จากข้อสังเกตทางธรรมชาติว่า ถ้านกพิราบมีมากกว่าจำนวนรัง แล้วจะได้ว่า ต้องมีอย่างน้อย 1 รัง ที่มีนกพิราบอย่างน้อย 2 ตัว อยู่ในรังนั้น

หลักการง่าย ๆ เช่นนี้มีประโยชน์มากในการพิสูจน์ข้อความที่เกี่ยวข้องกับการมีอยู่ของบางสิ่งบางอย่าง

หลักrinkนกพิราบอย่างง่าย

ถ้ามินก n ตัว บินเข้ารัง m รัง โดยที่ $n > m$ แล้ว จะมีรังอย่างน้อย 1 รัง ที่มีนกอย่างน้อย 2 ตัว

บทพิสูจน์ สมมติว่า $n > m$ และรังทุกรังมีนกไม่เกิน 1 ตัว

ฉะนั้น จำนวนของนกจะต้องไม่เกินจำนวนของรัง ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับ $n > m$ ■

หลักการที่ดูง่ายเช่นนี้ สามารถนำไปใช้แก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้อย่างน่าทึ่ง ลองพิจารณาตัวอย่างต่าง ๆ ต่อไปนี้

1. ในบรรดาคน 8 คน ต้องมีอย่างน้อย 2 คน ที่มีวันเกิดเป็นวันเดียวกันในรอบสัปดาห์
2. ในบรรดาคน 13 คน ต้องมีอย่างน้อย 2 คน ที่มีวันเกิดอยู่ในเดือนเดียวกัน

ในตัวอย่างแรก นกก็คือคน 8 คน ส่วนรังก็คือ วันต่าง ๆ 7 วัน ในรอบสัปดาห์ และในตัวอย่างที่ 2 นกก็คือ คน 13 คน ส่วนรังก็คือ เดือนต่าง ๆ 12 เดือน ทั้งสองตัวอย่างนี้ เห็นได้ชัดเจนว่า เราจะเลือก

อะไรให้เป็นนกและอะไรให้เป็นรัง แต่ในปัญหาบางปัญหา การเลือกสิ่งที่อยู่ในโจทย์ให้เป็นนกและรัง อาจไม่ชัดเจนตรงไปตรงมาเช่นตัวอย่างข้างต้น การเลือกนก และรัง เป็นหัวใจของการแก้ปัญหาโจทย์ โดยใช้หลักรังนกพิราบ

เราสามารถเขียนหลักรังนกพิราบอย่างง่าย ให้อยู่ในรูปแบบที่รัดกุมกว่าในเชิงคณิตศาสตร์ ได้ดังนี้

หลักรังนกพิราบอย่างง่าย *

ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $|A| > |B|$ และ $f: A \rightarrow B$ แล้ว

f ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง นั่นคือ มี x, y ใน A ซึ่ง $x \neq y$ แต่ $f(x) = f(y)$

กรณีนี้ สมาชิกในเซต A ก็คือ นก และสมาชิกในเซต B ก็คือ รัง ฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ก็คือ วิธีการหนดให้นกตัวใดอยู่ในรังไหน

ตัวอย่าง 4.1.1 ให้ A เป็นเซตของจำนวนนับ 21 จำนวน

จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับสองจำนวนในเซต A ซึ่งเมื่อหารด้วย 20 แล้วเหลือเศษเท่ากัน

วิธีทำ ให้จำนวนนับทั้ง 21 จำนวนแทนด้วยนก

เมื่อหารจำนวนเต็มใดๆ ด้วย 20 เศษเหลือที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะประกอบด้วย $0, 1, \dots, 19$ รวม 20 ค่า

ให้เศษเหลือทั้ง 20 ค่า เป็นรัง ดังนั้นโดยหลักรังนกพิราบ

จำนวนนับทั้ง 21 จำนวน เมื่อหารด้วย 20 จะต้องมีสองจำนวนที่มีเศษเหลือเท่ากัน ■

ตัวอย่าง 4.1.2 ให้ S เป็นสับเซตของ $\{1, 2, \dots, 9\}$ ซึ่งมีสมาชิก 6 ตัว

จงแสดงว่า S ต้องมีสมาชิก 2 ตัว ซึ่งมีผลบวกเท่ากับ 10

วิธีทำ ในที่นี้ให้สมาชิก 6 ตัวของเซต S เป็นนก

และให้รังคือสับเซตต่อไปนี้

$$\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$$

ซึ่งมีทั้งหมด 5 สับเซต

เนื่องจาก $\{5\}$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว แสดงว่าสมาชิกของ S อย่างน้อย 5 ตัวต้องอยู่ใน 4 รังแรก

จะได้ว่า มีสมาชิก 2 ตัวที่อยู่ในสับเซตเดียวกัน ซึ่งทำให้ได้ว่าสมาชิก 2 ตัวนั้นมีผลบวกเท่ากับ 10 ■

ตัวอย่าง 4.1.3 มีคนอยู่จำนวนหนึ่งในงานเลี้ยง จงพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยสองคนที่จับมือกับคนอื่นในงานเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน โดยที่คนสองคนใดๆ จะจับมือกันอย่างมากเพียงหนึ่งครั้งเท่านั้น

วิธีทำ สมมติว่ามีคนอยู่ n คนในงานนี้
 ดังนั้นจำนวนครั้งที่เป็นไปได้ที่แต่ละคนจับมือกับคนอื่นได้แก่ $0, 1, 2, \dots, n-1$
 ถ้าเราพิจารณาว่าคนทั้งหมดเป็นนก และจำนวนครั้งที่เป็นไปได้ของการจับมือคือรัง จะเห็นว่ามียก n ตัว และมีรัง n รัง ซึ่งไม่น่าจะใช้หลักการนับได้
 แต่ทว่าถ้ามีคนซึ่งจับมือกับคนอื่น 0 ครั้ง แสดงว่าคนนั้นไม่จับมือกับคนอื่นเลย
 ดังนั้นต้องไม่มีใครที่จับมือ $n-1$ ครั้ง ฉะนั้น กรณีจะเหลือรังเพียง $n-1$ รัง
 โดยหลักการนับ จะได้ว่า ต้องมีอย่างน้อยสองคนที่จับมือเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน
 อีกกรณีคือ ไม่มีใครจับมือ 0 ครั้ง แสดงว่าแต่ละคนจับมือ $1, 2, \dots, n-1$ ครั้ง
 แสดงว่ามีรัง $n-1$ รัง โดยหลักการนับอีกครั้ง จะได้ว่า
 ต้องมีอย่างน้อยสองคนที่จับมือเป็นจำนวนครั้งเท่ากัน ■

เราได้เห็นตัวอย่างที่แสดงสถานการณ์ต่างๆ ในการใช้หลักการนับ ความสำเร็จของการแก้ปัญหาคือต้องมองให้ออกว่าจะเลือกอะไรเป็นนก อะไรเป็นรัง ต่อไปจะใช้หลักการนับในการแก้ปัญหาโดยไม่จำเป็นต้องเขียนว่าอะไรคือนก อะไรคือรัง

ตัวอย่างต่อไปนี้จะใช้หลักการนับในปัญหาที่เกี่ยวข้องกับทฤษฎีจำนวน

ตัวอย่าง 4.1.4 ให้ A เป็นเซตของจำนวนนับ n จำนวน จงพิสูจน์ว่ามีสับเซตของ A ที่ไม่ใช่เซตว่างและผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซตนั้นหารด้วย n ลงตัว

วิธีทำ สมมติให้

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

พิจารณา $n+1$ จำนวนต่อไปนี้

$$0, a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

จะได้ว่าต้องมีสองจำนวนซึ่งเมื่อหารด้วย n แล้วเหลือเศษเท่ากัน

ซึ่งผลต่างของสองจำนวนนั้นหารด้วย n ลงตัว ■

ตัวอย่าง 4.2.6 จงแสดงว่า ในบรรดาจำนวนนับ 16 จำนวน ที่มีค่าไม่เกิน 30
จะต้องมีอย่างน้อย 2 จำนวนที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

วิธีทำ ขอนี้ใช้ความรู้ที่ว่าจำนวนนับสองจำนวนที่เรียงติดกันต้องเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์
แบ่งจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 30 ออกเป็น 15 คู่ ดังนี้

$$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \dots, \{29, 30\}$$

ดังนั้น ถ้ามีจำนวนนับ 16 จำนวน แสดงว่าต้องมีสองจำนวนที่อยู่ในสับเซตเดียวกัน ซึ่งจะได้ว่าจำนวนนับ
ทั้งสองเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ■

ตัวอย่าง 4.2.7 ให้ $X = \{1, 2, \dots, 200\}$ ถ้า S เป็นสับเซตของ X ที่มีสมาชิก 101 จำนวน
จงแสดงว่า S มีสมาชิก 2 จำนวน ซึ่งจำนวนหนึ่งหารอีกจำนวนหนึ่งลงตัว

วิธีทำ โดยทฤษฎีบทหลักมูลของเลขคณิต จะได้ว่า

จำนวนเต็มใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูป $2^k m$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่ไม่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 และ m เป็นจำนวนเต็มคี่

เขียนสมาชิกในเซต X ในรูป $2^k m$ เมื่อ $m \in T = \{1, 3, \dots, 199\}$ จะได้ว่า T มีสมาชิก 100 จำนวน

ถ้า S เป็นสับเซตของ X ที่มีสมาชิก 101 จำนวน แสดงว่า ต้องมีสองจำนวน x และ y ในเซต S

ที่อยู่ในรูป $x = 2^k m$ และ $y = 2^l m$ โดยที่ $k, l \geq 0$ และ $m \in T$

ถ้า $k \leq l$ จะได้ว่า x หาร y ลงตัว และ ถ้า $l \leq k$ จะได้ว่า y หาร x ลงตัว ■

หลักการรันทนพิราบสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาทางเรขาคณิตได้ด้วย ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.8 มีจุด 5 จุด ภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย
จงแสดงว่า ต้องมีจุด 2 จุดซึ่งอยู่ห่างกันไม่เกิน 0.5 หน่วย

วิธีทำ แบ่งครึ่งด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนี้ แล้วลากส่วนของเส้นตรงสามเส้นเชื่อมจุดกึ่งกลางด้านทั้งสามนี้
ส่วนของเส้นตรงที่ลากจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 4 รูป
ที่แต่ละด้านยาว 0.5 หน่วย จะได้ว่าต้องมีสองจุดที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยมเล็กรูปเดียวกัน
ซึ่งจุดทั้งสองนี้ต้องอยู่ห่างกันไม่เกิน 0.5 หน่วย ■

หมายเหตุ ในการแบ่งรูปสามเหลี่ยมใหญ่เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 4 รูป เพื่อให้ใช้หลักการนับพิราบได้นั้น ควรแบ่งให้ไม่มีส่วนใดอยู่ในรูปสามเหลี่ยมเล็กมากกว่าหนึ่งรูปขึ้นไป ซึ่งได้แก่ส่วนของเส้นตรงที่แบ่งรูปสามเหลี่ยมทั้งหลายนั่นเอง เราสามารถกำหนดให้ส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นอยู่กับอาณาบริเวณใดก็ได้ย่อมได้ผลเช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.1.8 ถ้าจุดทุกจุดบนระนาบถูกแต้มด้วยสีแดงหรือสีดำ สีใดสีหนึ่งเพียงสีเดียว จงแสดงว่ามีจุด 2 จุด ซึ่งถูกแต้มด้วยสีเดียวกัน และอยู่ห่างกัน 10 หน่วยพอดี

วิธีทำ พิจารณารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งในระนาบที่แต่ละด้านยาว 10 หน่วย

จุดยอดทั้งสามถูกระบายด้วยสี 2 สี แสดงว่ามีจุดยอดอย่างน้อย 2 จุดที่ระบายด้วยสีเดียวกัน

ฉะนั้นจุดยอด 2 จุดนี้มีสีเดียวกันและอยู่ห่างกัน 10 หน่วยพอดี ■

ตัวอย่างต่อไปมีความสำคัญมาก แนวคิดในวิธีทำสามารถนำไปใช้แก้ปัญหาอื่นที่คล้ายคลึงกันได้ จึงควรศึกษาให้ถ่องแท้ และอาจลองวาดรูปเพื่อประกอบความเข้าใจ

ตัวอย่าง 4.1.9 มีจุด 6 จุดในอวกาศโดยที่ไม่มี 3 จุดใดอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งหก และระบายสีเส้นเชื่อมแต่ละเส้นด้วยสีแดงหรือสีน้ำเงินเพียงสีเดียว จงแสดงว่าในบรรดาเส้นเชื่อมที่ระบายสีเหล่านี้ จะต้องมีสามเส้นที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมสีแดงหรือรูปสามเหลี่ยมสีน้ำเงิน

วิธีทำ พิจารณาจุดหนึ่งใน 6 จุดนี้ เรียกว่าจุด A

จากจุด A จะต้องมีส่วนของเส้นตรง 5 เส้นที่ลากเชื่อมกับจุดอื่น ซึ่งแต่ละเส้นมีสีแดงหรือสีน้ำเงิน

โดยหลักการนับพิราบ จะต้องมีส่วนเชื่อม 3 เส้นจากจุด A ที่มีสีเดียวกัน

โดยไม่เสียหยาบทั่วไป จะสมมติว่าเป็นสีแดง เพราะถ้าเป็นสีน้ำเงิน ก็สามารถให้เหตุผลได้ในทำนองเดียวกัน

ฉะนั้น สมมติว่า มีเส้นเชื่อม 3 เส้นจากจุด A ที่เป็นสีแดงทั้งสามเส้น

เรียกจุดปลายอีกข้างของเส้นเชื่อมทั้งสามว่าจุด B, C, D

ถ้าเส้นเชื่อมระหว่างจุด B, C, D เส้นใดเส้นหนึ่งมีสีแดง จะได้ว่าเส้นนี้กับเส้นสีแดงที่เชื่อมจุด A อีก

สองเส้นประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมสีแดง มิฉะนั้น เส้นเชื่อมระหว่างจุด B, C, D ทั้งสามเส้นต้องมีสีน้ำเงิน ซึ่งจะประกอบเป็นรูปสามเหลี่ยมสีน้ำเงิน ■

4.2 หลักการนกพิราบทั่วไป

ที่ผ่านมา เราพิจารณาหลักการนกพิราบอย่างง่าย คือ ถ้ามีนกมากกว่ารัง แล้วต้องมียกอย่างน้อยสองตัวที่อยู่รังเดียวกัน แต่ถ้าทราบจำนวนนก และจำนวนรัง บางครั้งอาจได้ผลสรุปที่ดีขึ้นกว่าเดิมได้ เช่น ถ้ามีนก 7 ตัว และมีรัง 3 รัง สามารถสรุปได้ว่ามียกอย่างน้อย 3 ตัวที่อยู่รังเดียวกัน เพราะถ้าทุกรังมียกอย่างมาก 2 ตัว จะได้นกทั้งหมดจะมีไม่เกิน 6 ตัว ขัดแย้งกับที่กำหนดว่ามีนก 7 ตัว

ก่อนจะสรุปเป็นทฤษฎีบท จะขออธิบายสัญลักษณ์ที่จะใช้เสียก่อน ดังนี้

สำหรับจำนวนเต็ม n ใดๆ สัญลักษณ์ $[n]$ หมายถึง จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ n เช่น

$$[1.4] = 2, [\pi] = 4, [-2.1] = -2, [7] = 7$$

หลักการนกพิราบทั่วไป

ถ้ามีนก n ตัว บินเข้ารัง m รัง โดยที่ $n > m$ แล้ว จะมีรังอย่างน้อย 1 รัง ที่มีนกอย่างน้อย $\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil$ ตัว

เราสามารถใช้หลักการนกพิราบทั่วไป สรุปตัวอย่างข้อความต่อไปนี้

1. ในบรรดานักคน 100 คน จะต้องมียกอย่างน้อย $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ คน ที่เกิดเดือนเดียวกัน
2. ถูบหนึ่งใส่ลูกแก้วที่มีสี 50 ลูก ลูกแก้วแต่ละลูกมีสีใดสีหนึ่งใน 4 สี จะได้ว่ามีลูกแก้วอย่างน้อย $\left\lceil \frac{50}{4} \right\rceil = 13$ ลูก ที่มีสีเดียวกัน

ตัวอย่าง 4.2.1 ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีเกรดที่เป็นไปได้ 5 เกรด คือ A, B, C, D และ F

ถ้าทราบว่ามียกเรียนอย่างน้อย 6 คนที่ได้เกรดเดียวกัน

จงหาจำนวนนักเรียนที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ในการสอบคณิตศาสตร์นี้

วิธีทำ ให้เกรด 5 เกรดที่เป็นไปได้คือรัง และสมมติว่าจำนวนนักเรียนที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ครั้งนี้มี N คน

โดยหลักการนกพิราบ จะได้ $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6$

ถ้า $N = 25$ จะได้ว่า $\left\lceil \frac{25}{5} \right\rceil = 5$ แต่ถ้า $N = 26$ จะได้ว่า $\left\lceil \frac{26}{5} \right\rceil = 6$

ฉะนั้น จำนวนนักเรียนที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ในการสอบครั้งนี้คือ 26 คน ■

บางครั้ง เราต้องใช้หลักการนกพิราบมากกว่าหนึ่งครั้งในการแก้โจทย์ปัญหา ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.2 มีหมากรุก 41 ตัว อยู่บนกระดานขนาด 10×10

จงพิสูจน์ว่าต้องมีหมากรุกอย่างน้อย 5 ตัว ที่ไม่อยู่ในแถวหรือหลักเดียวกัน

วิธีทำ มีแถว 10 แถว มีหมากรุก 41 ตัว

โดยหลักการนกพิราบ ต้องมีแถวหนึ่งที่มีหมากรุกอย่างน้อย $\left\lceil \frac{41}{10} \right\rceil = 5$ ตัว (แต่ไม่เกิน 10 ตัว) ในแถวนั้น

ตัดแถวนั้นออกไปก่อนพร้อมกับหมากรุกทุกตัวในแถวนั้น

เหลือ 9 แถวและหมากรุกอย่างน้อย 31 ตัว

โดยหลักการนกพิราบ จะต้องว่ามีแถวหนึ่งที่มีหมากรุกอย่างน้อย $\left\lceil \frac{31}{9} \right\rceil = 4$ ตัวอยู่ในแถวนั้น

ทำนองเดียวกัน ตัดแถวนั้นออกไปพร้อมกับหมากรุกทุกตัวในแถวนั้น

เหลือ 8 แถวและหมากรุกอย่างน้อย 21 ตัว

จะได้ว่า มีแถวหนึ่งที่มีหมากรุกอย่างน้อย $\left\lceil \frac{21}{8} \right\rceil = 3$ ตัวอยู่ในแถวนั้น

ทำเช่นนี้อีก 2 ครั้ง จะได้แถวที่มีหมากรุกอย่างน้อย $\left\lceil \frac{11}{7} \right\rceil = 2$ ตัว และ $\left\lceil \frac{1}{6} \right\rceil = 1$ ตัว ตามลำดับ

ขณะนี้ เราได้ 5 แถวที่มีหมากรุกอย่างน้อย 5, 4, 3, 2, 1 ตัวตามลำดับ

เลือกหมากรุก 1 ตัวจากแถวที่มีหมากรุกอย่างน้อย 1 ตัว

จากนั้นในแถวที่มีหมากรุกอย่างน้อย 2 ตัว เลือกมา 1 ตัวที่อยู่คนละหลักกับหมากรุกตัวแรกที่เลือกมา

ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนได้หมากรุกครบ 5 ตัวที่อยู่คนละหลักกันหมด

จะได้ว่าหมากรุกทั้ง 5 ตัวที่เลือกมาไม่มีตัวใดอยู่ในแถวหรือหลักเดียวกัน ■

หมายเหตุ สำหรับปัญหาตัวอย่างนี้ ยังมีอีกวิธีที่ใช้หลักการนกพิราบเพียงครั้งเดียว เพียงแต่ต้องเลือกสิ่งที่เป็นจริงอย่างเหมาะสม ขอให้ผู้อ่านลองคิดด้วยตัวเองเป็นแบบฝึกหัด

สองตัวอย่างต่อไปนี้ แสดงให้เห็นวิธีการใช้หลักการนกพิราบที่ซับซ้อนมากขึ้นกว่าตัวอย่างก่อน ๆ

ตัวอย่าง 4.2.3 โรงงานเฟอร์นิเจอร์แห่งหนึ่งต้องการประกอบโต๊ะ 44 ตัว ในช่วงเวลา 30 วัน โดยที่ในแต่ละวันต้องประกอบโต๊ะอย่างน้อยหนึ่งตัว จงแสดงว่าจะมีช่วงวันที่ติดต่อกันที่โรงงานแห่งนี้ประกอบโต๊ะได้ 15 ตัวพอดี

วิธีทำ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, 28$ ให้ x_i เป็นจำนวนโต๊ะที่ประกอบได้ทั้งหมดตั้งแต่วันแรกจนถึงสิ้นสุดของวันที่ i

ฉะนั้น

$$1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{30} \leq 44$$

และ

$$x_1 + 15 < x_2 + 15 < \dots < x_{30} + 15 \leq 59$$

ดังนั้น $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ เป็นจำนวนนับ 30 จำนวนที่แตกต่างกัน

และ $x_1 + 15, x_2 + 15, \dots, x_{30} + 15$ ก็เป็นจำนวนนับ 30 จำนวนที่แตกต่างกัน

ทั้ง 60 จำนวนนี้มีค่าอยู่ในช่วง 1 ถึง 59

โดยหลักรังนกฟิราบ จะต้องมียังน้อย 2 จำนวนที่มีค่าเท่ากัน

ฉะนั้น จะมี $1 \leq i < j \leq 30$ ซึ่ง $x_i = x_j + 15$ นั่นคือ $x_j - x_i = 15$

ดังนั้น ตั้งแต่เริ่มต้นของวันที่ $j+1$ จนถึงสิ้นสุดของวันที่ i โรงงานจะประกอบโต๊ะได้ 15 ตัวพอดี ■

ต่อไป จะแสดงตัวอย่างของข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับนานาชาติที่ใช้หลักรังนกฟิราบ

ตัวอย่าง 4.2.4 (IMO 1972) จงพิสูจน์ว่าในเซตของจำนวนเต็มบวก 10 จำนวนที่มีสองหลักในระบบทศนิยม จะต้องมีสับเซต 2 สับเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน แต่ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในแต่ละสับเซตมีค่าเท่ากัน

วิธีทำ ให้ A เป็นสับเซตของ $\{10, 11, 12, \dots, 99\}$ ที่มีสมาชิก 10 จำนวน
เนื่องจากเราต้องการหาสับเซต 2 สับเซตของ A ที่มีผลบวกเท่ากัน
ดังนั้นเราจะให้สับเซตทั้งหมดของ A เป็นนก และผลบวกที่เป็นไปได้ทั้งหมดเป็นรัง

ผลบวกที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้คือ 10

ผลบวกที่มากที่สุดที่เป็นไปได้คือ $99 + 98 + 97 + \dots + 90 = 945$

ฉะนั้น ผลบวกทั้งหมดที่เป็นไปได้มี $945 - 10 + 1 = 936$ จำนวน

จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A คือ $2^{10} = 1024$ สับเซต

เนื่องจาก $1024 > 936$ จะได้ว่ามีจำนวนนกมากกว่ารัง

ฉะนั้น จะมีสองสับเซตเรียกว่า B และ C ที่แตกต่างกันซึ่งมีผลบวกเท่ากัน

แต่โจทย์ต้องการสับเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

ดังนั้น เราจะแยกการพิจารณาออกเป็นสองกรณี

ถ้า B และ C ไม่มีสมาชิกร่วมกัน จะได้ว่า B และ C เป็นสับเซตที่ต้องการ
แต่ถ้า B และ C มีสมาชิกร่วมกัน ให้ตัดสมาชิกร่วมออกไปจากทั้งสองสับเซตนั้น
ส่วนที่เหลือจะไม่มีสมาชิกร่วมกัน และยังคงมีผลบวกเท่ากัน ■

เราทราบแล้วว่าเศษส่วนใด ๆ สามารถเขียนในรูปของทศนิยมซ้ำได้ การพิสูจน์ข้อความนี้ใช้หลักการนักพิราบ ดังจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.2.5 จงพิสูจน์ว่า จำนวนตรรกยะใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูปของทศนิยมซ้ำ

วิธีทำ ก่อนอื่นลองดูตัวอย่างเช่น

$$\frac{29}{54} = .537037037 \dots = .5\overline{370}$$

สมมติให้จำนวนตรรกยะอยู่ในรูปของ $\frac{m}{n}$

ถ้า $m \geq n$ เราสามารถทอนให้อยู่ในรูปเศษส่วนแท้ได้ ฉะนั้น สมมติว่า $m < n$

โดยอาศัย ขั้นตอนวิธีการหาร (division algorithm)

สมมติว่า เราเขียน $\frac{m}{n}$ ได้ในรูปทศนิยมดังนี้

$$\frac{m}{n} = 0.d_1d_2d_3 \dots$$

โดยที่

$$10m = n \cdot d_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < n$$

$$10r_1 = n \cdot d_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < n$$

$$10r_2 = n \cdot d_3 + r_3, \quad 0 \leq r_3 < n$$

$\vdots$

$$10r_j = n \cdot d_{j+1} + r_{j+1}, \quad 0 \leq r_{j+1} < n$$

เศษ r_j ใด ๆ อยู่ในเซต $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

ฉะนั้น โดยหลักการนักพิราบ จะได้ว่า มีจำนวน 2 จำนวนใน $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$ ที่มีค่าเท่ากัน

สมมติว่ามี $k, m \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ ซึ่ง $k < m$ และ $r_k = r_m$

ให้ $l = m - k$ ฉะนั้น $r_k = r_{k+l}$

ต่อไปจะแสดงว่า สมาชิกในลำดับ $\{r_i\}$ และ $\{d_i\}$ จะซ้ำกันทุก ๆ l พจน์ โดยเริ่มที่ $i = k + 1$

นั่นคือ จะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ว่า

$$r_i = r_{i+l} \text{ และ } d_i = d_{i+l}$$

สำหรับ $i = k + 1, k + 2, \dots$

ขั้นฐาน เนื่องจาก $10r_k = 10r_{k+l}$ จะได้ว่า

$$nd_{k+1} + r_{k+1} = nd_{k+l+1} + r_{k+l+1}$$

ฉะนั้น

$$r_{k+1} \equiv r_{k+l+1} \pmod{n}$$

และเนื่องจากทั้ง r_{k+1} และ r_{k+l+1} อยู่ในเซต $\{0, 1, \dots, n-1\}$

จึงได้ว่า $r_{k+1} = r_{k+l+1}$ และทำให้ได้ด้วยว่า $d_{k+1} = d_{k+l+1}$

ขั้นอุปนัย สมมติว่า j เป็นจำนวนนับที่ทำให้

$$r_j = r_{j+l} \text{ และ } d_j = d_{j+l}$$

ฉะนั้น

$$nd_{j+1} + r_{j+1} = 10r_j = 10r_{j+l} = n \cdot d_{j+l+1} + r_{j+l+1}$$

ดังนั้น

$$r_{j+1} \equiv r_{j+l+1} \pmod{n}$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $r_{j+1} = r_{j+l+1}$ และเมื่อนำไปแทนค่าในสมการข้างต้น

จะได้ว่า $d_{j+1} = d_{j+l+1}$ จบการพิสูจน์ขั้นอุปนัย

ฉะนั้น

$$d_{k+1} = d_{k+l+1}, d_{k+2} = d_{k+l+2}, \dots, d_{k+l} = d_{k+2l}$$

จึงสรุปได้ว่า

$$d_{k+1}d_{k+2} \dots d_{k+l} = d_{k+l+1}d_{k+l+2} \dots d_{k+2l}$$

แต่ละชุดจะซ้ำกันไปเรื่อย ๆ ไม่สิ้นสุด

นั่นคือ จำนวนตรรกยะใด ๆ สามารถเขียนได้ในรูปของทศนิยมซ้ำ

■

แบบฝึกหัด เรื่องหลักกรังนกพิราบ

1. ให้ A เป็นสับเซตหนึ่งของ $\{1, 2, 3, \dots, 50\}$ ที่มีสมาชิก 10 ตัว จงแสดงว่า จะสามารถหาสับเซตที่แตกต่างกันของ A สองสับเซต ได้ ซึ่งผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในแต่ละเซตมีค่าเท่ากัน
2. ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง มีคน 30 คน จงพิสูจน์ว่า มีอย่างน้อย 2 คน ที่มีเพื่อนที่อยู่ในงานนี้เป็นจำนวนเท่ากัน
3. ในการแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันหมด แต่ละทีมจะแข่งกับทีมอื่นทีละหนึ่งครั้งพอดี จงแสดงว่า ณ ขณะใด ๆ ก็ตาม จะต้องมีสองทีมที่แข่งมาแล้วเป็นจำนวนครั้งที่เท่ากัน
4. ในหมู่บ้านทอผ้าไหม มีชาวบ้านที่ทอผ้าอยู่ 10 คน ต้องการทอผ้าไหมให้ได้ 35 ผืน ผ้าไหมแต่ละผืนจะถูกทอด้วยชาวบ้านเพียงคนเดียว มีชาวบ้านหนึ่งคนที่ทอได้ผืนเดียว มีชาวบ้านหนึ่งคนที่ทอได้ 2 ผืน และมีชาวบ้านหนึ่งคนที่ทอได้ 3 ผืน จงแสดงว่ามีชาวบ้านอย่างน้อยหนึ่งคนที่ทอได้อย่างน้อย 5 ผืน
5. มีจำนวนนับอยู่ 8 จำนวนที่มีค่าไม่เกิน 15 จงพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อย 3 คู่ในจำนวนเหล่านี้ซึ่งมีผลต่างที่เป็นบวกแตกต่างกันทั้งหมด (แต่ละคู่ ไม่จำเป็นต้องมีสมาชิกแตกต่างกันทั้งหมด)
6. มีคน 7 คนที่มีอายุรวมกัน 332 ปี จงพิสูจน์ว่าจะต้องมี 3 คนในกลุ่มนี้ที่มีอายุรวมกันอย่างน้อย 142 ปี
7. จงพิสูจน์ว่าในบรรดาจำนวนเต็มใด ๆ 52 จำนวน จะต้องมีสองจำนวนซึ่งผลต่างของกำลังสองของทั้งสองจำนวนนั้นหารด้วย 100 ลงตัว
8. ถ้าเลือกจำนวนนับ 6 จำนวน จากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 25\}$ จงแสดงว่า จะมีอย่างน้อย 2 จำนวน x และ y ซึ่ง

$$0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$$
9. จงพิสูจน์ว่า ในลำดับ $3, 3^2, 3^3, 3^4, \dots$ จะต้องมียกอย่างน้อยหนึ่งจำนวนซึ่งลงท้ายด้วย 001 เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปทศนิยม
10. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ จะต้องมีพหุคูณของ n ซึ่งประกอบด้วยเลข 0 และ 7 เท่านั้น
11. จงแสดงว่าในลำดับ $7, 77, 777, 7777, \dots$ จะต้องมียกหนึ่งที่หารด้วย 2003 ลงตัว
12. จงพิสูจน์ว่า ในบรรดาจำนวนเต็ม $n + 2$ จำนวน จะต้องมียกสองจำนวนซึ่งมีผลบวกหรือผลต่างหารด้วย $2n$ ลงตัว
13. จงแสดงว่าเมื่อเลือกจุด 5 จุดใด ๆ ภายในรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ด้านยาว 1 หน่วย จะต้องมี 2 จุดที่ห่างกันอย่างมาก $\frac{1}{2}$ หน่วย
14. ให้ $n \in \mathbb{N}$ มีจุด $n + 1$ จุดอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย จงแสดงว่ามีจุดสองจุดที่ต่างกันที่ระยะระหว่างจุดทั้งสองไม่เกิน $2 \sin \frac{\pi}{n}$

15. เมื่อเลือกจุด 9 จุดใด ๆ ในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 1 หน่วย จงแสดงว่าต้องมี 3 จุดที่ต่างกันที่ทำให้พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดทั้ง 3 เป็นจุดยอดมีค่าไม่เกิน $\frac{1}{8}$ ตารางหน่วย
16. จงแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็ม 5 จำนวนใด ๆ จะมี 3 จำนวนที่ผลบวกหารด้วย 3 ลงตัว
17. ให้ $n \in \mathbb{N}$ จงแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็ม $n + 1$ จำนวนใด ๆ จะมีสองจำนวนที่ผลต่างหารด้วย n ลงตัว
18. ให้ $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ เป็นเซตของจำนวนนับ 5 จำนวน จงพิสูจน์ว่าสำหรับวิธีเรียงสับเปลี่ยน $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ ใด ๆ ของสมาชิกใน A ผลคูณ

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$$

ต้องเป็นจำนวนคู่เสมอ

19. ให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}\}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม $2k + 1$ จำนวน โดยที่ $k \geq 1$ จงแสดงว่าสำหรับการเรียงสับเปลี่ยน $x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}$ ใด ๆ ของเซต A ผลคูณ

$$\prod_{i=1}^{2k+1} (x_i - a_i)$$

เป็นจำนวนคู่เสมอ

20. จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก 7 จำนวนที่มีค่าไม่เกิน 126 จะต้องมีสองจำนวน เรียกว่า x และ y ซึ่งสอดคล้องอสมการ $1 < \frac{x}{y} \leq 2$
21. กำหนด $n \in \mathbb{N}$ และเลือกจำนวนเต็ม $n + 1$ จำนวนจากเซต $\{1, 2, \dots, 2n\}$ จงแสดงว่าต้องมีสองจำนวนจากที่เลือกมาซึ่งจำนวนหนึ่งเป็นสองเท่าของอีกจำนวนหนึ่ง
22. กำหนด $n \in \mathbb{N}$ และเลือกจำนวนเต็ม $n + 1$ จำนวนจากเซต $\{1, 2, \dots, 2n\}$ จงแสดงว่าต้องมีสองจำนวนจากที่เลือกมาซึ่งจำนวนหนึ่งหารอีกจำนวนหนึ่งลงตัว
23. กำหนด $n \in \mathbb{N}$ และเลือกจำนวนเต็ม $n + 1$ จำนวนจากเซต $\{1, 2, \dots, 2n\}$ จงแสดงว่าต้องมีสองจำนวนจากที่เลือกมาซึ่งเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน
24. ในกลุ่มของคน n คน โดยที่ $n \geq 2$ จงแสดงว่าต้องมีอย่างน้อย 2 คนที่รู้จักคนในกลุ่มเป็นจำนวนเท่ากัน สมมติให้การรู้จักกันเป็นการรู้จักซึ่งกันและกันเสมอ
25. สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ เมื่อเลือกจำนวนจริง $n + 1$ ตัวจากช่วง $[0, 1)$ จงแสดงว่าต้องมีสองจำนวนซึ่งผลต่างน้อยกว่า $\frac{1}{n}$

26. จงแสดงว่าสำหรับเซต A ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงต่างกัน 13 ตัวใด ๆ จะต้องมี $x, y \in A$ ซึ่ง

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} \leq 2 - \sqrt{3}$$

27. กล้อง 2 ใบบรรจุลูกบอลรวมกัน 65 ลูกซึ่งมีขนาดต่าง ๆ กัน แต่ละลูกมีสีใดสีหนึ่งจากสีขาว ดำ แดง ฟ้า โดยที่เมื่อหยิบลูกบอลใด ๆ ที่มีสีเดียวกัน 5 ลูก อย่างน้อยสองลูกต้องมีขนาดเท่ากัน จงพิสูจน์ว่าจะต้องมีลูกบอลอย่างน้อย 3 ลูกซึ่งอยู่ในกล้องใบเดียวกัน มีสีเดียวกัน และมีขนาดเท่ากัน
28. สมศักดิ์ซ้อมทำโจทย์คณิตศาสตร์เพื่อเตรียมตัวแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกในระยะเวลา 8 สัปดาห์ โดยที่เขาจะต้องทำโจทย์อย่างน้อยวันละ 1 ข้อ แต่ไม่เกิน 11 ข้อต่อสัปดาห์ จงพิสูจน์ว่าจะต้องมีช่วงวันที่ติดต่อกันซึ่งเขาจะทำโจทย์ 23 ข้อพอดี
29. มีจุด 10 จุดอยู่ภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละ 1 หน่วย จงพิสูจน์ว่าจะต้องมีอย่างน้อย 2 จุดที่อยู่ห่างกันไม่เกิน $\frac{\sqrt{2}}{3}$ หน่วย และต้องมี 3 จุดที่อยู่ภายในหรือบนเส้นรอบวงของวงกลมที่มีรัศมี 0.5 หน่วย
30. มีจุด 101 จุดอยู่ภายในสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่ยาวด้านละหนึ่งหน่วย จงแสดงว่าจะต้องมีสามจุดซึ่งเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ไม่เกิน 0.01 ตารางหน่วย
31. มีจุด 25 จุดในระนาบซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขว่าเมื่อพิจารณาสามจุดใด ๆ จะต้องมีส่วนจุดซึ่งมีระยะห่างน้อยกว่าหนึ่งหน่วยเสมอ จงพิสูจน์ว่ามีจุด 13 จุดจากที่กำหนดซึ่งอยู่ในวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย
32. จงแสดงว่า ในกลุ่มของคน 6 คน ซึ่งระหว่างคนสองคนใด ๆ ต้องเป็นเพื่อนกัน หรือมิฉะนั้นก็ไม่มีรู้จักกันมาก่อน จะต้องมีคน 3 คน ที่เป็นเพื่อนกันหมด หรือมิฉะนั้นต้องมีคน 3 คนซึ่งไม่มีรู้จักกันมาก่อน และจงแสดงว่า ข้อความนี้ไม่จริง ถ้ามีคนเพียง 5 คน
33. นักเรียนคนหนึ่งแก้ปัญหาคำนวณได้ 29 ข้อในเวลา 7 วัน จงแสดงว่ามีช่วงเวลา 2 วันติดกันที่เขาแก้ปัญหาลำบากอย่างน้อย 8 ข้อ
34. นักเรียน 17 คน แต่ละคนโทรศัพท์คุยกับคนอื่น ๆ อีก 16 คน โดยมีหัวข้อสนทนาอยู่ 3 เรื่อง แต่ละคู่จะคุยกันหนึ่งใน 3 เรื่องนี้เพียงเรื่องเดียวเท่านั้น จงแสดงว่ามีนักเรียนอย่างน้อย 3 คนที่คุยโทรศัพท์เรื่องเดียวกัน
35. ไพบุลย์เขียนเลข 1 ถึง 6 บนหน้าของลูกเต๋าน้ำตาลอย่างสุ่ม ๆ ไพโรจน์ไม่เห็นลูกเต๋านี้ แต่เขากล่าวว่า จะต้องมีส่วนหน้าสองหน้าที่อยู่ติดกันซึ่งมีเลขบนหน้าทั้งสองเป็นเลขที่เรียงติดกัน จงตรวจสอบว่าไพโรจน์พูดถูกต้องหรือไม่ และถ้าไพโรจน์กล่าวเพิ่มว่ามีหน้าที่ติดกันอย่างน้อยสองคู่ที่มีสมบัติดังกล่าว ประโยชน์นี้ถูกต้องหรือไม่
36. (Putnam 1956) ให้ $n > 1$ เมื่อพิจารณาจุด $2n$ จุดในอวกาศ และสมมติว่ามีส่วนของเส้นตรงอย่างน้อย $n^2 + 1$ เส้นที่เชื่อมจุดเหล่านี้ จงแสดงว่าต้องมีรูปสามเหลี่ยมเกิดขึ้นอย่างน้อยหนึ่งรูป และจงแสดงว่า สำหรับแต่ละ n เป็นไปได้ที่จะเชื่อมจุดด้วยส่วนของเส้นตรง n^2 เส้นโดยไม่เกิดรูปสามเหลี่ยมเลย

37. (Putnam 1971) กำหนดจุด 9 จุดใดๆ ในปริภูมิสามมิติ ซึ่งแต่ละจุดมีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า จะต้องมียี่สิบสองจุดจาก 9 จุดนี้ที่ภายในส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมสองจุดนี้มีอีกจุดหนึ่งที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็ม
38. ให้ $n \geq 2$ เรียกจุด $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ในปริภูมิ $\mathbb{R}^n$ ว่าจุดแลตทิซ (lattice point) ถ้า a_i เป็นจำนวนเต็มทุก $i = 1, 2, \dots, n$ จงแสดงว่าในเซตของจุดแลตทิซ $2^n + 1$ จุดใน $\mathbb{R}^n$ จะต้องมียี่สิบสองจุดที่จุดกึ่งกลางเป็นจุดแลตทิซ
39. (Putnam 1978) ให้ A เป็นเซตของจำนวนเต็ม 20 ตัวที่ต่างกันที่เลือกจากลำดับเลขคณิต $1, 4, 7, \dots, 100$ จงพิสูจน์ว่าจะต้องมีจำนวนเต็มที่แตกต่างกันสองตัวในเซต A ที่ผลบวกเท่ากับ 104
40. (26th Moscow MO) ให้ A เป็นเซตของจุด 6 จุดในระนาบที่ไม่มีสามจุดใดอยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกัน จงแสดงว่ามี 3 จุดในเซต A เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีมุมภายในมุมหนึ่งไม่เกิน 30°
41. (USSR MO 1980) ให้ $n \geq 3$ เป็นจำนวนคี่ จงแสดงว่ามีจำนวนหนึ่งในเซต

$$\{2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1\}$$

ซึ่งหารด้วย n ลงตัว

42. (USAMO 1985) ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่งที่มีคน n คน จงแสดงว่ามี 2 คนซึ่งในอีก $n - 2$ คนที่เหลือ มีอย่างน้อย $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$ คนที่แต่ละคนรู้จักทั้งสองคนนี้หรือไม่รู้จักทั้งสองคนนี้ สมมติว่าการรู้จักกันเป็นการรู้จักซึ่งกันและกันเสมอ
43. (USAMO 1986) สำหรับเซตจำกัด A ของจำนวนเต็ม ให้ $s(A)$ เป็นผลบวกของสมาชิกในเซต A ให้ S เป็นเซตย่อยของ $\{1, 2, 3, \dots, 15\}$ โดยที่ $s(B) \neq s(C)$ สำหรับสองเซตย่อย B, C ใดๆ ของ S ที่ไม่มีส่วนร่วมกัน จงแสดงว่า $|S| \leq 5$
44. พิจารณาทารางสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ของจำนวนจริง

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

ผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในแต่ละแถวมีค่าไม่เกิน d โดยที่ $d > 0$ จัดเรียงสมาชิกในแต่ละหลักใหม่ในลักษณะเรียงค่าจากค่ามากไปค่าน้อย โดยสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดในแต่ละหลักปรากฏในแถวที่ 1 และสมาชิกที่มีค่าน้อยที่สุดในแต่ละหลักปรากฏในแถวสุดท้าย จงแสดงว่าผลต่างของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดในแต่ละแถวยังคงเป็น d

45. พิจารณารูป 10 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ลากเส้นทแยงมุมทุกเส้น และใส่ตัวเลข “+1” กับแต่ละจุดยอดและแต่ละจุดตัดของเส้นทแยงมุม (เฉพาะจุดตัดภายในรูป 10 เหลี่ยม) เราสามารถเปลี่ยนเครื่องหมายของจำนวนทุกตัวที่อยู่บนด้านเดียวกันหรือเส้นทแยงมุมเดียวกันได้ เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเปลี่ยนเครื่องหมายของทุกจุดให้เป็นลบหมด
46. ในการแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันหมด มีทีมเข้าแข่งขันทั้งหมด 28 ทีม ทีมที่จะชนะจะได้ 2 แต้ม เสมอได้ 1 แต้ม และแพ้ได้ 0 แต้ม เมื่อสิ้นสุดการแข่งขัน พบว่าจำนวนเกมที่เสมอกันมีมากกว่า 75% ของจำนวนเกมทั้งหมดที่เล่น จงพิสูจน์ว่ามีสองทีมที่ได้แต้มสะสมเท่ากัน
47. ในงานเลี้ยงหนึ่งมีแขก 8 คนนั่งรอบโต๊ะ 8 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า ที่แต่ละตำแหน่งบนโต๊ะมีชื่อของแขกแต่ละคนติดอยู่ ถ้าไม่มีใครนั่งตรงกับชื่อของตนเองเลย จงแสดงว่าสามารถหมุนโต๊ะให้มือน้อย 2 คนที่นั่งตรงกับชื่อตนเองได้
48. (24th Spanish MO 1989) ในการสอบครั้งหนึ่ง มีคำถามถูกผิด 15 ข้อ มีผู้เข้าสอบ 1600 คน ถ้าทุกคนทำข้อสอบทุกข้อและไม่มีใครทำข้อสอบได้ถูกต้องกันสองข้อ จงแสดงว่ามีนักเรียนอย่างน้อยสองคนที่มีรูปแบบของคำตอบเหมือนกันทุกข้อ
49. ในกลุ่มคน 1990 คน ที่แต่ละคนมีเพื่อนอย่างน้อย 1327 คน จงแสดงว่ามี 4 คนในกลุ่มนี้ที่สองคนใดๆ ในกลุ่มนี้เป็นเพื่อนกัน สมมติว่าความเป็นเพื่อนเป็นความสัมพันธ์สองทาง
50. ให้ $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ เป็นจำนวนนับและ $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n$ และ $a_n \neq n+1$ จงแสดงว่าจะมีเซตย่อย K ของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ซึ่ง $\sum_{i \in K} a_i = n$ เมื่อ
- 50.1 n เป็นจำนวนคู่
- 50.2 n เป็นจำนวนคี่และมีเงื่อนไขเพิ่มเติมว่า $a_n \neq 2$
51. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ X เป็นเซตที่มีสมาชิก n ตัว ให้ C เป็นเซตของสับเซตที่มีจำนวนสมาชิก $p \geq 1$ ตัว จงหา p ที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้ เมื่อหาสับเซตย่อยของ X ด้วยสับเซตจาก C โดยที่แต่ละเซตย่อยใช้สับเซตเพียงสับเซตเดียว แล้วจะต้องมีเซตย่อย A และ B ที่ต่างกันของ X ซึ่งเซต $A, B, A \cup B, A \cap B$ มีสับเซตเหมือนกันเสมอ
52. ให้ S เป็นจุด 9 จุดบนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง และมีเส้น 36 เส้นเชื่อมจุดใน S แต่ละเส้นมีสีแดงหรือสีน้ำเงิน ถ้ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ใน S ทุกรูปต้องมีด้านที่เป็นสีแดงอยู่อย่างน้อยหนึ่งด้าน จงพิสูจน์ว่ามี 4 จุดซึ่งเส้นทั้ง 6 เส้นที่เชื่อมจุดเหล่านี้เป็นสีแดงหมด
53. ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{n^2+1}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน $n^2 + 1$ ตัว จงแสดงว่ามีลำดับย่อย $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n+1}}$ ซึ่ง $i_1 < i_2 < \dots < i_{n+1}$ ที่มีความยาว $n + 1$ ตัวและเป็นลำดับเพิ่มโดยแท้หรือลำดับลดโดยแท้

54. (IMO 1976) พิจารณาระบบสมการที่มี p สมการและมี $q = 2p$ ตัวแปรไม่ทราบค่า $x_1, x_2, \dots, x_q$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1q}x_q = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2q}x_q = 0$$

$$\vdots$$

$$a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pq}x_q = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ a_{ij} ทุกตัวเป็นสมาชิกของเซต $\{-1, 0, 1\}$

จงพิสูจน์ว่าระบบสมการนี้มีผลเฉลย $(x_1, x_2, \dots, x_q)$ ซึ่ง

(1) ทุก x_j เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $j = 1, 2, \dots, q$

(2) มี j อย่างน้อยหนึ่งค่าซึ่ง $x_j \neq 0$

(3) $|x_j| \leq q$ ทุก $j = 1, 2, \dots, q$

55. (IMO 1978) สภาระหว่างประเทศแห่งหนึ่งมีสมาชิกจำนวนหนึ่งที่มาจาก 6 ประเทศ ในบัญชีรายชื่อมีชื่อสมาชิกทั้งหมด 1978 ตามลำดับหมายเลข $1, 2, \dots, 1978$ จงพิสูจน์ว่ามีสมาชิกอย่างน้อย 1 คนที่หมายเลขเท่ากับผลบวกของหมายเลขของสมาชิกอีก 2 คนจากประเทศเดียวกัน หรือเป็น 2 เท่าของหมายเลขของสมาชิกคนหนึ่งจากประเทศเดียวกัน

56. (IMO 2001) ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่ที่มากกว่า 1 และให้ $c_1, c_2, \dots, c_n$ เป็นจำนวนเต็ม สำหรับแต่ละการเรียงสับเปลี่ยน $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ของ $\{1, 2, \dots, n\}$ นิยาม

$$S(a) = \sum_{i=1}^n c_i a_i$$

จงพิสูจน์ว่าการเรียงสับเปลี่ยน b และ c ที่ต่างกันซึ่ง $n!$ ทหาร $S(b) - S(c)$ ลงตัว

ฟังก์ชันก่อกำเนิด

5.1 ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ

งานหลักอย่างหนึ่งในการศึกษาปัญหาเชิงการนับคือการพัฒนาเครื่องมือที่ช่วยให้นับได้อย่างมีประสิทธิภาพ หนึ่งในเครื่องมือที่ใช้กันบ่อยคือ ฟังก์ชันก่อกำเนิด(generating functions) ซึ่งได้รับแรงจูงใจจากงานของ อาบราฮาม เดอ มัวฟวร์ (ค.ศ. 1667-1754) ในปี ค.ศ. 1720 และได้รับการพัฒนาต่อมาโดย เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ (ค.ศ. 1707-1783) ในปี ค.ศ. 1748 เพื่อศึกษาปัญหาการแบ่งกันจำนวนเต็ม ต่อในปลายคริสต์ศตวรรษที่ 18 ปีแยร์ ซีมง มาร์กี เดอ ลาปลาซ (ค.ศ.1749 - 1827) ได้พัฒนาแนวคิดอย่างเป็นระบบและเรียกชื่อว่า ฟังก์ชันก่อกำเนิด

ให้ $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ เป็นลำดับ ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ(ordinary generating function) ของลำดับนี้ คือ อนุกรมกำลัง(power series) ที่นิยามโดย

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

ในหัวข้อนี้จะใช้คำว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดแทนความหมายของฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ ฟังก์ชันก่อกำเนิด $A(x)$ และ $B(x)$ ของลำดับ (a_n) และ (b_n) ตามลำดับ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อ $a_k = b_k$ สำหรับทุก $k = 0, 1, 2, \dots$

ในการหาค่าของฟังก์ชันก่อกำเนิด เราจะสมมติว่า x เป็นค่าที่อนุกรมกำลังลู่เข้า ในความเป็นจริงแล้ว เราจะสนใจเพียงสัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลังเท่านั้น โดยไม่ต้องกังวลกับการลู่เข้าของอนุกรมกำลังมากนัก การหาผลบวกและผลคูณของฟังก์ชันก่อกำเนิดทำได้เช่นเดียวกับพหุนาม นั่นคือ ถ้าให้

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

$$B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

แล้ว จะได้

$$A(x) + B(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$A(x)B(x) = d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots$$

โดยที่สำหรับทุก $k = 0, 1, 2, \dots$

$$c_k = a_k + b_k \quad \text{และ}$$

$$d_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

ตัวอย่าง 5.1.1 $a_n = 1$ ทุก $n \geq 0$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n)

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n) คือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 5.1.2 ให้ $r \in \mathbb{R}$ และ $a_n = r^n$ ทุก $n \geq 0$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n)

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n) คือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} r^k x^k \\ &= 1 + rx + r^2 x^2 + r^3 x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{1-rx} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง 5.1.3 ให้ $m \in \mathbb{R}$ และ $a_n = \binom{m}{n}$ ทุก $n \geq 0$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n)

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n) คือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k \\ &= 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \binom{m}{3} x^3 + \cdots \\ &= (1+x)^m \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.4 ให้ $a_n = n$ ทุก $n \geq 0$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n)

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n) คือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k x^k \\ &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots \\ &= x \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots) \\ &= x \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.5 ให้ $m \in \mathbb{R}$ และ $a_n = H_n^m = \binom{m+n-1}{n}$ ทุก $n \geq 0$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n)

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n) คือ

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k \\ &= 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m+1}{2} x^2 + \binom{m+2}{3} x^3 + \cdots \\ &= (1-x)^{-m} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 5.1.6 ให้ c_n เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^{10}$ จงหา c_n

วิธีทำ สังเกตว่า

$$\begin{aligned}(x^3 + x^4 + x^5 + \dots)^{10} &= x^{30} (1 + x + x^2 + \dots)^{10} \\ &= \frac{x^{30}}{(1-x)^{10}} \\ &= x^{30} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{9+k-1}{k} x^k \\ &= x^{30} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+8}{8} x^k\end{aligned}$$

ดังนั้น $c_n = 0$ เมื่อ $n < 30$ และ

$$c_n = \binom{(n-30)+8}{8} = \binom{n-22}{8}$$

เมื่อ $n \geq 30$ ■

การหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับที่กำหนดให้ หรือการหาสัมประสิทธิ์ของ x^n ในฟังก์ชันก่อกำเนิดสามารถทำได้ง่ายโดยอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ให้ $A(x)$ และ $B(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n) และ (b_n) ตามลำดับ

1. สำหรับค่าคงตัว α และ β ใดๆ $\alpha A(x) + \beta B(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_n = \alpha a_n + \beta b_n \text{ สำหรับทุก } n$$

2. $A(x)B(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0 \text{ สำหรับทุก } n$$

ในกรณีที่ $A(x) = B(x)$ จะได้ $A^2(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_n = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_n a_0 \text{ สำหรับทุก } n$$

3. $x^m A(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } 0 \leq n \leq m-1 \\ a_{n-m} & \text{เมื่อ } n \geq m \end{cases}$$

4. $A(kx)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_n = k^n a_n \text{ สำหรับทุก } n$$

5. $(1-x)A(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_0 = a_0 \text{ และ } c_n = a_n - a_{n-1} \text{ สำหรับทุก } n \geq 1$$

6. $\frac{A(x)}{1-x}$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \text{ สำหรับทุก } n$$

7. $A'(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_n = (n+1)a_{n+1} \text{ สำหรับทุก } n$$

8. $\int_0^x A(t) dt$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (c_n) โดยที่

$$c_0 = 0 \text{ และ } c_n = \frac{a_{n-1}}{n} \text{ สำหรับทุก } n \geq 1$$

ตัวอย่าง 5.1.7 ให้ $s_n = \sum_{k=0}^n k^2$ สำหรับทุก $n \geq 0$ จงใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดหา s_n

วิธีทำ พิจารณาลำดับ (a_n) ที่นิยามโดย $a_n = n^2$ สำหรับทุก $n \geq 0$

สังเกตว่า $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ และ

$$a_n = (n+1) \cdot n - n = 2 \binom{n+1}{2} - \binom{n}{1}$$

หาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{1} x^k \\ &= 2(1-x)^{-2} - (1-x)^{-1} \end{aligned}$$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับ $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$ คือ

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{A(x)}{1-x} = 2(1-x)^{-3} - (1-x)^{-2} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{3} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{2} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2 \binom{k+2}{3} - \binom{k+1}{2} \right\} x^k \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} s_n &= 2 \binom{n+2}{3} - \binom{n+1}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{(n+2)(n+1)n}{6} - \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

■

5.2 ปัญหาเกี่ยวกับด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิด

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการนำฟังก์ชันก่อกำเนิดไปช่วยแก้ปัญหาเชิงการนับ พิจารณาตัวอย่างการหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

โดยที่ $0 \leq x_1 \leq 10$, $x_2 \geq 1$ และ $3 \leq x_3 \leq 9$

จะเห็นว่าสมการดังกล่าวมีผลเฉลยได้หลายผลเฉลย เช่น $5 + 4 + 9 = 15$ หรือ $3 + 5 + 7 = 15$

สำหรับแต่ละผลเฉลย เราสามารถสร้างรูปแบบการคูณของพจน์ในรูป x^n ได้ดังนี้

$$5 + 4 + 9 = 15 \quad \leftrightarrow \quad x^5 \cdot x^4 \cdot x^9 = x^{15}$$

$$3 + 5 + 7 = 15 \quad \leftrightarrow \quad x^3 \cdot x^5 \cdot x^7 = x^{15}$$

ในกรณีทั่วไป จะแทนผลเฉลย $n_1 + n_2 + n_3 = 15$ ได้ด้วย $x^{n_1} \cdot x^{n_2} \cdot x^{n_3} = x^{15}$

พิจารณาผลคูณของพหุนาม

$$f(x) = \underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})}_{(x_1)} \underbrace{(x + x^2 + \cdots)}_{(x_2)} \underbrace{(x^3 + x^4 + \cdots + x^9)}_{(x_3)}$$

เมื่อกระจายผลคูณ จะได้พจน์ในรูป $x^{n_1} \cdot x^{n_2} \cdot x^{n_3}$ โดยที่ n_1, n_2, n_3 เป็นจำนวนเต็มซึ่ง

$$0 \leq n_1 \leq 10, \quad n_2 \geq 1 \quad \text{และ} \quad 3 \leq n_3 \leq 9$$

ซึ่งแต่ละพจน์แทนผลเฉลยแต่ละผลเฉลยนั่นเอง การหาจำนวนผลเฉลยของสมการ $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ ซึ่งเท่ากับ การหาจำนวนพจน์ซึ่ง $x^{n_1} \cdot x^{n_2} \cdot x^{n_3} = x^{15}$ ใน $f(x)$ เราจึงได้ลดรูปปัญหาการนับมาสู่ปัญหาการหาสัมประสิทธิ์ของ x^{15} ใน $f(x)$ ซึ่งสามารถทำได้ง่ายโดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันก่อกำเนิดในหัวข้อที่แล้ว

$$\begin{aligned}
 f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^{10})(x + x^2 + \cdots)(x^3 + x^4 + \cdots + x^9) \\
 &= \frac{1 - x^{11}}{1 - x} \cdot \frac{x}{1 - x} \cdot \frac{x^3(1 - x^7)}{1 - x} \\
 &= x^4(1 - x^{11})(1 - x^7)(1 - x)^{-3} \\
 &= x^4(1 - x^7 - x^{11} + x^{18}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k
 \end{aligned}$$

จึงได้สัมประสิทธิ์ของ x^{15} เท่ากับ

$$\binom{11+2}{2} - \binom{4+2}{2} - \binom{0+2}{2} = 78 - 15 - 1 = 62$$

ซึ่งก็คือจำนวนผลเฉลยที่ต้องการ

จากตัวอย่างที่แสดงข้างต้น จะเห็นว่าเราจำลองปัญหาด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิด และการนับเหตุการณ์ที่ต้องการก็คือการหาสัมประสิทธิ์ในฟังก์ชันก่อกำเนิดนั่นเอง

ตัวอย่าง 5.2.1 เด็ก 5 คนโยนลูกเต๋าค้นละลูก จงหาจำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทูกลูกเท่ากับ 22

วิธีทำ เนื่องจากแต้มบนลูกเต๋าค้นละลูกเป็นได้เพียง 6 ค่าคือ 1, 2, 3, 4, 5, 6

จึงแทนลูกเต๋าค้นละลูกได้ด้วย $x + x^2 + \cdots + x^6$

ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับปัญหานี้คือ

$$f(x) = (x + x^2 + \cdots + x^6)^5$$

จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทูกลูกเท่ากับ 22 ก็คือสัมประสิทธิ์ของ x^{22} ใน $f(x)$

ซึ่งสามารถหาสัมประสิทธิ์ดังกล่าวได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left(\frac{x(1 - x^6)}{1 - x} \right)^5 = x^5 (1 - x^6)^5 (1 - x)^{-5} \\
 &= x^5 (1 - 5x^6 + 10x^{12} - 10x^{18} + 5x^{24} - x^{30}) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^k
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มบนลูกเต๋าทูกลูกเท่ากับ 22 เท่ากับ

$$\binom{17+4}{4} - 5\binom{11+4}{4} + 10\binom{5+4}{4} = 420$$

■

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาจำนวนวิธีในการใส่บอล 14 ลูกที่เหมือนกันลงในกล่อง 4 ใบที่ต่างกัน โดยที่กล่องใบสุดท้ายต้องมีจำนวนบอลไม่น้อยกว่าสามกล่องรวมกัน

วิธีทำ ให้จำนวนบอลในกล่องทั้ง 4 เท่ากับ x_1, x_2, x_3, x_4 ตามลำดับ จะเห็นว่า

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14$$

โดยมีเงื่อนไขว่า $x_4 \geq x_1 + x_2 + x_3$

เมื่อแทน $x_1 + x_2 + x_3 = 14 - x_4$ จะได้ $x_4 \geq 14 - x_4$ นั่นคือ $x_4 \geq 7$

จึงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดของจำนวนวิธีใส่บอลลงกล่องได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)^3 (x^7 + x^8 + x^9 + \cdots) \\ &= \frac{1}{(1-x)^3} \cdot \frac{x^7}{1-x} = x^7 (1-x)^{-4} \\ &= x^7 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีใส่บอลลงกล่องตามเงื่อนไขที่ต้องการก็คือสัมประสิทธิ์ของ x^{14} ใน $f(x)$ ซึ่งเท่ากับ

$$\binom{7+3}{3} = 120$$

ตัวอย่าง 5.2.3 พิจารณาปัญหาการแบ่งชิ้นของจำนวนเต็ม ให้ $p(n)$ เป็นจำนวนวิธีในการเขียน n เป็นผลรวมของจำนวนเต็มอื่นๆ โดยไม่คำนึงถึงลำดับ เช่น

$$\begin{aligned} 5 &= 1 + 4 = 2 + 3 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 \\ &= 1 + 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

จึงได้ $p(5) = 7$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับ $p(n)$

วิธีทำ สมมติว่าเขียน n ในรูปผลบวกของจำนวนเต็มต่างๆ

โดยมี 1 อยู่ x_1 ตัว มี 2 อยู่ x_2 ตัว มี 3 อยู่ x_3 ตัว ... มี k อยู่ x_k ตัว ... ดังนั้น

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \cdots + kx_k + \cdots = n$$

ให้ $y_k = kx_k$ เมื่อ $k = 1, 2, \dots$ จะได้สมการ

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots = n$$

โดยที่ $y_k = 0, k, 2k, \dots$ ทุก $k = 1, 2, \dots$

จึงสร้างฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับจำนวนผลเฉลยของสมการดังกล่าวได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x) &= (1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)(1 + x^3 + x^6 + \cdots) \cdots \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \cdots \end{aligned}$$

5.3 ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล

ในสองหัวข้อที่แล้ว เราได้ศึกษาการแก้ปัญหาคำนวณด้วยฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ ซึ่งเกี่ยวกับการแก้ปัญหาคำนวณลำดับที่มีความสำคัญ เช่น ในการแจกของที่แตกต่างกันลงกล่องที่ต่างกัน วิธีในการแจกของลงกล่องขึ้นกับจำนวนบอลในแต่ละกล่องเท่านั้น โดยไม่ได้สนใจว่าบอลลูกไหนจะอยู่กล่องไหน แต่ยังมีปัญหาคำนวณประเภทที่ลำดับมีความสำคัญ เช่น แจกของที่แตกต่างกันลงกล่องที่ต่างกัน ซึ่งวิธีในการแจกของลงกล่องขึ้นกับว่าบอลลูกไหนอยู่กล่องไหนด้วย ปัญหาประเภทนี้สามารถนับได้ด้วย ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล(exponential generating functions) ซึ่งนิยามได้ดังนี้

ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของลำดับ (a_n) คือ

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$$

ตัวอย่าง 5.3.1 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของ $(a_n) = (1, 1, 1, \dots)$

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของ (a_n) คือ

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

ซึ่งเป็นเหตุผลว่าทำไมถึงเรียกฟังก์ชันก่อกำเนิดนี้ว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล ■

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของ $(a_n) = (1, r, r^2, \dots)$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของ (a_n) คือ

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(rx)^k}{k!} = e^{rx}$$

ตัวอย่าง 5.3.3 จงแสดงว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของ

$$(a_n) = (1, 1 \cdot 3, 1 \cdot 3 \cdot 5, \dots)$$

$$\text{คือ } (1 - 2x)^{-\frac{3}{2}}$$

วิธีทำ เป็นการเพียงพอที่จะแสดงว่าสัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $(1 - 2x)^{-\frac{3}{2}}$ คือ

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n + 1)}{n!}$$

พิจารณาการกระจายทวินาม

$$(1-2x)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-3/2}{k} (-2x)^k$$

จะเห็นว่าสัมประสิทธิ์ของ x^n คือ

$$\begin{aligned} \binom{-3/2}{n} (-2)^n &= \frac{1}{n!} \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}-1\right) \cdots \left(-\frac{3}{2}-n+1\right) \cdot (-2)^n \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{5}{2}\right) \cdots \left(\frac{2n+1}{2}\right) \cdot (-2)^n \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{n!} \end{aligned}$$

ตามต้องการ ■

ตัวอย่าง 5.3.4 จงหาจำนวนวิธีในการสร้างคำที่มีความยาว 8 ตัวอักษร จากตัวอักษร A, B, C โดยมีเงื่อนไขว่า ต้องมี A อยู่ 1, 2 หรือ 3 ตัว ต้องมี B อยู่ 2, 3 หรือ 4 ตัว และต้องมี C อยู่ 0, 2 หรือ 4 ตัว

วิธีทำ พิจารณาตัวอย่างคำตามเงื่อนไขของโจทย์ เช่น AABBBBCC ซึ่งเรียงสับเปลี่ยนได้ $\frac{8!}{2!4!2!}$ วิธี

หรือ ABBBCCCC ซึ่งเรียงสับเปลี่ยนได้ $\frac{8!}{1!3!4!}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีทั้งหมดคือ

$$\sum \frac{8!}{n_1!n_2!n_3!}$$

โดยหาผลรวมตามเงื่อนไข $n_1 = 1, 2, 3$, $n_2 = 2, 3, 4$, $n_3 = 0, 2, 4$ และ $n_1 + n_2 + n_3 = 8$

พิจารณาฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล

$$f(x) = \left(\frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)$$

เมื่อกระจาย $f(x)$ จะได้พจน์ในรูป $\frac{x^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{x^{n_2}}{n_2!} \cdot \frac{x^{n_3}}{n_3!}$ โดยที่ $n_1 = 1, 2, 3$, $n_2 = 2, 3, 4$, $n_3 = 0, 2, 4$

ซึ่งจะได้สัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^8}{8!}$ เท่ากับ $\sum \frac{8!}{n_1!n_2!n_3!}$

ดังนั้น ปัญหาการนับคำที่มีความยาว 8 อักษรตามเงื่อนไขที่กำหนดจึงแทนได้ด้วยปัญหาการหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^8}{8!}$ ใน $f(x)$

ดังนั้น จำนวนคำที่ต้องการเท่ากับ

$$\frac{8!}{1!3!4!} + \frac{8!}{2!2!4!} + \frac{8!}{2!4!2!} + \frac{8!}{3!3!2!} = 1680$$

■

ตัวอย่าง 5.3.5 จงหาจำนวนวิธีในการสร้างคำที่มีความยาว 8 ตัวอักษร จากตัวอักษร A, B, C โดยมีเงื่อนไขว่า ต้องมี A อย่างน้อย 1 ตัว ต้องมี B อย่างน้อย 2 ตัว และอาจไม่มี C เลยก็ได้

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับจำนวนวิธีในการสร้างคำตามเงื่อนไขที่กำหนดคือ

$$f(x) = \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)$$

โดยที่วงเล็บแรกแทนตัวอักษร A และวงเล็บที่ 2 และ 3 แทนตัวอักษร B และ C ตามลำดับ

การหาจำนวนคำที่มีความยาว 8 ตัวอักษร ก็คือการหาสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^8}{8!}$ ใน $f(x)$

เนื่องจาก $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ เราจึงได้

$$\begin{aligned} f(x) &= (e^x - 1)(e^x - 2)(e^x) \\ &= e^{3x} - 3e^{2x} + 2e^x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} - 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างคำ ซึ่งเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^8}{8!}$ จึงมีค่าเท่ากับ

$$3^8 - 3 \cdot 2^8 + 2 = 6371$$

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาจำนวนวิธีในการสร้างคำที่มีความยาว 8 ตัวอักษร จากตัวอักษร A, B, C โดยมีเงื่อนไขว่า ต้องมี A เป็นจำนวนคู่ตัว ต้องมี B เป็นจำนวนคี่ตัว และอาจไม่มี C เลยก็ได้

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับจำนวนวิธีในการสร้างคำตามเงื่อนไขที่กำหนดคือ

$$f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right)$$

สังเกตว่า

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

ดังนั้น

$$e^x + e^{-x} = 2 \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right)$$

และ

$$e^x - e^{-x} = 2 \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) e^x \\ &= \frac{1}{4} (e^{3x} - e^{-x}) \end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างคำ ซึ่งเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^8}{8!}$ จึงมีค่าเท่ากับ

$$\frac{1}{4} (3^8 - (-1)^8) = 1640 \quad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.3.7 จงหาจำนวนวิธีในการสร้างคำที่มีความยาว 20 ตัวอักษร จากตัวอักษร A, B, C โดยมีเงื่อนไขว่า อาจไม่มี A เลยก็ได้ แต่ต้องมี B เป็นจำนวนคี่ตัว และต้องมี C เป็นจำนวนพหุคูณของ 4

วิธีทำ ฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับจำนวนวิธีในการสร้างคำตามเงื่อนไขที่กำหนดคือ

$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \right) \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right) \left(1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \right)$$

$$\text{จาก } e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

แทน x ด้วย ix, i^2x, i^3x ตามลำดับ จะได้

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\ e^{i^2x} &= 1 + \frac{i^2x}{1!} + \frac{(i^2x)^2}{2!} + \frac{(i^2x)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2x)^k}{k!} \\ e^{i^3x} &= 1 + \frac{i^3x}{1!} + \frac{(i^3x)^2}{2!} + \frac{(i^3x)^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^3x)^k}{k!} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$e^x + e^{ix} + e^{i^2x} + e^{i^3x} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 + i^k + i^{2k} + i^{3k}) \frac{x^k}{k!}$$

สังเกตว่า

$$1 + i^k + i^{2k} + i^{3k} = \begin{cases} 4 & \text{เมื่อ } 4 \mid k \\ 0 & \text{เมื่อ } 4 \nmid k \end{cases}$$

ดังนั้น

$$e^x + e^{ix} + e^{i^2x} + e^{i^3x} = 4 \left(1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \right)$$

เราจึงได้

$$\begin{aligned}
 f(x) &= e^x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) \left(\frac{e^x + e^{ix} + e^{-x} + e^{-ix}}{4} \right) \\
 &= \frac{e^x}{8} (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x}) + \frac{e^x}{8} (e^x - e^{-x})(e^{ix} + e^{-ix}) \\
 &= \frac{1}{8} (e^{3x} - e^{-x}) + \frac{e^{2x} - 1}{8} (e^{ix} + e^{-ix}) \\
 &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{\infty} (3^k - (-1)^k) \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}
 \end{aligned}$$

สังเกตว่าสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^n}{n!}$ ใน

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

คือ

$$\frac{n!}{n!0!} 2^n + \frac{n!}{(n-2)!2!} 2^{n-2} + \cdots + \frac{n!}{(n-2m)!2m!} 2^{n-2m}$$

โดยที่ $m = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสร้างค่า ซึ่งเท่ากับสัมประสิทธิ์ของ $\frac{x^n}{n!}$ คือ

$$\frac{3^n - (-1)^n}{8} + \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

■

แบบฝึกหัด เรื่องฟังก์ชันก่อกำเนิด

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{23} ในการกระจาย $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5$
2. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^n ในการกระจาย $(1 + x + x^2 + \dots + x^5)^6$ เมื่อ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มใดๆ
3. กำหนดลำดับ (a_n) โดย $a_n = \sum_{k=0}^n k \cdot 2^k$ ทุก $n \geq 0$

จงใช้ฟังก์ชันก่อกำเนิดเพื่อแสดงว่า

$$\sum_{k=0}^n k \cdot 2^k = 2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}$$

4. ให้ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$

4.1 จงแสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n) ซึ่ง $a_n = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$ สำหรับทุก $n \geq 0$

4.2 จงใช้เอกลักษณ์ $\frac{1}{1-x} = (f(x))^2$ เพื่อแสดงว่า สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$$

5. จงแสดงว่า $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} \binom{m}{k} = n \binom{n+m-1}{n}$

6. จงหาจำนวนวิธีในการแจกของ 10 ชิ้นที่เหมือนกันให้เด็ก 3 คน โดยที่ไม่มีใครได้ของเกิน 4 ชิ้น
7. จงหาจำนวนวิธีในการแจกของที่เหมือนกัน 40 ชิ้นลงกล่อง 7 กล่องที่ต่างกัน โดยกล่องแรกต้องมีอย่างน้อย 1 ชิ้น แต่ไม่เกิน 10 ชิ้น
8. จงหาจำนวนวิธีในการแบ่งเก้าอี้ที่เหมือนกัน 100 ตัวไปตามห้องเรียน 4 ห้อง โดยที่จำนวนเก้าอี้ในแต่ละห้องต้องเป็น 10, 20, 30, 40 หรือ 50 ตัวเท่านั้น
9. ให้ a_n เป็นจำนวนวิธีในการแจกของ r ชิ้นที่เหมือนกันลงกล่อง 5 กล่องที่ต่างกัน โดยกล่องที่ 1, 3 และ 5 ต้องไม่ว่าง ให้ b_n เป็นจำนวนวิธีในการแจกของ r ชิ้นที่เหมือนกันลงกล่อง 5 กล่องที่ต่างกันโดยกล่องที่ 2 และ 4 ต้องมีอย่างน้อยกล่องละ 2 ชิ้น
 - 9.1 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n)
 - 9.2 จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (b_n)
 - 9.3 จงแสดงว่า $a_n = b_{n+1}$ สำหรับทุก $n = 1, 2, \dots$

10. ให้ $k, m, n \in \mathbb{N}$ และ $r \geq 0$ ให้ a_n เป็นจำนวนวิธีในการแจกลูกบอล n ลูกที่เหมือนกันลงกล่อง $2k+1$ กล่อง โดยกล่อง $k+1$ ใบแรกไม่ว่าง และให้ b_n เป็นจำนวนวิธีในการแจกลูกบอล n ลูกที่เหมือนกันลงกล่อง $2k+1$ กล่อง โดย k กล่องสุดท้ายมีลูกบอลอย่างน้อยกล่องละ m ลูก

10.1 หาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n)

10.2 หาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (b_n)

10.3 จงแสดงว่า $a_n = b_{n+(m-1)k-1}$

11. ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และให้ a_n เป็นจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 = n$$

โดย $2 \leq x_1 \leq 8$, $1 \leq x_2 \leq 7$ และ $8 \leq x_3 \leq 15$

จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับลำดับ (a_n)

12. จงหาจำนวนวิธีในการแจกเหรียญบาท 100 เหรียญให้เด็ก 10 คน โดยที่แต่ละคนต้องได้อย่างน้อย 4 เหรียญ แต่ไม่เกินคนละ 30 เหรียญ

13. จงหาจำนวนวิธีในการสร้างคำที่มีความยาว 10 ตัวอักษร จาก M, A, T, H, S โดยที่

13.1 มีตัว M ได้อย่างมาก 3 ตัว และมีตัว T อย่างน้อย 2 ตัว

13.2 มีตัว M เป็นจำนวนคู่ตัว และมีตัว T อย่างน้อย 1 ตัว

13.3 มีตัว M เป็นจำนวนคู่ตัว และมีตัว T เป็นจำนวนคู่ตัว

14. จงหาจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก $4n$ ตัวของเซต $\{3n \cdot a, 3n \cdot b, 3n \cdot c\}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

15. จงหาจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก $3n$ ตัวของเซต $\{n \cdot a_1, n \cdot a_2, \dots, n \cdot a_m\}$ เมื่อ $m, n \geq 3$

16. โยนลูกเต๋า 10 ลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาโอกาสที่จะได้ผลรวมของแต้มเท่ากับ 36

17. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม และ a_n เป็นจำนวนวิธีในการเลือกสมาชิก 4 ตัวจาก $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยไม่เลือกสมาชิกตัวที่อยู่ติดกัน จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n) และจงหา a_n

18. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม และ $m, t \in \mathbb{N}$ ให้ a_n เป็นจำนวนเซตย่อยที่มีสมาชิก m ตัว $\{n_1, n_2, \dots, n_m\}$ ของเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยที่ $n_1 < n_2 < \dots < n_m$ และ $n_{i+1} - n_i \geq t$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \dots, m-1$ จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของ (a_n) และจงแสดงว่า

$$a_n = \binom{r - (m-1)(t-1)}{m}$$

19. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม และ a_n เป็นจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq r$$

โดยที่ $3 \leq x_1 \leq 9$, $1 \leq x_2 \leq 10$, $x_3 \geq 2$ และ $x_4 \geq 0$

จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n) และจงหา a_{20}

20. จงหาผลบวก $S = \sum_{k=0}^n 2^{k-2n} \binom{2n-k}{n}$
21. ให้ $a_n = 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n \geq 0$ จงแสดงว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับลำดับ (a_n) คือ $(1-3x)^{-\frac{4}{3}}$
22. จงหาจำนวนเลขฐาน 4 ที่มี n หลัก และมี 0 เป็นจำนวนคี่ตัว มี 1 เป็นจำนวนคู่ตัว มี 3 อย่างน้อย 1 ตัว
23. จงหาจำนวนคำที่มีความยาว n ที่สร้างจากตัวอักษร A,B,C,D,E,F โดยที่
- 23.1 A และ B รวมกันมีจำนวนคู่ตัว
- 23.2 A และ B รวมกันมีจำนวนคี่ตัว
24. จงหาจำนวนวิธีในการแจกลูกบอล n ที่เหมือนกันลงกล่อง 5 กล่องที่ต่างกัน โดยกล่องที่ 2 และ 4 แต่ละกล่องมีลูกบอลเป็นจำนวนคู่ลูก และกล่องที่เหลือแต่ละกล่องมีลูกบอลเป็นจำนวนคี่ลูก
25. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับจำนวนวิธีตามเงื่อนไขในปัญหาแต่ละข้อต่อไปนี้
- 25.1 จำนวนวิธีในการเขียนจำนวนนับ n เป็นผลบวกของจำนวนนับที่มีค่าไม่เกิน 6 โดยลำดับในการเขียนไม่มีความสำคัญ
- 25.2 จำนวนวิธีในการโยนลูกเต๋า 10 ลูกให้ได้ผลรวมของแต้มเท่ากับ n
- 25.3 จำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบของ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 = n$
26. จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{r=1}^n \sum_{k=0}^r (-1)^{k+1} \frac{k}{r} \binom{r}{k} k^{n-1} = 0$$

เมื่อ $n = 2, 3, \dots$

27. จงพิสูจน์

$$\sum \frac{1}{k_1! k_2! \cdots k_n!} = \frac{1}{m!} \binom{n-1}{m-1}$$

เมื่อทำการบวกทุกพจน์ซึ่งจำนวนเต็ม $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ สอดคล้องกับ $\sum_{i=1}^n k_i = m$ และ $\sum_{i=1}^n i \cdot k_i = m$

28. จงหาจำนวนวิธีในการจัดพนักงานหญิง 10 คนและพนักงานชาย 8 คนให้เข้าทำงานในแผนก 4 แผนก โดยที่
- 28.1 แต่ละแผนกมีพนักงานอย่างน้อยหนึ่งคน
- 28.2 แต่ละแผนกมีพนักงานหญิงอย่างน้อยหนึ่งคน
- 28.3 แต่ละแผนกมีพนักงานหญิงอย่างน้อยหนึ่งคนและมีพนักงานชายอย่างน้อยหนึ่งคน
29. ให้ $r \geq 0$ เป็นจำนวนเต็มและ $n \in \mathbb{N}$ ให้ $a_n = F(n, m)$ เป็นจำนวนวิธีในการแจกของที่แตกต่างกัน n ชิ้นลงกล่อง m กล่องที่ต่างกัน โดยไม่มีกล่องใดว่าง ดังนั้น $a_n = n! S(n, m)$ เมื่อ $S(n, m)$ คือจำนวนสเตอร์ลิงกซ์ชนิดที่สอง จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของลำดับ (a_n)

30. ให้ $m \in \mathbb{N}$ และ $A_m(x)$ เป็นฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับลำดับ $a_n = S(n, m)$
จงหา $A_m(x)$ และจงแสดงว่า

$$A'_m(x) = mA_m(x) + A_{m-1}(x)$$

เมื่อ $m \geq 2$

31. ให้ $B_0 = 1$ และ $B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k)$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ จำนวน B_n เรียกว่า จำนวนเบลล์ (Bell numbers)
จงแสดงว่าฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียลของลำดับ (B_n) คือ $e^{e^x - 1}$

32. จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดของลำดับ (a_n) ซึ่งเป็นจำนวนวิธีในการแจกลูกบอลที่เหมือนกัน n ลูกลงกล่องในแต่ละข้อต่อไปนี้

32.1 กล่อง 4 กล่องที่ต่างกัน

32.2 กล่อง 4 กล่องที่ต่างกันและไม่มีกล่องใดว่าง

32.3 กล่อง 4 กล่องที่เหมือนกันและไม่มีกล่องใดว่าง

32.4 กล่อง 4 กล่องที่เหมือนกัน

33. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม และ $m \in \mathbb{N}$ ให้ a_n เป็นจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

โดยที่ $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 1$

จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับลำดับ (a_n)

34. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม และ $m \in \mathbb{N}$ ให้ a_n เป็นจำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

โดยที่ $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_m \geq 0$

จงหาฟังก์ชันก่อกำเนิดสำหรับลำดับ (a_n)

35. ให้ $n \geq 0$ เป็นจำนวนเต็ม และ $m \in \mathbb{N}$ ให้ a_n เป็นจำนวนวิธีในการแจกของที่เหมือนกัน n ชิ้นลงกล่อง m กล่องที่เหมือนกัน และให้ b_n จำนวนผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$\sum_{k=1}^m k \cdot x_k = n$$

โดยที่ $x_k \geq 0$ สำหรับทุก $k = 1, 2, \dots, m$ จงแสดงว่า $a_n = b_n$ สำหรับทุก $n \geq 0$

6.1 ปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิด

มีปัญหการนับหลายปัญหาที่นับตรงๆ ได้ยาก แต่สามารถสร้างความสัมพันธ์ในรูปของลำดับได้ ซึ่งเราเห็นตัวอย่างลักษณะนี้มาบ้างแล้ว เช่นความสัมพันธ์ในรูปสามเหลี่ยมปาสกาล

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าสัมประสิทธิ์ทวินามในแถวที่ n หาได้จากสัมประสิทธิ์ทวินามในแถวที่ $n-1$ ประกอบกับค่าเริ่มต้น $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ จะทำให้เราคำนวณสัมประสิทธิ์ทวินามทุกตัวได้

ปัญหาอื่นในลักษณะเดียวกันที่เราเคยพบมาแล้วได้แก่ ลำดับเลขคณิตที่มีความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ที่ติดกันในรูป $a_n = a_{n-1} + d$ เมื่อ d เป็นผลต่างร่วมซึ่งเป็นค่าคงตัว และลำดับเรขาคณิตที่มีความสัมพันธ์ระหว่างพจน์ที่ติดกันในรูป $a_n = ra_{n-1}$ เมื่อ r เป็นอัตราส่วนร่วมซึ่งเป็นค่าคงตัว ลำดับทั้งสองประเภทนี้เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น a_0 ให้ จะสามารถคำนวณค่าอื่นๆ ในลำดับได้ ลักษณะความสัมพันธ์เช่นนี้เรียกว่า ความสัมพันธ์เวียนเกิด(recurrence relations) ซึ่งก็คือความสัมพันธ์ที่นิยาม a_n ในรูปของพจน์ก่อนหน้า $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

ในหลายปัญหา เราสามารถหารูปแบบปิด(closed form) สำหรับ a_n ได้ ซึ่งหมายถึงเขียน a_n ในรูปที่ไม่ขึ้นกับพจน์อื่นๆ ในลำดับได้ นอกจากพจน์ที่ใช้เป็นค่าเริ่มต้น เช่น ลำดับเลขคณิต $a_n = a_{n-1} + d$ ที่มีค่าเริ่มต้น a_0 มีรูปแบบปิด $a_n = a_0 + (n-1)d$ และลำดับเรขาคณิต $a_n = ra_{n-1}$ ที่มีค่าเริ่มต้น a_0 มีรูปแบบปิด $a_n = a_0 r^{n-1}$ เป็นต้น อย่างไรก็ตาม มีปัญหาอีกมากมายที่เราสามารถสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้ แต่ไม่อาจหารูปแบบปิดได้

เราจะเริ่มต้นศึกษาปัญหาความสัมพันธ์เวียนเกิดที่เป็นที่รู้จักกันดี นั่นคือปัญหาของลำดับฟีโบนัคชี (Fibonacci sequence) ปัญหานี้ตั้งขึ้นในคริสต์ศตวรรษที่ 13 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีชื่อฟีโบนัคชี

ตัวอย่าง 6.1.1 เริ่มต้นมีกระต่ายตัวผู้และตัวเมียคู่หนึ่ง เมื่อสิ้นเดือนที่ 2 กระต่ายคู่นี้จะให้ลูกออกมาคู่หนึ่ง และหลังจากนั้นกระต่ายจะให้ลูกออกมาเดือนละคู่ โดยสมมติว่าแต่ละคู่มีตัวผู้และตัวเมียเสมอ ลูกกระต่ายคู่ที่เกิดออกมาใหม่ เมื่อครบสองเดือนก็จะให้ลูกกระต่ายออกมาหนึ่งคู่ และหลังจากนั้นจะให้ลูกออกมาอีกเดือนละคู่เช่นกัน จงหาจำนวนกระต่ายเมื่อผ่านไป 1 ปี

วิธีทำ ให้ F_n เป็นจำนวนคู่ของกระต่ายเมื่อเริ่มต้นเดือนที่ n เราต้องการหาค่า F_{13}

จากข้อมูลที่โจทย์ให้มา เรามี $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$

เมื่อสิ้นเดือนที่ 2 มีลูกกระต่ายออกมาหนึ่งคู่ จึงได้ $F_3 = 2$

เมื่อสิ้นเดือนที่ 3 มีลูกกระต่ายออกมาอีกคู่ จึงได้ $F_4 = 3$

เมื่อสิ้นเดือนที่ 4 มีลูกกระต่ายจากพ่อแม่เดิมหนึ่งคู่ และจากลูกกระต่ายคู่แรกอีกหนึ่งคู่ จึงได้ $F_5 = 5$

เราสามารถไล่หาจำนวนกระต่ายในแต่ละเดือนไปได้เรื่อยๆ แต่ปัญหาจะเริ่มซับซ้อนขึ้นตามจำนวนเดือนที่เพิ่มขึ้นเช่นกัน ในความเป็นจริงแล้ว เราสามารถมองปัญหาได้ง่ายโดยการสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิด นั่นคือ เขียน F_n ในรูปของ $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$

เนื่องจากกระต่ายแต่ละคู่จะให้ลูกได้เมื่ออายุครบ 2 เดือน จึงเห็นได้ว่าจำนวนคู่ของกระต่ายเมื่อสิ้นเดือนที่ n เท่ากับจำนวนคู่ของกระต่ายเมื่อสิ้นเดือนที่ $n-1$ รวมกับจำนวนคู่ของลูกกระต่ายเกิดใหม่ซึ่งเท่ากับจำนวนคู่ของกระต่ายเมื่อสิ้นเดือนที่ $n-2$ (ซึ่งโตพอที่จะให้ลูกได้) นั่นคือ

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

ค่า F_n จึงหาได้จากพจน์สองตัวก่อนหน้าในลำดับ จึงต้องมีค่าเริ่มต้นสองค่า นั่นคือ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$ ลำดับ $(F_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$ นี้เรียกว่าลำดับฟีโบนัคชี ในหัวข้อต่อไปนี้จะได้อธิบายวิธีการหารูปแบบปิดของลำดับฟีโบนัคชี ■

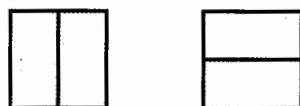
ตัวอย่าง 6.1.2 กำหนดให้โดมิโนคือแผ่นสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 1×2

จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการนำโดมิโนมาเรียงให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด $n \times 2$

วิธีทำ ให้ t_n แทนจำนวนวิธีทั้งหมดในการเรียงโดมิโนให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด $n \times 2$

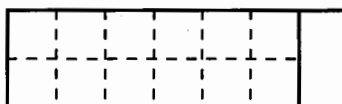
เห็นได้ชัดว่า $t_1 = 1$ เพราะเรียงได้เพียงวิธีเดียวเท่านั้น

และ $t_2 = 2$ เพราะมีเพียง 2 วิธีในการเรียง คือ



ลองพิจารณา t_7 โดยแบ่งออกเป็น 2 กรณีที่ไม่มีส่วนร่วมกัน ดังนี้

กรณีที่ 1 แผ่นสุดท้ายเรียงในแนวตั้ง

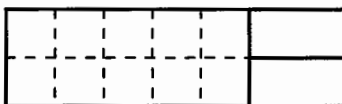


เรียงโดมิโน 6 แผ่นแรกให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 6×2 ได้ t_6 วิธี

และเรียงแผ่นสุดท้ายได้ 1 วิธี

โดยหลักการคูณ ในกรณีนี้จึงเรียงได้ t_6 วิธี

กรณีที่ 2 สองแผ่นสุดท้ายเรียงในแนวนอน



เรียงโดมิโน 5 แผ่นแรกให้ได้รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 5×2 ได้ t_5 วิธี

และเรียงแผ่นสุดท้ายได้ 1 วิธี

โดยหลักการคูณ ในกรณีนี้จึงเรียงได้ t_5 วิธี

โดยหลักการบวก จึงได้

$$t_7 = t_6 + t_5$$

ในความเป็นจริงแล้ว เราสามารถแสดงวิธีการนับข้างต้นได้สำหรับ t_n ใดๆ ซึ่งจะได้

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$$

สำหรับ $n = 3, 4, 5, \dots$

โดยมีค่าเริ่มต้นคือ $t_1 = 1$ และ $t_2 = 2$

ซึ่งเมื่อแทนค่าหา t_n ไปทีละขั้น จะได้ลำดับ $(t_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$

สังเกตว่า t_n มีค่าคล้ายกับลำดับฟีโบนัชชี ในความเป็นจริงแล้วสามารถเขียน t_n ในรูปของลำดับฟีโบนัชชี ได้ดังนี้

$$t_n = F_{n+1}$$

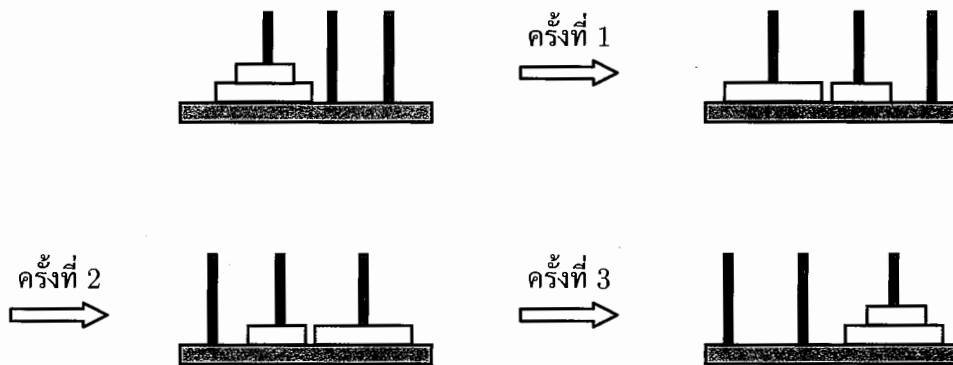
■

ตัวอย่าง 6.1.3 เกมหอคอยฮานอย (Tower of Hanoi) ประกอบด้วยแผ่นกลมเจาะรูตรงกลาง n แผ่น ที่มีรัศมีต่างกันทั้งหมด และมีเสายู่สามเสา เมื่อเริ่มต้นแผ่นกลมทั้งหมดวางเรียงซ้อนกันอยู่บนเสาหนึ่ง เรียงจากขนาดใหญ่ไปหาขนาดเล็ก โดยแผ่นที่ใหญ่ที่สุดจะอยู่ล่างสุด เราต้องการย้ายแผ่นกลมทั้ง n แผ่น ไปอยู่อีกเสาหนึ่งโดยมีกติกาดังนี้

- (1) ในการย้ายแต่ละครั้ง จะย้ายได้เพียงหนึ่งแผ่นเท่านั้น และจะย้ายจากเสาหนึ่งไปอีกเสาใดก็ได้ จาก 2 เสาที่เหลือ
- (2) แผ่นที่มีขนาดใหญ่กว่า จะซ้อนอยู่บนแผ่นที่มีขนาดเล็กกว่าไม่ได้

จงหาจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายแผ่นกลมทั้ง n แผ่น จากเสาหนึ่งไปยังอีกเสาหนึ่ง

วิธีทำ สำหรับ $n \geq 1$ ให้ a_n แทนจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายแผ่น n แผ่น จากเสาหนึ่งไปยังอีกเสาหนึ่ง ถ้าเริ่มต้นด้วยแผ่นกลมเพียงแผ่นเดียว จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดในการย้ายคือ 1 ครั้ง จึงได้ $a_1 = 1$ ถ้าเริ่มต้นด้วยแผ่นกลมสองแผ่น จำนวนครั้งที่น้อยที่สุดคือ 3 ครั้ง ดังนี้



จึงได้ $a_2 = 3$

เราต้องการหาสูตร a_n ในกรณีทั่วไป เมื่อ $n \geq 2$

ในการย้ายแผ่น n แผ่น จากเสาที่ 1 ไปยังเสาที่ 3 สามารถทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

- ขั้นที่ 1 ย้ายแผ่น $n-1$ แผ่น ที่อยู่ข้างบนจากเสาที่ 1 ไปเสาที่ 2 ก่อน
- ขั้นที่ 2 ย้ายแผ่นล่างสุดจากเสาที่ 1 ไปยังเสาที่ 3
- ขั้นที่ 3 ย้ายแผ่น $n-1$ แผ่น จากเสาที่ 2 ไปวางซ้อนยังเสาที่ 3

จำนวนครั้งในการย้ายแผ่นตามขั้นตอนทั้งสาม คือ $a_{n-1}, 1, a_{n-1}$ ครั้ง ตามลำดับ

ดังนั้น จำนวนครั้งในการย้ายแผ่นทั้ง n แผ่น ตามขั้นตอนทั้งสาม คือ $a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$ จึงสรุปได้ว่า

$$a_n \leq 2a_{n-1} + 1$$

แต่เราจะทราบได้อย่างไรว่า $2a_{n-1} + 1$ คือจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่ต้องใช้

สังเกตว่า แผ่นล่างสุดต้องถูกย้ายจากเสาที่ 1 ไปยังเสาที่ 3

ซึ่งจะเกิดขึ้นเมื่อเราต้องทำขั้นที่ 1 ก่อน หลังจากนั้น เราต้องผ่านขั้นที่ 3

นั่นคือ เราต้องใช้อย่างน้อย $2a_{n-1} + 1$ ครั้ง ในการย้ายแผ่นทั้ง n แผ่น

แสดงว่า $a_n \geq 2a_{n-1} + 1$

ดังนั้น

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

โดยมีค่าเริ่มต้นคือ $a_1 = 1$

เมื่อลองแทนค่าหา a_n บางตัว จะพบว่า $(a_n) = (1, 3, 7, 15, \dots)$

เราสามารถหาสูตรทั่วไปของ a_n ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + 1 \\ &= 2(2a_{n-2} + 1) + 1 = 2^2 a_{n-2} + 2 + 1 \\ &= 2^2 (2a_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3 a_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\ &\vdots \\ &= 2^{n-1} a_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \dots + 2 + 1 \end{aligned}$$

แทนค่า $a_1 = 1$ จะได้

$$a_n = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 = 2^n - 1$$

เราสามารถแสดงได้ว่า $a_n = 2^n - 1$ โดยอาศัยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ■

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีในการขึ้นบันได n ชั้น เมื่อ
 - 1.1 ก้าวได้ 1 หรือ 2 ชั้น ในการก้าวแต่ละครั้ง
 - 1.2 ก้าวได้ 1, 2 หรือ 3 ชั้น ในการก้าวแต่ละครั้ง
2. ชายคนหนึ่งนำเงินไปฝากธนาคาร A บาท ธนาคารคิดดอกเบี้ยให้ร้อยละ r ต่อปี จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับเงินรวมเมื่อสิ้นปีที่ n เมื่อ
 - 2.1 ไม่เคยฝากเงินเพิ่มอีกเลย
 - 2.2 ฝากเงินเพิ่มอีกเดือนละ B บาท
3. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีแจกของที่ต่างกัน n ชิ้นให้กับคน 4 คน
4. มีกล่องสินค้าสองชนิด ชนิด A สูงกล่องละ 1 หน่วย และชนิด B สูงกล่องละ 2 หน่วย ให้ a_n เป็นจำนวนวิธีในการวางกล่องซ้อนกันให้สูง n หน่วย จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ a_n
5. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนเลขฐาน 3 ที่
 - 5.1 ไม่มี 0 ติดกัน
 - 5.2 ไม่มี 0 ติดกันสามตัว
6. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีในการเลือกเซตย่อยของเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่ไม่มีจำนวนที่เรียงติดกันในเซตย่อย
7. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีในการแบ่งกลุ่มคน $2n$ คนเป็น n คู่
8. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีในการวางเหรียญ n เหรียญซ้อนกัน เมื่อมีเหรียญสีแดง สีขาว และสีน้ำเงิน ตามเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้
 - 8.1 เหรียญสีแดงไม่อยู่ติดกัน
 - 8.2 เหรียญสีน้ำเงินอาจอยู่ติดกัน แต่เหรียญสีแดงไม่อยู่ติดกัน และเหรียญสีขาวไม่อยู่ติดกัน
9. คู่สามีภรรยาคนหนึ่งต้องการมีบุตรปีละคนจนกว่าจะได้บุตรชาย 2 คน จึงจะหยุด ให้ a_n เป็นจำนวนวิธีในการมีบุตรไม่เกิน n คน จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ a_n และจงหาสูตรในรูปแบบปิดของ a_n
10. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนบริเวณที่เกิดจากระนาบที่ตัดกันในปริภูมิสามมิติ ถ้าทุก ๆ 3 ระนาบตัดกันที่จุดเดียว แต่ไม่มีระนาบ 4 ระนาบใดที่ตัดกันที่จุดเดียว
11. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ที่ไม่มีจำนวนใดอยู่ห่างจากตำแหน่งเดิมไกลกว่าหนึ่งตำแหน่ง

12. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนเลขฐาน 3 ทั้งหมดที่มี n หลักและไม่มี 1 ปรากฏอยู่ติดกันกับทางซ้ายของ 2
13. ให้จุด $2n$ จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม และ a_n เป็นจำนวนวิธีในการแบ่งจุดเหล่านี้ออกเป็น n คู่และเส้นเชื่อมจุดในแต่ละคู่ไม่ตัดกัน จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ a_n
14. ให้ B_n เป็นจำนวนวิธีในการแบ่งกันเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ และกำหนด $B_0 = 1$ จงแสดงว่า

$$B_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k$$

เรียก B_n ว่าจำนวนเบลล์ ตามชื่อของ Eric Temple Bell (ค.ศ. 1883-1960)

15. ให้ $a_{n,k}$ เป็นจำนวนวิธีในการเลือกจำนวน k จำนวนจากเซต $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยไม่มีสองจำนวนที่เรียงติดกัน จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ $a_{n,k}$
16. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนบริเวณที่แบ่งโดยเส้นทะแยงมุมของรูป n เหลี่ยมมุม เมื่อไม่มีเส้นทะแยงมุมสามเส้นใดตัดกันที่จุดเดียว
17. ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริง ผลคูณของจำนวนจริงทั้ง n ตัวนี้ สามารถทำได้โดยการคูณทั้งเส้น $n-1$ ครั้ง ให้ a_n เป็นจำนวนวิธีในการใส่วงเล็บสำหรับการคูณ โดยเรียง $x_1, x_2, \dots, x_n$ ตามลำดับที่เห็น เช่น กรณี $n = 4$ จะทำได้ทั้งหมด 5 วิธี ดังนี้

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot (x_3 \cdot x_4))$$

$$x_1 \cdot ((x_2 \cdot x_3) \cdot x_4)$$

$$(x_1 \cdot x_2) \cdot (x_3 \cdot x_4)$$

$$(x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)) \cdot x_4$$

$$((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3) \cdot x_4$$

จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ a_n

6.2 สมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์

ความสัมพันธ์เวียนเกิดเป็นแนวทางหนึ่งในการแก้ปัญหาการนับ เมื่อสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดได้แล้ว สิ่งที่น่าสนใจในขั้นต่อไปคือการหารูปแบบปิดของความสัมพันธ์เวียนเกิดนั้น ในหัวข้อนี้และหัวข้อต่อไป เราจะได้ศึกษาการหาผลเฉลยของความสัมพันธ์เวียนเกิดในบางรูปแบบ

บทนิยาม ให้ $m \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2, \dots, c_m \in \mathbb{R}$ โดยที่ $c_m \neq 0$ และ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน เรียกความสัมพันธ์เวียนเกิดในรูป

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_m a_{n-m} + f(n)$$

ว่า สมการเวียนเกิดเชิงเส้น (linear recurrence equation) อันดับ m ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ในกรณีที่ $f(n) = 0$ เราเรียกว่าสมการนี้เป็น สมการเอกพันธ์ (homogeneous equation)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาผลเฉลยสมการเวียนเกิดเอกพันธ์เชิงเส้นเอกพันธ์โดยไม่กล่าวถึงบทพิสูจน์ สมการเวียนเกิดเอกพันธ์คือสมการในรูป

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_m a_{n-m}$$

จะเรียกสมการพหุนามในรูป

$$x^m - c_1 x^{m-1} - c_2 x^{m-2} - \dots - c_m = 0$$

ว่า สมการลักษณะเฉพาะ (characteristic equation) ของสมการเวียนเกิดข้างต้น

สมการลักษณะเฉพาะนี้เป็นสมการพหุนามที่มีราก m ราก โดยนับรากซ้ำด้วย สมมติให้รากเหล่านั้นคือ $r_1, r_2, \dots, r_m$ เนื่องจาก $c_m \neq 0$ ดังนั้น รากทุกตัวต้องไม่เป็นศูนย์ เราจะแบ่งพิจารณาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดตามกรณีต่างๆ ของรากเหล่านี้ ดังนี้

กรณีที่ 1 รากต่างกันหมด

ให้ $r_1, r_2, \dots, r_m$ เป็นรากที่ต่างกันหมดของสมการลักษณะเฉพาะ แล้วผลเฉลยของสมการเวียนเกิดคือ

$$a_n = k_1 r_1^n + k_2 r_2^n + \dots + k_m r_m^n$$

โดยที่ $k_1, k_2, \dots, k_m$ เป็นค่าคงตัว และหาค่าคงตัวเหล่านี้ได้จากค่าเริ่มต้น

กรณีที่ 2 รากบางตัวซ้ำกัน

ให้ $r_1, r_2, \dots, r_l$ เป็นรากที่มีจำนวนซ้ำเท่ากับ $m_1, m_2, \dots, m_l$ ตามลำดับ โดย $m_1 + m_2 + \dots + m_l = m$ ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดในกรณีนี้ ได้จากการดัดแปลงผลเฉลยในกรณีที่ 1 ดังนี้

$$\begin{aligned} a_n = & (k_{11} + k_{12}n + \dots + k_{1m_1}n^{m_1-1})r_1^n \\ & + (k_{21} + k_{22}n + \dots + k_{2m_2}n^{m_2-1})r_2^n \\ & + \dots \\ & + (k_{l1} + k_{l2}n + \dots + k_{lm_l}n^{m_l-1})r_l^n \end{aligned}$$

เมื่อ k_{ij} ทั้งหมดเป็นค่าคงตัว และหาค่าคงตัวเหล่านี้ได้จากค่าเริ่มต้น

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $a_0 = 1, a_1 = 2$

วิธีทำ สมการเวียนเกิดที่กำหนดให้เป็นสมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ซึ่งมีรากต่างกันสองตัวคือ $x = 3, 1$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดคือ

$$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 1^n = A \cdot 3^n + B$$

โดยที่ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 2$

แทนค่า $n = 0$ และ $n = 1$ ใน a_n ตามลำดับ จะได้ระบบสมการ

$$1 = A + B$$

$$2 = 3A + B$$

เมื่อแก้สมการจะได้ $A = \frac{1}{2}$ และ $B = \frac{1}{2}$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^n + \frac{1}{2} = \frac{3^n + 1}{2}$$

■

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหารูปแบบปิดของลำดับฟีโบนัชชีที่นิยามโดย

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

เมื่อ $n \geq 3$ และมีค่าเริ่มต้น $F_1 = 1, F_2 = 1$

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะของลำดับฟีโบนัชชี คือ $x^2 - x - 1 = 0$

ซึ่งมีรากต่างกันสองตัวคือ $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดคือ

$$F_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นคือ $F_1 = 1$ และ $F_2 = 1$

แทนค่า $n = 1$ และ $n = 2$ ใน F_n ตามลำดับ จะได้ระบบสมการ

$$1 = A\alpha + B\beta$$

$$1 = A\alpha^2 + B\beta^2$$

สังเกตว่า $\alpha^2 = \alpha + 1$ และ $\beta^2 = \beta + 1$ ดังนั้น

$$1 = A\alpha^2 + B\beta^2 = A(\alpha + 1) + B(\beta + 1) = (A\alpha + B\beta) + (A + B) = 1 + (A + B)$$

จึงได้ระบบสมการ $A\alpha + B\beta = 1$ และ $A + B = 0$

ซึ่งแก้ระบบสมการได้

$$A = \frac{1}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{และ} \quad B = \frac{1}{\beta - \alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $a_0 = 1, a_1 = 3$

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะคือ $x^2 - 4x + 4 = 0$ ซึ่งมี 2 เป็นรากซ้ำ

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดจึงอยู่ในรูป

$$a_n = (A + Bn) \cdot 2^n$$

โดยที่ค่าเริ่มต้นคือ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 3$

แทนค่า $n = 0$ และ $n = 1$ ใน a_n ตามลำดับ จะได้ระบบสมการ

$$1 = A$$

$$3 = (A + B) \cdot 2$$

เมื่อแก้ระบบสมการ จะได้ $A = 1$ และ $B = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดคือ

$$a_n = \left(1 + \frac{n}{2}\right) \cdot 2^n = (n + 2) \cdot 2^{n-1} \quad \blacksquare$$

เนื่องจากสมการลักษณะเฉพาะมีสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นจำนวนจริง และมีรากบางตัวเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคเชิงซ้อนของรากนั้นย่อมต้องเป็นรากด้วย ในกรณีเช่นนี้ เราสามารถใช้ความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วมาช่วยในการจัดรูปผลเฉลยของสมการเวียนเกิดได้ ดังนี้

ให้รากตัวหนึ่งของสมการลักษณะเฉพาะคือ

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

จะได้ว่าสังยุคเชิงซ้อน

$$\bar{z} = r(\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

เป็นรากด้วย ในกรณีที่รากนี้ไม่ซ้ำ ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดส่วนที่ขึ้นกับรากสองตัวนี้คือ

$$\begin{aligned} A \cdot z^n + B \cdot (\bar{z})^n &= A \cdot r^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha) + B \cdot r^n (\cos n\alpha - i \sin n\alpha) \\ &= (A + B) \cdot r^n \cos n\alpha + (A - iB) \cdot r^n \sin n\alpha \end{aligned}$$

ถ้าให้ $C = A + B$ และ $D = A - iB$ จะได้

$$A \cdot z^n + B \cdot (\bar{z})^n = r^n (C \cos n\alpha + D \sin n\alpha)$$

ในกรณีที่รากมีจำนวนซ้ำเท่ากับ m เราสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันว่า ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดส่วนที่ขึ้นกับรากนี้จะอยู่ในรูป

$$r^n \left((C_0 + C_1 n + \cdots + C_{m-1} n^{m-1}) \cos n\alpha + (D_0 + D_1 n + \cdots + D_{m-1} n^{m-1}) \sin n\alpha \right)$$

ตัวอย่าง 6.2.4 จงแก้สมการเวียนเกิด

$$a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2}), n \geq 2$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $a_0 = 1, a_1 = 0$

วิธีทำ สมการลักษณะเฉพาะคือ $x^2 - 2x + 2 = 0$

ซึ่งมีรากสองตัวคือ $\alpha = 1 + i$ และ $\beta = 1 - i$ ซึ่งสามารถจัดในรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังนี้

$$\alpha = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\beta = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

เขียนผลเฉลยของสมการเวียนเกิดได้ในรูป

$$\begin{aligned} a_n &= A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n \\ &= A \cdot (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right) + B \cdot (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} - i \sin \frac{n\pi}{4} \right) \\ &= (A + B) \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} + (A - iB) \cdot 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} \end{aligned}$$

ให้ $C = A + B$ และ $D = A - iB$ จะได้

$$a_n = C \cdot 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4} + D \cdot 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$$

แทนค่าเริ่มต้น $a_0 = 1$ และ $a_1 = 0$ ตามลำดับ จะได้ระบบสมการ

$$1 = C + 0$$

$$0 = C \cdot \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + D \cdot \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4}$$

ซึ่งเมื่อแก้ระบบสมการ จะได้ $C = 1$ และ $D = -1$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดคือ

$$a_n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} - \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

■

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเวียนเกิดต่อไปนี้

$$1.1 \quad a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$$

$$1.2 \quad a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$$

$$1.3 \quad a_n + 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 0$$

$$1.4 \quad a_n = 2a_{n-1} + 15a_{n-2}$$

$$1.5 \quad a_n = 3a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

$$1.6 \quad a_n = 7a_{n-2} - 6a_{n-3}$$

2. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดต่อไปนี้

$$2.1 \quad a_n = a_{n-1} + 12a_{n-2} \text{ เมื่อ } a_0 = 1 \text{ และ } a_1 = 2$$

$$2.2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ เมื่อ } a_0 = 2 \text{ และ } a_1 = 1$$

$$2.3 \quad a_n = 6a_{n-1} + 9a_{n-2} \text{ เมื่อ } a_1 = 1 \text{ และ } a_2 = 2$$

$$2.4 \quad a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \text{ เมื่อ } a_1 = 1 \text{ และ } a_2 = 2$$

$$2.5 \quad 2a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3} \text{ เมื่อ } a_0 = 0, a_1 = 1 \text{ และ } a_2 = 2$$

$$2.6 \quad a_n - 6a_{n-1} + 11a_{n-2} - 6a_{n-3} = 0 \text{ เมื่อ } a_1 = 1, a_2 = 2 \text{ และ } a_3 = 3$$

3. มีลูกอม 5 ชนิด มีสองชนิดที่ต้งราคาเม็ดละ 1 บาท และอีกสามชนิดต้งราคาเม็ดละ 2 บาท เด็กคนหนึ่งต้องการซื้อลูกอมเป็นเงิน n บาท จงหาว่าเด็กคนนี้มีวิธีการซื้อลูกอมได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

4. จงหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับจำนวนเลขฐานสองที่มี n หลักและสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ พร้อมทั้งหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดที่ได้

4.1 ลงท้ายด้วย 11

4.2 ลงท้ายด้วย 11 และไม่มี 11 มาก่อนหน้า

5. ให้ $m \geq 2$ เป็นจำนวน และ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in (0,1)$ ซึ่ง $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$ ลำดับ (a_n) สอดคล้องกับความสัมพันธ์เวียนเกิด

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \dots + \alpha_m a_{n-m}$$

โดยกำหนดค่าเริ่มต้น $a_1, a_2, \dots, a_m$ จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

6.3 สมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

สมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์ คือสมการในรูป

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m} + f(n)$$

โดยที่ $f(n) \neq 0$ การหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดนี้ทำได้โดยขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 หาผลเฉลยทั่วไป $a_n^{(h)}$ ของสมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m}$$

ขั้นที่ 2 หาผลเฉลยเฉพาะ $a_n^{(p)}$ ของสมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_m a_{n-m} + f(n)$$

ขั้นที่ 3 ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดจะอยู่ในรูป

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$$

เราได้ศึกษาวิธีการหาผลเฉลยทั่วไป $a_n^{(h)}$ ของสมการเชิงเส้นเอกพันธ์ไปในหัวข้อที่แล้ว ในหัวข้อนี้เราจะมาศึกษาการหาผลเฉลยเฉพาะ $a_n^{(p)}$ ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว $a_n^{(p)}$ คือผลเฉลยใดผลเฉลยหนึ่งของสมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์เท่านั้น เพื่อให้เห็นภาพชัดเจน พิจารณาสมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์ $a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$ ในตัวอย่าง 6.2.1 ซึ่งมีผลเฉลยอยู่ในรูป $a_n = A \cdot 3^n + B$ โดย A และ B เป็นค่าคงตัว ลองพิจารณาสมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 5 \cdot 2^n$$

เราสามารถตรวจสอบได้ง่ายว่า $a_n = 2^{n+2}$ สอดคล้องกับสมการเวียนเกิดนี้ และแน่นอนว่ามีผลเฉลยอื่นๆ ได้อีกมากมาย เช่น $a_n = 2^{n+2} + 7$ หรือ $a_n = 2^{n+2} + 3^n - 1$ เป็นต้น ในความเป็นจริงแล้ว ผลเฉลยทั้งหมดของสมการเวียนเกิดดังกล่าว เขียนได้ในรูป

$$a_n = A \cdot 3^n + B + 2^{n+2}$$

นั่นคือ $a_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B$ และไม่ว่า $a_n^{(p)}$ จะเป็น 2^{n+2} หรือ $2^{n+2} + 7$ หรือ $2^{n+2} + 3^n - 1$ ก็สามารถจัดผลเฉลย $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}$ ในรูป $a_n = A \cdot 3^n + B + 2^{n+2}$ ได้ทั้งสิ้น

จึงเป็นการเพียงพอที่จะหา $a_n^{(p)}$ เพียงผลเฉลยเดียว ซึ่งแม้จะไม่ได้มีหลักเกณฑ์ทั่วไปในการหา $a_n^{(p)}$ แต่สำหรับ $f(n)$ ที่เป็นฟังก์ชันพหุนามหรืออยู่ในรูป k^n เมื่อ k เป็นค่าคงตัว หรืออยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชันพหุนามกับ k^n เราพบว่า $a_n^{(p)}$ จะมีรูปแบบในลักษณะเดียวกับ $f(n)$ ดังแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.3.1 จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4n, \quad n \geq 2$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

วิธีทำ หา $a_n^{(h)}$ จากสมการเอกพันธ์ $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ ก่อน

สมการลักษณะเฉพาะคือ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ซึ่งมีรากคือ $x = 2, 3$

ดังนั้น

$$a_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัว

จากสมการเวียนเกิดที่โจทย์กำหนด เรามี $f(n) = 4n$ ซึ่งเป็นพหุนามดีกรี 1

จะสมมติ $a_n^{(p)}$ ให้มีรูปแบบเป็นพหุนามดีกรีหนึ่งเช่นกัน นั่นคือ

$$a_n^{(p)} = k_0 + k_1 n$$

โดยที่ k_0 และ k_1 เป็นค่าคงตัว

$a_n^{(p)}$ ต้องสอดคล้องกับสมการเวียนเกิด $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 4n$

ดังนั้น

$$k_0 + k_1 n = 5(k_0 + k_1(n-1)) - 6(k_0 + k_1(n-2)) + 4n$$

$$k_0 + k_1 n = (-k_0 + 7k_1) + (-k_1 + 4)n$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของทั้งสองข้าง จะได้

$$k_0 = -k_0 + 7k_1$$

$$k_1 = -k_1 + 4$$

เมื่อแก้ระบบสมการจะได้ $k_0 = 7$ และ $k_1 = 2$ นั่นคือ $a_n^{(p)} = 7 + 2n$

ดังนั้น

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + 7 + 2n$$

ค่าคงตัว A และ B หาได้จากค่าเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$ ซึ่งเมื่อแทนในผลเฉลยที่ได้ จะได้

$$0 = A + B + 7$$

$$1 = 3A + 2B + 9$$

เมื่อแก้ระบบสมการ จะได้ $A = 6$ และ $B = -13$

ดังนั้น ผลเฉลยของสมการเวียนเกิดคือ

$$a_n = 6 \cdot 3^n - 13 \cdot 2^n + 7 + 2n$$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 6 \cdot 5^n, \quad n \geq 2$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

วิธีทำ หา $a_n^{(h)}$ ได้เช่นเดียวกับตัวอย่าง 6.3.1 นั่นคือ

$$a_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัว

จากสมการเวียนเกิดที่โจทย์กำหนด เรามี $f(n) = 6 \cdot 5^n$ จึงสมมติ $a_n^{(p)}$ ให้มีรูปแบบเดียวกัน นั่นคือ

$$a_n^{(p)} = k \cdot 5^n$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัว

$a_n^{(p)}$ ต้องสอดคล้องกับสมการเวียนเกิด $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 6 \cdot 5^n$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} k \cdot 5^n &= 5(k \cdot 5^{n-1}) - 6(k \cdot 5^{n-2}) + 6 \cdot 5^n \\ &= k \cdot 5^n - \frac{6k}{25} \cdot 5^n + 6 \cdot 5^n \end{aligned}$$

จึงได้ $k = 25$ นั่นคือ $a_n^{(p)} = 25 \cdot 5^n = 5^{n+2}$

ดังนั้น

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n + 5^{n+2}$$

ค่าคงตัว A และ B หาได้จากค่าเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$ ซึ่งเมื่อแทนในผลเฉลยที่ได้ จะได้

$$0 = A + B + 25$$

$$1 = 3A + 2B + 125$$

เมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นจะได้ $A = -74$ และ $B = 49$ ดังนั้น

$$a_n = 49 \cdot 2^n - 74 \cdot 3^n + 5^{n+2}$$

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n, \quad n \geq 2$$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

วิธีทำ หา $a_n^{(h)}$ ได้เช่นเดียวกับตัวอย่าง 6.3.1 นั่นคือ

$$a_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

เมื่อ A และ B เป็นค่าคงตัว

จากสมการเวียนเกิดที่โจทย์กำหนด เรามี $f(n) = 2^n$

แต่ 2^n เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธ์ $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ จึงไม่สามารถเป็นผลเฉลยเฉพาะได้
ในกรณีเช่นนี้ เราแก้ปัญหาคู่โดยคูณเพิ่มด้วย n จึงสมมติ $a_n^{(p)}$ ให้มีรูปแบบเดียวกัน นั่นคือ

$$a_n^{(p)} = k(n \cdot 2^n)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงตัว

$a_n^{(p)}$ ต้องสอดคล้องกับสมการเวียนเกิด $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 2^n$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} k(n \cdot 2^n) &= 5k((n-1) \cdot 2^{n-1}) - 6k((n-2) \cdot 2^{n-2}) + 2^n \\ &= \left(kn + \frac{k}{2} + 1 \right) 2^n \end{aligned}$$

จึงได้ $k = -2$ นั่นคือ $a_n^{(p)} = -2(n \cdot 2^n) = -n \cdot 2^{n+1}$

ดังนั้น

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n - n \cdot 2^{n+1} = A \cdot 3^n + (B - 2n) \cdot 2^n$$

ค่าคงตัว A และ B หาได้จากค่าเริ่มต้น $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$ ซึ่งเมื่อแทนในผลเฉลยที่ได้ จะได้

$$0 = A + B$$

$$1 = 3A + 2B - 4$$

เมื่อแก้ระบบสมการเชิงเส้นจะได้ $A = 5$ และ $B = -5$ ดังนั้น

$$a_n = 5 \cdot 3^n - (5 + 2n) \cdot 2^n$$

■

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดต่อไปนี้

1.1 $a_n + 4a_{n-1} + 4a_{n-2} = 2^n$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 2$

1.2 $a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2n^2$ เมื่อ $a_0 = 1$ และ $a_1 = 5$

1.3 $a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2} = 3^n + 1$ เมื่อ $a_0 = 2$ และ $a_1 = 6$

1.4 $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 4^n$ เมื่อ $a_0 = 2$ และ $a_1 = 4$

1.5 $3a_n - 5a_{n-1} - 2a_{n-2} = n + 1$ เมื่อ $a_0 = 3$ และ $a_1 = 5$

1.6 $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 2$ เมื่อ $a_0 = 1, a_1 = 2$ และ $a_2 = 3$

2. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดต่อไปนี้

2.1 $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2a_{n-2}^2$ เมื่อ $a_0 = 0$ และ $a_1 = 1$

2.2 $na_n + (n-1)a_{n-1} = 2^n$

3. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n - 3a_{n-1} = 3 \cdot 2^n - 4n$$

เมื่อ $a_1 = 2$

4. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = pa_{n-1} + q$$

เมื่อ $a_0 = r$ และ p, q, r เป็นค่าคงตัว

5. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n + 3a_{n-1} = 4n^2 - 2n + 2^n$$

เมื่อ $a_0 = 1$

6. ให้ (a_n) เป็นลำดับที่สอดคล้องกับ

(1) $a_0 = 1, a_1 = \frac{3}{5}$ และ

(2) ลำดับ $(10a_n - a_{n-1})$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนคงตัวเท่ากับ $\frac{1}{2}$

จงหาสูตรทั่วไปสำหรับ a_n

6.4 ระบบสมการเวียนเกิด

ในหัวข้อก่อน ๆ เราได้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิดเชิงเส้นที่มีสมการเดียวไปแล้ว ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการหาผลเฉลยเมื่อมีระบบสมการเวียนเกิดในรูป

$$a_n = pa_{n-1} + qb_{n-1}$$

$$b_n = rb_{n-1} + sa_{n-1}$$

เมื่อ p, q, r, s เป็นค่าคงตัว เราจะได้วิธีการกำจัดตัวแปรโดยการแทนค่าเพื่อให้ได้สมการเวียนเกิดของตัวแปรเดียว เช่นเดียวกับที่ใช้ในระบบสมการเชิงเส้นทั่ว ๆ ไป ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.4.1 จงแก้ระบบสมการเวียนเกิด

$$a_n + 2a_{n-1} - 4b_{n-1} = 0 \quad (1)$$

$$b_n + 5a_{n-1} - 7b_{n-1} = 0 \quad (2)$$

โดยที่ $a_1 = 4$ และ $b_1 = 1$

วิธีทำ จาก (1) จะได้

$$b_{n-1} = \frac{1}{4}(a_n + 2a_{n-1}) \quad (3)$$

เมื่อแทนใน (2) จะได้

$$\frac{1}{4}(a_{n+1} + 2a_n) + 5a_{n-1} - 7\left\{\frac{1}{4}(a_n + 2a_{n-1})\right\} = 0$$

หรือคือ

$$a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 0 \quad (4)$$

สมการลักษณะเฉพาะของ (4) คือ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ซึ่งมี 2 และ 3 เป็นราก

ดังนั้น

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงตัว

แทนค่า a_n ใน (3) จะได้

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{4}(a_{n+1} + 2a_n) \\
 &= \frac{1}{4}(A \cdot 2^{n+1} + B \cdot 3^{n+1} + 2A \cdot 2^n + 2B \cdot 3^n) \\
 &= A \cdot 2^n + \frac{5B}{4} \cdot 3^n
 \end{aligned}$$

แทนค่าเริ่มต้น $a_1 = 4$ และ $b_1 = 1$ จะได้ระบบสมการ

$$2A + 3B = 4$$

$$2A + \frac{15B}{4} = 1$$

เมื่อแก้ระบบสมการจะได้ $A = 8$ และ $B = -4$

ดังนั้น

$$a_n = 2^{n+3} - 4 \cdot 3^n$$

$$b_n = 2^{n+3} - 5 \cdot 3^n$$

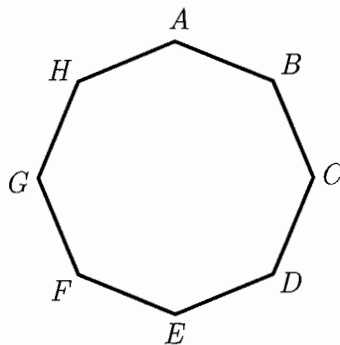
■

ตัวอย่าง 6.4.2 (IMO 1979) ให้จุด A และจุด E เป็นจุดยอดที่อยู่ตรงกันข้ามของรูป 8 เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า กบตัวหนึ่งเริ่มต้นกระโดดจากจุด A และเมื่ออยู่ที่จุดยอดใดที่ไม่ใช่จุด E กบอาจกระโดดไปยังจุดยอดใดจุดยอดหนึ่งที่อยู่ติดกันได้ ถ้ากระโดดถึงจุด E เมื่อไร กบจะหยุดกระโดดและอยู่ที่จุด E ตลอดไป ให้ a_n เป็นจำนวนเส้นทางต่างกันที่กบกระโดดทั้งหมด n ครั้งและสิ้นสุดที่จุด E จงแสดงว่า

$$a_{2n-1} = 0 \text{ และ}$$

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1} \}$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots$



วิธีทำ ถ้าทาสีจุด A, C, E, G เป็นสีขาว และทาสีจุดที่เหลือเป็นสีดำ ทำให้จุดทั้ง 8 จุดมีสีดำและขาวสลับกัน ในการกระโดดแต่ละครั้งจะต้องสลับสีเสมอ เนื่องจากเริ่มจากจุด A ที่เป็นสีขาวและไปหยุดที่จุด E ซึ่งเป็นสีขาวเช่นกัน จึงต้องการการสลับสีคู่ครั้งเสมอ จึงไม่สามารถกระโดดจากจุด A ไปจุด E ภายในจำนวนคี่ครั้งได้ ดังนั้น $a_{2n-1} = 0$

กบไม่สามารถกระโดดจากจุด A ไปถึงจุด E ได้ภายในสองครั้ง จึงได้ $a_2 = 0$ และมีเพียงสองเส้นทางเท่านั้นในการกระโดด 4 ครั้ง นั่นคือ $ABCDE$ และ $AHGFE$ จึงได้ $a_4 = 2$ เราต้องการหาความสัมพันธ์เวียนเกิดสำหรับ a_n แต่ก่อนอื่นต้องสร้างลำดับ b_n เพิ่มก่อน โดยให้ b_n เป็นจำนวนเส้นทางต่างกันที่กบกระโดดทั้งหมด n ครั้งจากจุด C หรือจุด G ไปหยุดที่จุด E ต้องการหา a_{2n} ซึ่งก็คือจำนวนเส้นทางต่างกันที่กบกระโดดทั้งหมด $2n$ ครั้งจากจุด A ไปจุด E กบเริ่มจากจุด A ในการกระโดดสองครั้งแรกมี 4 เส้นทางที่เป็นไปได้คือ

1. ABA เหลือจำนวนครั้งอีก $2n - 2$ ครั้งจากจุด A จึงมีเส้นทางอีก a_{2n-2} เส้นทาง
2. ABC เหลือจำนวนครั้งอีก $2n - 2$ ครั้งจากจุด C จึงมีเส้นทางอีก b_{2n-2} เส้นทาง
3. AHA เหลือจำนวนครั้งอีก $2n - 2$ ครั้งจากจุด A จึงมีเส้นทางอีก a_{2n-2} เส้นทาง
4. AHG เหลือจำนวนครั้งอีก $2n - 2$ ครั้งจากจุด G จึงมีเส้นทางอีก b_{2n-2} เส้นทาง

ดังนั้น

$$a_{2n} = 2a_{2n-2} + 2b_{2n-2} \quad (1)$$

ในอีกแง่หนึ่ง เมื่อเริ่มต้นจากจุด C และพิจารณาการกระโดด 2 ครั้งแรก จะมี 3 เส้นทางที่เป็นไปได้ คือ

1. CDC เหลือจำนวนครั้งอีก $2n - 2$ ครั้งจากจุด C จึงมีเส้นทางอีก b_{2n-2} เส้นทาง
2. CBC เหลือจำนวนครั้งอีก $2n - 2$ ครั้งจากจุด C จึงมีเส้นทางอีก b_{2n-2} เส้นทาง
3. CBA เหลือจำนวนครั้งอีก $2n - 2$ ครั้งจากจุด A จึงมีเส้นทางอีก a_{2n-2} เส้นทาง

ดังนั้น

$$b_{2n} = 2b_{2n-2} + a_{2n-2} \quad (2)$$

จาก (1) จะได้

$$b_{2n-2} = \frac{1}{2}a_{2n} - a_{2n-2} \quad (3)$$

แทน (3) ใน (2) จะได้

$$\frac{1}{2}a_{2n+2} - a_{2n} = 2\left(\frac{1}{2}a_{2n} - a_{2n-2}\right) + a_{2n-2}$$

ซึ่งจัดรูปได้เป็น

$$a_{2n+2} - 4a_{2n} + 2a_{2n-2} = 0 \quad (4)$$

ให้ $d_n = a_{2n}$ จะเขียน (4) ได้ในรูป

$$d_{n+1} - 4d_n + 2d_{n-1} = 0$$

ซึ่งสมการลักษณะเฉพาะคือ $x^2 - 4x + 2 = 0$ และมี $\alpha = 2 + \sqrt{2}$ และ $\beta = 2 - \sqrt{2}$ เป็นราก
ดังนั้น

$$a_{2n} = d_n = A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n$$

โดยที่ A และ B เป็นค่าคงตัว

แทนค่าเริ่มต้น $a_2 = 0$ และ $a_4 = 2$ จะได้ระบบสมการ

$$A\alpha + B\beta = 0$$

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = 2$$

เนื่องจาก $\alpha^2 = 4\alpha - 2$ และ $\beta^2 = 4\beta - 2$ จึงได้

$$2 = A\alpha^2 + B\beta^2 = A(4\alpha - 2) + B(4\beta - 2) = 4(A\alpha + B\beta) - 2(A + B) = -2(A + B)$$

จึงมีระบบสมการ

$$A\alpha + B\beta = 0$$

$$A + B = -1$$

ซึ่งจะได้

$$A = \frac{\beta}{\alpha - \beta} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}$$

และ

$$B = \frac{\alpha}{\beta - \alpha} = \frac{2 + \sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})}$$

ดังนั้น

$$a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (2 + \sqrt{2})^{n-1} - (2 - \sqrt{2})^{n-1} \}$$

ตามต้องการ ■

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเวียนเกิด

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n - b_n \\ b_{n+1} &= a_n + 3b_n\end{aligned}$$

เมื่อ $a_0 = -1$ และ $b_0 = 5$

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเวียนเกิด

$$\begin{aligned}a_n + 2a_{n-1} + 4b_{n-1} &= 0 \\ b_n - 4a_{n-1} - 6b_{n-1} &= 0\end{aligned}$$

เมื่อ $a_0 = 1$ และ $b_0 = 0$

3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเวียนเกิด

$$\begin{aligned}10a_n &= 9a_{n-1} - 2b_{n-1} \\ 5b_n &= -a_{n-1} + 3b_{n-1}\end{aligned}$$

เมื่อ $a_0 = 4$ และ $b_0 = 3$

4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเวียนเกิด

$$\begin{aligned}3a_n - 2a_{n-1} - b_{n-1} &= 0 \\ 3b_n - a_{n-1} - 2b_{n-1} &= 0\end{aligned}$$

เมื่อ $a_0 = 2$ และ $b_0 = -1$

5. ให้
- (a_n)
- และ
- (b_n)
- เป็นลำดับของจำนวนบวกที่สอดคล้องกับความสัมพัทธ์เวียนเกิด

$$\begin{aligned}a_n^2 &= a_{n-1}b_n \\ b_n^2 &= a_nb_{n-1}\end{aligned}$$

เมื่อ $a_0 = \frac{1}{8}$ และ $b_0 = 64$ จงแสดงว่า

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

และจงหาขีดจำกัดดังกล่าว

แบบฝึกหัด เรื่องความสัมพันธ์เวียนเกิด

1. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n^4 a_{n-1} = 10^{10}$$

เมื่อ $a_0 = 1$ และ $a_n > 0$ สำหรับทุก n

2. ลำดับ (a_n) ของจำนวนบวกสอดคล้องกับสมการ

$$a_n = 2\sqrt{a_{n-1}}$$

เมื่อ $a_0 = 25$ จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

3. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}} \right)^2 = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

เมื่อ $a_0 = \frac{1}{4}$ และ $a_1 = 1$

4. ให้ (a_n) เป็นลำดับที่สอดคล้องกับความสัมพัทธ์เวียนเกิด

$$a_n = \frac{pa_{n-1} + q}{ra_{n-1} + s}$$

เมื่อ p, q, r และ s เป็นค่าคงตัวที่ $r \neq 0$

- 4.1 จงแสดงว่า

$$ra_n + s = p + s + \frac{qr - ps}{ra_{n-1} + s}$$

- 4.2 โดยการแทน $ra_n + s = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ จงแสดงว่าสมการในข้อ 4.1 สามารถลดรูปเป็น

$$b_{n+1} - (p + s)b_n + (ps - qr)b_{n-1} = 0$$

5. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = \frac{3a_{n-1}}{2a_{n-1} + 1}$$

เมื่อ $a_0 = \frac{1}{4}$

6. จงหาผลเฉลยของสมการเวียนเกิด

$$a_n = \frac{3a_{n-1} + 1}{a_{n-1} + 3}$$

เมื่อ $a_0 = 5$

7. ลำดับ (a_n) ของจำนวนบวกสอดคล้องกับสมการ

$$(2 - a_n)a_{n+1} = 1, \quad n \geq 1$$

จงหา $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

8. ให้ D_n เป็นจำนวนวิธีในการเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยไม่มีจำนวนใดอยู่ในตำแหน่งเดิม จงให้เหตุผลเชิงการนับเพื่อแสดงว่า

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$$

9. โยนเหรียญ 1 เหรียญ n ครั้ง จงสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดของจำนวนวิธีที่
- 9.1 ไม่ขึ้นหน้าหัว 2 ครั้งติดต่อกัน
 - 9.2 ไม่ขึ้นหน้าหัว 3 ครั้งติดต่อกัน
10. จะสร้างสายอักขระความยาว n ที่ประกอบด้วยตัวเลข 0, 1 หรือ 2 เท่านั้น ได้ทั้งหมดกี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่า
- 10.1 ต้องไม่มี 1 สองตัวเรียงติดกัน
 - 10.2 จำนวนของ 0 ที่ปรากฏเป็นจำนวนคู่
 - 10.3 ไม่มี 0 สองตัวเรียงติดกันและไม่มี 1 สองตัวเรียงติดกัน
 - 10.4 ตัวเลขสองตัวที่อยู่ติดกันจะต่างกันไม่เกินหนึ่ง
11. ลากเส้นตรง n เส้นบนระนาบ โดยที่เส้นตรงสองเส้นใด ๆ ต้องตัดกันเสมอ และไม่มีสามเส้นใด ๆ ตัดกันที่จุดจุดเดียว เส้นตรงทั้งหมดนี้จะแบ่งระนาบออกเป็นกี่ส่วน
12. มีวงกลม n วงบนระนาบ โดยที่วงกลมทุกคู่ตัดกัน 2 จุด และไม่มีวงกลม 3 วงใดตัดกันที่จุดจุดเดียว วงกลมทั้ง n วงนี้ จะแบ่งระนาบออกเป็นกี่ส่วน
13. มีคนอยู่ n คน จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการแบ่งคนทั้ง n คน ออกเป็น 3 กลุ่ม
14. นาย ก และนาย ข เล่นเกมโดยการผลัดกันโยนเหรียญที่เที่ยงตรงเหรียญหนึ่ง ผู้ที่โยนได้หัวก่อนจะเป็นผู้ชนะเกมนั้น ทั้งสองคนเล่นเกมนี้ติดต่อกันหลายครั้ง โดยตกลงว่าผู้ที่แพ้ในเกมก่อนจะเป็นผู้โยนเหรียญก่อนในเกมต่อไป ถ้านาย ก โยนเหรียญก่อนในเกมแรก จงหาความน่าจะเป็นที่เขาจะชนะในเกมที่ n ใด ๆ

15. ให้ A, B, C, D เป็นจุดยอดของทรงสี่หน้า(tetrahedron) ซึ่งทุกด้านยาวหนึ่งหน่วย แมลงตัวหนึ่งเริ่มต้นอยู่ที่จุด A และจะไต่ไปตามด้านของทรงสี่หน้าโดยมีเงื่อนไขดังนี้ แมลงจะเลือกด้านใดด้านหนึ่งใน 3 ด้านที่อยู่ประชิดจุดยอดด้วยโอกาสเท่า ๆ กัน แล้วไต่ไปตามด้านนั้นจนถึงจุดยอดที่อยู่อีกปลายหนึ่งและไต่ต่อไปโดยมีเงื่อนไขเช่นเดียวกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เมื่อแมลงตัวนี้ไต่เป็นระยะทาง 7 หน่วยแล้วกลับมาอยู่ที่จุด A
16. วงกลมวงหนึ่งถูกแบ่งออกเป็นเซกเตอร์ n ส่วน ต้องการระบายสีเซกเตอร์ทั้งหมดนี้ ด้วยสี 4 สี โดยมีเงื่อนไขว่า เซกเตอร์แต่ละเซกเตอร์จะถูกระบายด้วยสีเพียงสีเดียว และสองเซกเตอร์ใด ๆ ที่ประชิดกันต้องถูกระบายด้วยสีคนละสี จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการระบายสีนี้
17. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ซึ่งมี $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a_i > a_{i+1}$
18. กำหนดเซต $A = \{1, 2, \dots, n\}$ จงเขียนจำนวนของผลแบ่งกัน(partition) ทั้งหมดของ A ในรูปของความสัมพันธ์เวียนเกิด
19. จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน $(p_1, p_2, \dots, p_6)$ ทั้งหมดของ $\{1, 2, \dots, 6\}$ ซึ่งมีสมบัติว่า สำหรับจำนวนนับ $k \leq 5$ $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ ไม่ใช้การเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, 2, \dots, k\}$ (นั่นคือ $p_1 \neq 1$, (p_1, p_2) ไม่ใช้การเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, 2\}$, (p_1, p_2, p_3) ไม่ใช้การเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, 2, 3\}$, ...)
20. ในภาษา ๆ หนึ่ง มีอักขระเพียงสองตัว คือ A และ B ส่วนคำต่าง ๆ ในภาษานี้สอดคล้องกับกฎต่อไปนี้
 - (1) คำที่มีความยาวหนึ่งมีเพียง A เท่านั้น
 - (2) ลำดับของอักขระ $X_1 X_2 \dots X_n X_{n+1}$ เมื่อ $X_i \in \{A, B\}$ สำหรับทุก i จะเป็นคำที่มีความยาว $n+1$ ก็ต่อเมื่อ ลำดับนี้มี A อยู่อย่างน้อยหนึ่งตัว และไม่อยู่ในรูป $X_1 X_2 \dots X_n A$ โดยที่ $X_1 X_2 \dots X_n$ เป็นคำที่มีความยาว n
 ถ้า p_n แทนจำนวนคำทั้งหมดที่มีความยาว n จงหาสูตรในรูปแบบปิดของ p_n

บทที่ 7

เทคนิคเชิงการนับ

7.1 การนับสองทาง

เราได้ศึกษาปัญหาการนับด้วยการนับตรง ๆ ด้วยหลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง หรือแม้แต่การสร้างความสัมพันธ์เวียนเกิดเพื่อช่วยในการนับ ในหัวข้อนี้ จะศึกษาเทคนิค การนับสองทาง (double counting) ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.1.1 นำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 มาปูต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 15×15 จุดยอดแต่ละจุดของจัตุรัสรูปเล็กจะทาด้วยสีแดงหรือสีน้ำเงิน ถ้ามีจุดยอดสีแดงทั้งหมด 133 จุด โดยมีสองจุดเป็นจุดยอดของจัตุรัสรูปใหญ่และมี 32 จุดอยู่บนด้าน(และไม่ใช้จุดยอด) ของจัตุรัสรูปใหญ่ จากนั้นทาสีด้านแต่ละด้านของจัตุรัสรูปเล็กดังนี้ ถ้าจุดปลายของด้านเป็นสีเดียวกันให้ทาเป็นสีเดียวกับจุดปลาย แต่ถ้าจุดปลายมีสีต่างกัน ให้ทาเป็นสีเหลือง ถ้ามีด้านสีเหลืองทั้งหมด 196 ด้าน จงหาว่ามีด้านสีน้ำเงินอยู่ทั้งหมดกี่ด้าน

วิธีทำ พิจารณาด้านในแนวนอนก่อน แต่ละแถวมีด้าน 15 ด้าน และมีทั้งหมด 16 แถว

จึงมีด้านในแนวนอนทั้งหมด $15 \cdot 16 = 240$ ด้าน

ในทำนองเดียวกัน มีด้านในแนวตั้งทั้งหมด $15 \cdot 16 = 240$ ด้าน

ดังนั้น มีด้านทั้งสิ้น $240 + 240 = 480$ ด้าน

โจทย์กำหนดว่ามีด้านสีเหลืองอยู่ 196 ด้าน จึงเหลืออีก $480 - 196 = 284$ ด้านที่เป็นสีแดงหรือสีน้ำเงิน สมมติว่ามีด้านสีแดงอยู่ r ด้าน จะได้ว่า มีด้านสีน้ำเงินอยู่ $284 - r$ ด้าน

ให้ N เป็นจำนวนครั้งที่จุดสีแดงปรากฏเป็นจุดปลายของด้าน จะนับ N โดยวิธีการที่ต่างกันสองวิธี ดังนี้

วิธีแรก นับ N จากด้าน แต่ละด้านต้องมีจุดปลายสองจุด โดยด้านที่เป็นสีแดงจะมีจุดปลายสีแดง 2 จุด ด้านที่เป็นสีเหลือง จะมีจุดปลายสีแดง 1 จุด และด้านที่เป็นสีน้ำเงิน จะไม่มีจุดปลายที่เป็นสีแดงเลย ดังนั้น

$$N = r \cdot 2 + 196 \cdot 1 + (284 - r) \cdot 0 = 2r + 196$$

วิธีที่สอง นับ N จากจุดสีแดง แต่ละจุดที่เป็นจุดยอดของจัตุรัสรูปใหญ่เป็นจุดร่วมของด้านสองด้าน จึงถูกนับ 2 ครั้ง จุดที่อยู่บนด้านของจัตุรัสรูปใหญ่เป็นจุดร่วมของด้านสามด้าน จึงถูกนับ 3 ครั้ง และจุดที่อยู่ภายในจัตุรัสรูปใหญ่เป็นจุดร่วมของด้าน 4 ด้าน จึงถูกนับ 4 ครั้ง ดังนั้น

$$N = 2 \cdot 2 + 32 \cdot 3 + (133 - 2 - 32) \cdot 4 = 496$$

ฉะนั้น

$$2r + 196 = 496$$

นั่นคือ $r = 150$

ดังนั้น มีด้านสีน้ำเงินอยู่ $284 - 150 = 134$ ด้าน ■

ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และให้ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ และ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ เป็นเซตจำกัดสองเซต พิจารณา

$$S \subseteq A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

สำหรับแต่ละ $a_i \in A$ กำหนด

$$S(a_i, *) = \{(a_i, b) \in S\}$$

และสำหรับแต่ละ $b_j \in B$ กำหนด

$$S(*, b_j) = \{(a, b_j) \in S\}$$

นั่นคือ $S(a_i, *)$ เป็นเซตของ $(a, b) \in S$ ที่มี $a = a_i$ และ $S(*, b_j)$ เป็นเซตของ $(a, b) \in S$ ที่มี $b = b_j$ เราสามารถนับ $|S|$ ได้สองทาง ซึ่งสรุปเป็นหลักได้ดังนี้

ให้ $m, n \in \mathbb{N}$ และ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ และ $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ เป็นเซตจำกัดสองเซต

ถ้า S เป็นเซตย่อยของ $A \times B$ แล้ว

$$|S| = \sum_{i=1}^m |S(a_i, *)| = \sum_{j=1}^n |S(*, b_j)|$$

บทพิสูจน์ สร้างเมทริกซ์ M ที่มีขนาด $m \times n$ ที่มี x_{ij} เป็นสมาชิก ดังนี้

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } (a_i, b_j) \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } (a_i, b_j) \notin S \end{cases}$$

สังเกตว่า $|S|$ คือผลรวมของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ M

ยิ่งกว่านี้ $|S(a_i, *)|$ คือผลรวมของสมาชิกในแถวที่ i และ $|S(*, b_j)|$ คือผลรวมของสมาชิกในหลักที่ j

ฉะนั้น $\sum_{i=1}^m |S(a_i, *)|$ เท่ากับผลรวมของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ M

และในทำนองเดียวกัน $\sum_{j=1}^n |S(*, b_j)|$ เท่ากับผลรวมของสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ M

ดังนั้น

$$|S| = \sum_{i=1}^m |S(a_i, *)| = \sum_{j=1}^n |S(*, b_j)|$$

ตามต้องการ ■

ตัวอย่าง 7.1.2 มีนักเรียน n คนที่สูงต่างกันหมด เมื่อให้นักเรียนเข้าแถวตอนโดยไม่จำเป็นต้องเรียงลำดับความสูง จากนั้นครูจะแจกลูกหินสีแดงและสีน้ำเงินให้กับทุกคน โดยแต่ละคนจะได้รับลูกหินสีแดงเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ยืนอยู่ข้างหน้าและเตี้ยกว่าตน และจะได้รับลูกหินสีน้ำเงินเท่ากับจำนวนนักเรียนที่ยืนอยู่ข้างหลังและสูงกว่าตน จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนลูกหินสีแดงทั้งหมดเท่ากับจำนวนลูกหินสีน้ำเงินทั้งหมด

วิธีทำ ให้ h_1 เป็นความสูงของนักเรียนคนที่ 1 (คนหน้าสุด), h_2 เป็นความสูงของนักเรียนคนที่ 2, ..., h_n เป็นความสูงของนักเรียนคนที่ n (คนหลังสุด) พิจารณาเซต

$$S = \{(h_i, h_j) \mid h_i < h_j \text{ เมื่อ } i < j\}$$

นั่นคือ S เป็นเซตของคู่นักเรียนที่เรียงลำดับความสูงจากน้อยไปมากเมื่อมองจากด้านหน้าไปด้านหลัง

จะเห็นว่า $|S(h_i, *)|$ คือจำนวนนักเรียนที่ยืนอยู่ข้างหลังคนที่ i และสูงกว่าคนที่ i

และ $|S(*, h_i)|$ คือจำนวนนักเรียนที่ยืนอยู่ข้างหน้าคนที่ i และเตี้ยกว่าคนที่ i

ฉะนั้น นักเรียนคนที่ i จะได้รับลูกหินสีแดง $|S(*, h_i)|$ ลูก และได้รับลูกหินสีน้ำเงิน $|S(h_i, *)|$ ลูก

ดังนั้น

$$|S| = \sum_{i=1}^n |S(h_i, *)| = \sum_{i=1}^n |S(*, h_i)|$$

นั่นคือ ลูกหินสีแดงมีจำนวนเท่ากับลูกหินสีน้ำเงิน ■

ตัวอย่าง 7.1.3 ในชั้นเรียนวิชาคอมพิวเตอร์มีนักเรียนทั้งหมด 12 คน แต่ละสัปดาห์ นักเรียนจะต้องจับคู่ทำการบ้านส่ง และสามารถเปลี่ยนคู่ได้อย่างอิสระทุกสัปดาห์ จงพิสูจน์ว่าต้องมีนักเรียนสองคนที่มีนักเรียนอย่างน้อย 5 คนเคยทำการบ้านร่วมกับทั้งคู่หรือไม่เคยทำการบ้านร่วมกับทั้งคู่

วิธีทำ ให้เซตของนักเรียนทั้ง 12 คนคือ $A = \{s_1, s_2, \dots, s_{12}\}$

และให้ $B = \{(s_i, s_j) \mid 1 \leq i < j \leq 12\}$ เป็นเซตของคู่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

เนื่องจากมีนักเรียน 12 คน จึงได้

$$|B| = \binom{12}{2} = 66$$

ให้

$$S = \{(s_i, (s_j, s_k)) \mid s_i \text{ เคยทำการบ้านร่วมกับ } s_j \text{ และ } s_k \text{ หรือไม่เคยทำการบ้านร่วมกับ } s_j \text{ หรือ } s_k\}$$

ถ้า ณ ขณะเวลาหนึ่ง s_i เคยทำการบ้านร่วมกับนักเรียน k คน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |S(s_i, *)| &= \binom{k}{2} + \binom{11-k}{2} \\ &= k^2 - 11k + 55 \\ &= \left(k - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{99}{4} \end{aligned}$$

ฉะนั้น

$$|S(s_i, *)| \geq 25$$

จึงได้

$$|S| = \sum_{i=1}^{12} |S(s_i, *)| \geq 12 \cdot 25 = 300$$

ต้องการพิสูจน์ว่ามีนักเรียน s_j และ s_k ซึ่ง $|S(*, (s_j, s_k))| \geq 5$ โดยวิธีข้อขัดแย้ง นั่นคือ สมมติว่า $|S(*, (s_j, s_k))| \leq 4$ สำหรับทุกคู่ของนักเรียน s_j และ s_k จะได้

$$|S| = \sum_{(s_j, s_k) \in B} |S(*, (s_j, s_k))| \leq |B| \cdot 4 = 66 \cdot 4 = 264$$

เกิดข้อขัดแย้งกับที่แสดงไว้ก่อนหน้านี้ว่า $|S| \geq 300$ สิ่งที่เหมาะสมไว้จึงเป็นเท็จ

ดังนั้น จะต้องมามีนักเรียนสองคนที่มีนักเรียนอย่างน้อย 5 คนเคยทำการบ้านร่วมกับทั้งคู่หรือไม่เคยทำการบ้านร่วมกับทั้งคู่

ตัวอย่าง 7.1.4 ให้ X เซตจำกัดที่มีสมาชิก n ตัว และให้ $A_1, A_2, \dots, A_m$ เป็นเซตย่อยที่มีสมาชิกสามตัวของ X โดย $|A_i \cap A_j| \leq 1$ สำหรับทุก $i \neq j$ จงแสดงว่ามีเซตย่อย A ของ X ที่มีสมาชิกอย่างน้อย $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ ตัว และ A_i ไม่เป็นเซตย่อยของ A สำหรับทุก i

วิธีทำ ให้ A เป็นเซตย่อยของ X ที่ A_i ไม่เป็นเซตย่อยของ A สำหรับทุก i และ A มีจำนวนสมาชิกมากที่สุด และให้ $k = |A|$

จะเห็นได้ว่า $|X - A| = n - k$ เราสามารถนับ $|X - A|$ โดยอีกวิธีหนึ่งที่ต่างกัน ดังนี้

ให้ $x \in X - A$ เนื่องจาก A มีจำนวนสมาชิกมากที่สุด

ดังนั้น $A \cup \{x\}$ จะต้องไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขในโจทย์

นั่นคือ มี $i(x) \in \{1, 2, \dots, m\}$ ซึ่ง $A_{i(x)} \subseteq A \cup \{x\}$

ดังนั้น $x \in A_{i(x)}$ และเซต $A_{i(x)} - \{x\} \subseteq A$

ให้ $L_x = A \cap A_{i(x)}$ จะเห็นว่า $|L_x| = 2$

เนื่องจาก $|A_i \cap A_j| \leq 1$ ดังนั้น L_x ต่างกันหมดสำหรับทุก $x \in X - A$

จะเห็นว่าเราได้สร้างฟังก์ชัน $f(x) = L_x$ จาก $X - A$ ไปเซตของเซตย่อยที่มีสมาชิก 2 ตัวของ A ดังนั้น

$$n - k \leq \binom{k}{2} = \frac{k^2 - k}{2}$$

จึงได้

$$k^2 + k \geq 2n$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} (\lfloor \sqrt{2n} \rfloor - 1)^2 + (\lfloor \sqrt{2n} \rfloor - 1) &= (\lfloor \sqrt{2n} \rfloor - 1) \lfloor \sqrt{2n} \rfloor \\ &\leq (\sqrt{2n} - 1) \sqrt{2n} \\ &< 2n \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$k \geq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$$

ตามต้องการ ■

แบบฝึกหัด 7.1

1. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $2^m 3^n = \prod_{k=1}^{59} \left(24^{\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{k+60}} \right)^k$ จงหาค่าของ $m + n$
2. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก นักเรียน n คนเข้าสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ คะแนนของนักเรียนแต่ละคนเป็นจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง m ถ้าให้ a_k เป็นคะแนนของนักเรียนคนที่ k และให้ b_k เป็นจำนวนนักเรียนที่ทำคะแนนได้อย่างน้อย k คะแนน จงแสดงว่า

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_m$$

3. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และสำหรับแต่ละการเรียงสับเปลี่ยน $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ของ $(1, 2, \dots, n)$ นิยาม

$$f(\pi) = \sum_{k=1}^n |k - a_k|$$

จงหาผลบวกของ $f(\pi)$ ทั้งหมด

4. ให้ $M = \{1, 2, \dots, 7\}$ และให้ $A_1, A_2, \dots, A_7$ เป็นเซตย่อยแท้ของ M ที่สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้
 - (1) สำหรับสมาชิกสองตัวใดๆ ของ M จะมี k เพียงค่าเดียวที่สมาชิกทั้งสองเป็นสมาชิกของ A_k และ
 - (2) $|A_k| \geq 3$ ทุก $k = 1, 2, \dots, 7$
 จงพิสูจน์ว่า $|A_i \cap A_j| = 1$ สำหรับทุก i และ j ซึ่ง $i \neq j$
5. มีลูกหิน n ลูกวางเป็นกองเดียว ในแต่ละชั้นจะเลือกกองที่มีลูกหินอย่างน้อย 2 ลูก แยกออกเป็น 2 กอง แล้วหาผลคูณของจำนวนลูกหินในสองกองที่แยก ทำซ้ำเช่นนี้ไปจนกว่าจะได้ลูกหินทั้งหมด n กอง จงพิสูจน์ว่าผลรวมของผลคูณทั้งหมดจากแต่ละชั้นมีค่าคงตัวเสมอ
6. นักเรียน 200 คนเข้าแข่งขันคณิตศาสตร์ที่มีโจทย์อยู่ 6 ข้อ ถ้าทราบว่าโจทย์แต่ละข้อ มีผู้เข้าแข่งขันที่ทำโจทย์ข้อนั้นได้อย่างน้อย 120 คน จงแสดงว่าจะต้องมีนักเรียนสองคนที่โจทย์แต่ละข้อทำได้โดยนักเรียนอย่างน้อยหนึ่งคนในสองคนนั้น
7. นำรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 1×1 มาเรียงต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสขนาด 100×100 ทาสีจัตุรัสรูปเล็กแต่ละรูปด้วยสีแดง สีเขียว สีน้ำเงิน หรือสีเหลือง โดยแต่ละรูปทาสีเดียว ถ้าแต่ละแถวอนมีกระเบื้องแต่ละสีเป็นจำนวนเท่าๆ กัน และแต่ละแถวตั้งมีกระเบื้องแต่ละสีเป็นจำนวนเท่าๆ กัน จงพิสูจน์ว่ามีสองแถวอนและสองแถวตั้งที่กระเบื้อง 4 ชิ้นที่เป็นจุดตัดของแนวเหล่านั้นมีสีต่างกันหมด
8. (IMO 1998) ในการแข่งขันครั้งหนึ่ง มีผู้เข้าแข่งขัน a คน และมีผู้ตัดสิน b คน โดยที่ $b \geq 3$ เป็นจำนวนคี่ ผู้ตัดสินแต่ละคนจะตัดสินผู้เข้าแข่งขันว่า ผ่าน หรือ ตก เท่านั้น ถ้า k เป็นจำนวนที่สำหรับผู้ตัดสินสองคนใดๆ ผลการตัดสินตรงกันสำหรับนักเรียนไม่เกิน k คน จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$$

7.2 ภาวะคู่หรือคี่

ในการแก้ปัญหาการนับ เราจำเป็นต้องดึงข้อมูลออกจากโจทย์ให้มากที่สุด นอกจากนั้นแล้ว ยังต้องหาวิธีในการนำข้อมูลที่ได้จากโจทย์มาใช้เพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบ

ข้อมูลที่สำคัญอย่างหนึ่งที่ได้จากโจทย์คือ ภาวะคู่หรือคี่ (parity) ของจำนวนที่เกี่ยวข้อง เราทราบแล้วว่า จำนวนคู่บวกจำนวนคี่ย่อมได้ผลลัพธ์จำนวนคี่ จำนวนคี่บวกจำนวนคี่ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่ และจำนวนคี่บวกจำนวนคู่ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคี่ นี่คือ หลักภาวะคู่หรือคี่ ที่นำไปช่วยแก้ปัญหาได้หลากหลาย

ตัวอย่าง 7.2.1 จงหาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะลากส่วนของเส้นตรง 9 เส้น โดยที่แต่ละเส้นตัดกับส่วนของเส้นตรงอื่น 3 จุดพอดี

วิธีทำ สมมติว่าสามารถลากส่วนของเส้นตรง 9 เส้น ตามเงื่อนไขที่กำหนดได้

ให้ x เป็นจำนวนจุดตัดทั้งหมดที่เกิดขึ้น

เส้นตรงแต่ละเส้นเกิดจุดตัด 3 จุด ถ้านับรวมทุกเส้นจะได้ $9 \times 3 = 27$ จุด

ใน 27 จุดเหล่านี้ จุดตัดแต่ละจุดจะถูกนับสองครั้ง เพราะจุดตัดแต่ละจุดอยู่บนเส้นตรงสองเส้น ฉะนั้น $2x = 27$ เกิดข้อขัดแย้ง เนื่องจาก 27 เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น ไม่สามารถลากส่วนของเส้นตรง 9 เส้น ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ได้ ■

ตัวอย่าง 7.2.2 มีนักเรียน 25 คนเข้าแข่งขันปิงปองโดยแต่ละครั้ง จะแข่งกันทีละ 2 คน จงพิสูจน์ว่า ณ ขณะใด ๆ ในการแข่งขัน ผู้ที่เล่นไปแล้วเป็นจำนวนคี่ครั้งต้องมีเป็นจำนวนคู่เสมอ

วิธีทำ ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}$ แทนจำนวนครั้งที่ผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนได้แข่งไปแล้ว

สังเกตว่า $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{25}$ จะมีค่าเท่ากับสองเท่าของจำนวนครั้งที่แข่งไปแล้ว เพราะการแข่งขันหนึ่งครั้งประกอบด้วยผู้เล่นสองคน ดังนั้นการแข่งขันแต่ละครั้ง จะถูกนับสองครั้ง ในผลบวกดังกล่าว แสดงว่า ผลบวก $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{25}$ ต้องเป็นจำนวนคู่เสมอ

ฉะนั้น ในบรรดา $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}$ ที่เป็นจำนวนคี่ จะต้องมียู่เป็นจำนวนคู่ เพราะถ้ามีจำนวนคี่อยู่เป็นจำนวนคี่ตัว ผลบวกดังกล่าวต้องเป็นจำนวนคี่ด้วย

จึงสรุปได้ว่า ผู้ที่เล่นไปแล้วเป็นจำนวนคี่ครั้งต้องมีเป็นจำนวนคู่เสมอ ■

ข้อสังเกตง่าย ๆ ข้อหนึ่งที่สามารถนำมาช่วยแก้ปัญหาได้ คือ ถ้ามีคน หรือ สิ่งของที่สามารถจับกันได้เป็นคู่ ๆ แล้ว จำนวนของคน หรือ สิ่งของนั้นต้องมีเป็นจำนวนคู่

ตัวอย่าง 7.2.3 มีทหาร 100 คนในค่ายทหาร ทุกคืนทหาร 3 คนผลัดกันยืนยาม เป็นไปได้หรือไม่ ที่เมื่อผ่านไประยะเวลาหนึ่ง ทหารแต่ละคนจะยืนยามกับทหารคนอื่นหนึ่งครั้งพอดี

วิธีทำ สมมติว่าเมื่อผ่านไประยะเวลาหนึ่ง ทหารแต่ละคนจะยืนยามกับทหารคนอื่นหนึ่งครั้งพอดี

พิจารณาทหารคนหนึ่ง ซึ่งยืนยามกับทหารอีก 99 คน ๆ ละหนึ่งครั้ง และแต่ละคืนจะยืนยามกับทหาร 2 คน ดังนั้น ทหารที่เหลือจะสามารถแบ่งได้เป็นคู่ ๆ ซึ่งแต่ละคู่จะยืนยามกับทหารคนดังกล่าวในคืนเดียวกัน แต่เนื่องจากมีทหารอีก 99 คน และ 99 เป็นจำนวนคี่

จึงไม่สามารถแบ่งทหาร 99 คนเป็นคู่ ๆ ได้ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น เป็นไปไม่ได้ที่จะจัดทหารยืนยามโดยให้ทหารแต่ละคนยืนยามกับคนอื่น ๆ หนึ่งครั้งพอดี ■

ตัวอย่าง 7.2.4 เขียนเลข 1 ถึง 10 เรียงกัน เป็นไปได้หรือไม่ที่จะใส่เครื่องหมาย + หรือ - หน้าตัวเลขแต่ละตัว แล้วทำให้ผลรวมมีค่าเท่ากับ 0

วิธีทำ ถ้าใส่เครื่องหมายบวกทั้งหมด ผลรวมจะมีค่าเท่ากับ $1 + 2 + \dots + 10 = 55$

ถ้าเปลี่ยนเครื่องหมายหน้าตัวเลข x จาก + ไปเป็น - ผลรวมใหม่จะมีค่าลดลง $2x$

นั่นคือ การเปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบแต่ละที่ จะทำให้ผลรวมลดลงเป็นจำนวนคู่เสมอ

เมื่อเริ่มต้น ผลรวมเป็นจำนวนคี่ ฉะนั้นผลรวมของตัวเลขทั้งหมดไม่ว่าจะใส่เครื่องหมายบวกหรือลบก็ตาม จะต้องเป็นจำนวนคี่เสมอ ซึ่งไม่มีทางเท่ากับ 0 ได้

ดังนั้น ไม่สามารถใส่เครื่องหมาย + หรือ - หน้าตัวเลขแต่ละตัว แล้วทำให้ผลรวมมีค่าเท่ากับ 0 ได้ ■

ในตัวอย่าง 7.2.4 สังเกตว่าการเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายในแต่ละขั้น ค่าความเป็นคู่คี่ของผลบวกไม่แปรเปลี่ยน ขณะที่ในตัวอย่างต่อไป ให้สังเกตว่าในการเปลี่ยนแปลงแต่ละขั้น ค่าความเป็นคู่คี่จะเปลี่ยนสลับกัน

ตัวอย่าง 7.2.5 ให้ $P_1, P_2, \dots, P_{2001}$ เป็นจุด 2001 จุดบนระนาบ ลากส่วนของเส้นตรง $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{2001}P_1$ จะสามารถลากเส้นตรงที่ผ่านจุดภายในส่วนของเส้นตรงเหล่านี้ได้ครบทุกเส้นหรือไม่

วิธีทำ สมมติว่ามีเส้นตรง L ซึ่งตัดส่วนของเส้นตรงทั้งหมดที่จุดภายใน

เส้นตรง L จะแบ่งระนาบออกเป็นสองส่วน ซึ่งจะเรียกว่าฝั่งซ้ายและฝั่งขวาของของ L

จุด $P_1, P_2, \dots, P_{2001}$ แต่ละจุดจะต้องอยู่ด้านใดด้านหนึ่งของ L

สมมติว่าจุด P_1 อยู่ฝั่งซ้ายของ L ฉะนั้นจุด P_2 ต้องอยู่ฝั่งขวาของ L ซึ่งทำให้ได้ว่าจุด P_3 อยู่ฝั่งซ้ายของ L และจุด P_4 ต้องอยู่ฝั่งขวาของ L เป็นเช่นนี้สลับกันไปเรื่อย ๆ

ดังนั้นจุด P_{2001} จะต้องอยู่ฝั่งซ้ายของ L ซึ่งอยู่ฝั่งเดียวกับ P_1

แสดงว่า L ไม่สามารถผ่านจุดภายในส่วนของเส้นตรง $P_{2001}P_1$ ได้ เกิดข้อขัดแย้ง ■

วิธีการที่ใช้ในโจทย์เกี่ยวกับความเป็นคู่หรือคี่ยังสามารถนำไปใช้ได้กับโจทย์ลักษณะอื่น ที่มีภาวะตรงข้ามกัน เช่น ชาย-ขวา ขาว-ดำ มีโจทย์อีกลักษณะหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับตารางหมากรุก เช่น การเดินหรือวางหมากรุกในตาราง หรือการปูแผ่นกระเบื้องเพื่อคลุมตาราง เทคนิคที่สำคัญอันหนึ่งคือการระบายสีแต่ละช่องของตารางด้วยสีขาวกับสีดำ เพื่อให้เกิดภาวะตรงข้าม

ตัวอย่าง 7.2.6 ในการเดินตัวม้าหมากรุกจากช่องที่อยู่ปัจจุบันไปหนึ่งก้าว จะเดินขนานกับด้านข้างของตารางไป 2 ช่องในทิศทางใดก็ได้ แล้วเดินในทิศทางตั้งฉากอีก 1 ช่อง

มีตัวม้าหมากรุกอยู่บนช่องหนึ่งของตารางขนาด 7×7 เป็นไปได้หรือไม่ที่จะเดินตัวม้านี้ที่ละก้าว ตามกติกาที่อธิบายข้างต้นไปตามช่องอื่นๆ จนครบทุกช่อง โดยผ่านแต่ละช่องเพียงหนเดียว แล้วกลับมายังช่องเริ่มต้น

วิธีทำ ก่อนอื่น ระบายสีช่องของตารางนี้ด้วยสีขาวสลับดำ ช่องละหนึ่งสี สังเกตว่าในการเดินตัวม้าหมากรุกหนึ่งก้าวตามกติกา จะต้องเดินจากช่องสีดำไปช่องสีขาว หรือจากช่องสีขาวไปช่องสีดำเสมอ

เนื่องจากตัวม้าจะต้องเดินผ่านครบทุกช่องซึ่งมี 49 ช่อง และ 49 เป็นจำนวนคี่ แสดงว่า ช่องสุดท้ายที่ตัวม้าเดินผ่านต้องมีสีเดียวกับช่องแรกที่เริ่มต้น ดังนั้น ก้าวต่อไปจึงไม่สามารถเดินกลับมาที่ช่องเริ่มต้นได้

ฉะนั้น วิธีการเดินของตัวม้าตามที่โจทย์กำหนดไม่สามารถทำได้ ■

ตัวอย่างต่อไป ต้องใช้ทั้งความเป็นคู่หรือคี่ และการระบายสีขาวดำ ในข้อเดียวกัน

ตัวอย่าง 7.2.7 ตารางขนาด $n \times n$ ที่ตัดช่องมุมที่อยู่ตรงข้ามกันออกไป 2 ช่อง จะสามารถคลุมด้วยแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 1×2 ทั้งหมด โดยไม่มีการวางแผ่นซ้อนทับกัน ได้หรือไม่

วิธีทำ ไม่สามารถทำได้

เพราะตารางขนาด $n \times n$ ที่ตัดช่องมุมที่อยู่ตรงข้ามกันออกไป 2 ช่อง จะเหลือทั้งหมด $n^2 - 2$ ช่อง ฉะนั้น ถ้าสามารถคลุมได้ด้วยแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 1×2 โดยไม่มีการวางแผ่นซ้อนทับกัน

จะต้องใช้ทั้งหมด $\frac{n^2 - 2}{2}$ แผ่น

ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $n^2 - 2$ เป็นจำนวนคี่ด้วย

ดังนั้น $\frac{n^2 - 2}{2}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม จึงเป็นไปไม่ได้

ต่อไป พิจารณากรณีที่ n เป็นจำนวนคู่

สมมติว่าตารางดังกล่าวถูกระบายด้วยสีขาวสลับดำทีละช่อง

สังเกตว่าช่องมุมที่อยู่ตรงข้ามจะถูกระบายด้วยสีเดียวกัน

ดังนั้น เมื่อช่องมุมที่อยู่ตรงข้ามถูกตัดออกไปสองช่อง ซึ่งสมมติว่าเป็นช่องสีดำ

แสดงว่าจะเหลือช่องสีขาวมากกว่าช่องสีดำอยู่สองช่อง

แผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 1×2 จะคลุมช่องสีดำหนึ่งช่องและช่องสีขาวหนึ่งช่อง

ฉะนั้น ถ้าสามารถคลุมตารางนี้ได้ด้วยแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 1×2 โดยไม่มีการวางแผ่นซ้อนทับกัน

จะต้องมีช่องสีขาวและช่องสีดำจำนวนเท่ากัน

จากเหตุผลดังกล่าว แสดงว่า ไม่สามารถคลุมตารางดังกล่าวด้วยแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 1×2 ได้

ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนคู่หรือคี่ก็ตาม



แบบฝึกหัด 7.2

1. จงพิสูจน์ว่าตารางหมากรุกขนาด $n \times n$ จะสามารถคลุมด้วยแผ่นสี่เหลี่ยมขนาด 1×2 ได้หมดโดยไม่มีการวางแผ่นซ้อนทับกัน ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคู่
2. ในงานเลี้ยงแห่งหนึ่ง ผู้ที่มาร่วมงานจะทักทายกันด้วยการจับมือ จงพิสูจน์ว่าผู้ที่จับมือกับคนอื่นเป็นจำนวนคี่ครั้ง ต้องมีเป็นจำนวนคู่เสมอ
3. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_n$ เป็นวิธีเรียงสับเปลี่ยนของ $1, 2, \dots, n$ โดยที่ n เป็นจำนวนคี่ จงพิสูจน์ว่าผลคูณ

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \dots (a_n - n)$$
 เป็นจำนวนคู่เสมอ
4. จงพิสูจน์ว่าผลบวกของกำลังสองสมบูรณ์ที่เป็นจำนวนคี่สองจำนวนต้องไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์
5. เขียน $1, 2, \dots, 1985$ บนกระดานดำ จากนั้น เลือกมาสองจำนวนแล้วลบทิ้งไป และเขียนแทนด้วยค่าผลต่างที่เป็นบวกของสองจำนวนนั้น หลังจากที่ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จะเหลือเพียงจำนวนเดียว จงพิสูจน์ว่าจำนวนที่เหลือสุดท้ายนี้ต้องไม่ใช่ 0
6. มีจุด 9 จุดในปริภูมิสามมิติ ที่มีพิกัดทั้งสามเป็นจำนวนเต็ม ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดเหล่านี้ จงพิสูจน์ว่า ต้องมีส่วนของเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ลากผ่านจุดภายในที่มีพิกัดเป็นจำนวนเต็มด้วย
7. มีจุด 45 จุด ในแนวเส้นตรง AB แต่อยู่นอกส่วนของเส้นตรง AB จงพิสูจน์ว่าผลบวกของระยะทางจากจุดเหล่านี้ไปยังจุด A จะมีค่าไม่เท่ากับผลบวกของระยะทางจากจุดเหล่านี้ไปยังจุด B
8. ผลคูณของจำนวนเต็ม 22 จำนวนมีค่าเท่ากับ 1 จงแสดงว่าผลบวกของจำนวนเหล่านี้ต้องไม่ใช่ 0
9. หมากรุก 9 ตัววางอยู่บนตารางขนาด 9×9 โดยที่ตำแหน่งของหมากรุกที่วางอยู่สมมาตรเทียบกับแนวเส้นทแยงมุมหนึ่งของตาราง จงพิสูจน์ว่ามีหมากรุกตัวหนึ่งที่อยู่บนแนวเส้นทแยงมุมนั้น
10. เขียนเลข 1 สีตัว และเลข 0 ห้าตัว รอบวงกลม จากนั้นดำเนินการดังต่อไปนี้ ระหว่างเลขสองตัวที่อยู่ตำแหน่งติดกัน ถ้าเลขทั้งสองเป็นเลขเดียวกัน ให้เขียนเลข 0 ระหว่างสองตัวนั้น แต่ถ้าเลขทั้งสองเป็นคนละตัวกัน ให้เขียนเลข 1 ระหว่างสองตัวนั้น จากนั้นลบตัวเลขชุดเดิมทั้ง 9 ตัวออก จะเหลือตัวเลขที่ประกอบด้วย 0 และ 1 ชุดใหม่เก้าตัว แล้วดำเนินการเช่นนี้กับเลขชุดใหม่ไปเรื่อย ๆ เป็นไปได้หรือไม่ที่เมื่อดำเนินการไประยะหนึ่งแล้ว เลขทุกตัวเป็น 0

11. จงพิสูจน์ว่าสมการ $x^2 - y^2 = a^3$ มีชุดคำตอบ (x, y) ที่เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ a เป็นจำนวนนับ
12. ชาย 25 คน หญิง 25 คนนั่งรอบโต๊ะกลม จงพิสูจน์ว่ามีอย่างน้อยหนึ่งคนซึ่งคนที่นั่งข้างเขาเป็นชายทั้งสองข้าง
13. ตั๊กแตน 3 ตัวอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ในแต่ละนาทีตั๊กแตนตัวหนึ่งจะกระโดดข้ามตั๊กแตนอีกตัวหนึ่ง แต่ไม่สามารถกระโดดข้ามตั๊กแตนพร้อมกันสองตัวได้ จงพิจารณาว่า เมื่อผ่านไป 199 นาที ตั๊กแตนทั้งสามตัวจะสามารถกลับมาอยู่ในตำแหน่งเริ่มต้นได้หรือไม่
14. เป็นไปได้หรือไม่ ที่จะเขียนเรียงจำนวนเต็ม จาก 1 ถึง 9 ให้เป็นลำดับซึ่งระหว่างจำนวนเต็มสองจำนวนใด ๆ ที่อยู่ติดกัน จะถูกคั่นด้วยจำนวนอื่นเป็นจำนวนคี่ตัว
15. ให้ $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม $2n + 1$ จำนวนที่มีสมบัติว่า ถ้าตัดจำนวนใดจำนวนหนึ่งทิ้งไป จำนวนที่เหลือจะสามารถแบ่งได้ออกเป็นสองเซต ซึ่งแต่ละเซตมีสมาชิก n ตัว และทั้งสองเซตมีผลบวกเท่ากัน
จงพิสูจน์ว่า

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2n+1}$$

16. เขียน $1, 2, \dots, n$ เป็นลำดับที่มีความยาว n จากนั้นสามารถสลับสองพจน์ใด ๆ ที่เรียงติดกันได้
จงพิสูจน์ว่าถ้าสลับสองจำนวนที่เรียงติดกันไปเรื่อย ๆ เป็นจำนวนคี่ครั้ง จะไม่สามารถกลับมาเป็นลำดับเริ่มต้นได้

7.3 หลักค่าสุดขีด

หลักค่าสุดขีด (extreme principle) เป็นเทคนิคหนึ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหาโจทย์ โดยการพิจารณาค่ามากที่สุดหรือค่าน้อยสุดของสิ่งที่เกี่ยวข้องกับโจทย์ หลักการค่าสุดขีดได้จากข้อสังเกตง่าย ๆ ที่ว่า เซตจำกัดของจำนวนจริงจะต้องมีค่ามากที่สุด และค่าน้อยสุดเสมอ ยิ่งไปกว่านั้น เราสามารถเรียงลำดับสมาชิกในเซตนั้นจากน้อยไปมากได้ด้วย พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.3.1 มีจุดอยู่จำนวนหนึ่งบนระนาบ ระบายสีจุดเหล่านี้ด้วยสีดำหรือสีขาว โดยมีเงื่อนไขว่าถ้าลากเส้นเชื่อมจุดสองจุดที่มีสีเดียวกัน เส้นนี้ต้องผ่านจุดที่มีสีตรงข้ามเสมอ จงพิสูจน์ว่าจุดทั้งหมดต้องอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันทั้งหมด

วิธีทำ สมมติว่าจุดทั้งหมดไม่ได้เรียงในแนวเส้นตรงเดียวกัน

ฉะนั้น จุดสามจุดที่ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันจะต้องเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม

ในบรรดารูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้น พิจารณารูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่น้อยที่สุด เรียกว่า ABC

เนื่องจากจุดยอด 3 จุด A, B, C ถูกระบายด้วยสีสามสี ดังนั้นจะต้องมีจุดยอดสองจุดที่ระบายด้วยสีเดียวกัน สมมติว่าจุด B และ C ถูกระบายด้วยสีเดียวกัน โดยไม่เสียนัยทั่วไป สมมติว่าเป็นสีขาว

ดังนั้น จะต้องมีจุดสีดำ เรียกว่าจุด D ซึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรงระหว่างจุด B และ C

จะได้ว่า เกิดรูปสามเหลี่ยม ABD ซึ่งมีพื้นที่น้อยกว่ารูปสามเหลี่ยม ABC

เกิดข้อขัดแย้งกับที่สมมติว่า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่น้อยที่สุด

ฉะนั้น จุดทั้งหมดต้องเรียงอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

สังเกตว่า หลักการค่าสุดขีดมักใช้ร่วมกับการพิสูจน์แบบข้อขัดแย้ง ■

ตัวอย่าง 7.3.2 มีจุดอยู่จำนวนหนึ่งบนระนาบ โดยที่เมื่อเลือกจุดสามจุดใด ๆ มา รูปสามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดทั้งสามต้องมีพื้นที่น้อยกว่า 1 ตารางหน่วยเสมอ จงพิสูจน์ว่าจุดทั้งหมดต้องอยู่ภายในหรืออยู่บนด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่น้อยกว่า 4 ตารางหน่วย

วิธีทำ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่มากที่สุดในบรรดารูปสามเหลี่ยมที่สร้างจากจุดเหล่านี้

ต่อไป จะเขียนแทนพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม XYZ ใด ๆ ด้วยสัญลักษณ์ $[XYZ]$

จากโจทย์ จะได้ $[ABC] < 1$

ลากเส้นผ่านจุดยอดทั้งสามของ ABC ให้ขนานด้านตรงข้าม จะเกิด $\triangle LMN$

ดังนั้น $[LMN] = 4[ABC] < 4$

ต่อไป จะแสดงว่าจุดทั้งหมดอยู่ในหรือบนด้านของ $\triangle LMN$

สมมติว่าจุด P อยู่นอก $\triangle LMN$

จะได้ว่า P และ $\triangle ABC$ อยู่คนละข้างของเส้นตรง LM, LN หรือ MN

สมมติว่าอยู่ตรงข้ามเส้นตรง LN สร้าง $\triangle ABP$ ซึ่งจะมีพื้นที่มากกว่า $\triangle ABC$

เกิดข้อขัดแย้งกับการที่เลือก $\triangle ABC$ ให้เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่มากที่สุด ■

ตัวอย่าง 7.3.3 ชายคนหนึ่งและภรรยาเชิญแขกที่เป็นคู่สามีภรรยา 4 คู่ มาร่วมงานเลี้ยงที่บ้าน เจ้าของบ้านถามทุกคนที่มาร่วมงานรวมทั้งภรรยาของเขา (แต่ไม่ถามตัวเอง) ว่าได้จับมือทั้งหมดกี่ครั้ง ปรากฏว่าจำนวนครั้งที่แต่ละคนจับมือเป็นจำนวนที่แตกต่างกันหมด ถ้าไม่มีใครจับมือกับคู่ตัวเอง จงหาว่าภรรยาของเจ้าของบ้านจับมือทั้งหมดกี่ครั้ง

วิธีทำ ก่อนอื่น ลองวิเคราะห์ข้อมูลที่กำหนดให้

เจ้าของบ้านถามคำถามกับคนทั้งหมด 9 คนว่าจับมือกี่ครั้ง และคำตอบที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ $0, 1, 2, \dots, 8$ นั่นคือ ไม่จับมือกับใครเลย จนกระทั่งจับมือกับทุกคน ยกเว้นตัวเองและคู่ของเขา

เนื่องจากโจทย์กำหนดว่าทั้ง 9 คนตอบแตกต่างกันหมด และคำตอบที่เป็นไปได้มี 9 คำตอบ

ฉะนั้น จะสมมติให้ทั้ง 9 คนเป็น $P_0, P_1, P_2, \dots, P_8$ โดยที่ P_i จับมือทั้งหมด i ครั้ง

เมื่อ $i = 0, 1, 2, \dots, 8$

ขั้นแรก พิจารณาคนที่จับมือน้อยครั้งที่สุด และคนที่จับมือมากที่สุดครั้งที่สุด ซึ่งคือ P_0 และ P_8

จะเห็นว่า P_8 จับมือกับทุกคนยกเว้นตัวเองและคู่ของเขา ส่วน P_0 ไม่จับมือกับใครเลย ฉะนั้น P_0 และ P_8 ต้องเป็นคู่สามีภรรยา

ต่อไป ตัด P_0 และ P_8 ออกจากการพิจารณา แล้วดูจำนวนครั้งของการจับมือในบรรดาคนที่เหลือ โดยเหตุผลทำนองเดียวกัน จะได้ว่า P_1 และ P_7 ต้องเป็นคู่สามีภรรยา จากนั้นตัด P_1 และ P_7 ออกจากการพิจารณาแล้วทำในทำนองเดียวกัน จะสามารถสรุปได้ว่า P_2 และ P_6 เป็นคู่สามีภรรยา และ P_3 กับ P_5 เป็นคู่สามีภรรยา

ขณะนี้เหลือ P_4 เพียงคนเดียว ซึ่งแสดงว่า P_4 เป็นภรรยาเจ้าของบ้าน

ดังนั้นภรรยาเจ้าของบ้านจับมือทั้งสิ้น 4 ครั้ง ■

ตัวอย่าง 7.3.4 มีจุด 10 จุดบนระนาบ จงแสดงว่า จะสามารถหาส่วนของเส้นตรง 5 เส้นที่มีจุดยอดเป็นจุดทั้ง 10 จุดที่กำหนดให้ และไม่มีส่วนของเส้นตรงใดตัดกันเลย

วิธีทำ เลือกส่วนของเส้นตรง 5 เส้น ซึ่งมีผลรวมของความยาวน้อยที่สุด

จะแสดงว่าส่วนของเส้นตรงทั้ง 5 เส้นนี้ไม่ตัดกันเลย

สมมติเพื่อให้เกิดข้อขัดแย้งว่า มีส่วนของเส้นตรง AB และ CD จาก 5 เส้นนี้ซึ่งตัดกันที่จุด X

โดยอสมการสามเหลี่ยม จะได้

$$|AC| + |BD| < |AX| + |XC| + |BX| + |XD| = |AB| + |CD|$$

ดังนั้น ถ้าเปลี่ยนส่วนของเส้นตรง AB และ CD เป็นส่วนของเส้นตรง AC และ BD

เมื่อรวมกับส่วนของเส้นตรงที่เหลืออีก 3 เส้น จะได้ส่วนของเส้นตรง 5 เส้น ที่มีผลรวมของความยาวน้อยกว่าเดิม เกิดข้อขัดแย้ง ■

นอกจากข้อเท็จจริงที่ว่า เซตจำกัดของจำนวนจริงจะต้องมีค่ามากที่สุด และค่าน้อยสุด แล้ว สำหรับเซตอนันต์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนนับ จะต้องมีส่วนที่มีค่าน้อยสุดเสมอ ซึ่งข้อความนี้เป็นผลมาจากหลักการเรียงอันดับดีแล้วของจำนวนนับ เราจะใช้หลักการนี้เพื่อช่วยแก้ปัญหาในวิชาทฤษฎีจำนวน

ตัวอย่าง 7.3.5 จงพิสูจน์ว่าไม่มีจำนวนนับ x, y, z, w ซึ่งสอดคล้องสมการ $x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$

วิธีทำ สมมติว่าสมการที่กำหนดมีชุดคำตอบที่เป็นจำนวนนับ

ในบรรดาชุดคำตอบเหล่านั้น เลือกชุดคำตอบซึ่ง $x^2 + y^2$ มีค่าน้อยที่สุด

ถ้ามีชุดคำตอบเช่นนั้นหลายชุด ให้เลือกมาชุดหนึ่ง

แทนชุดคำตอบนั้นด้วย (a, b, c, d) โดยที่ $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$

ดังนั้น 3 หาร $a^2 + b^2$ ลงตัว

แต่ว่า $a^2 + b^2$ หารด้วย 3 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ ทั้ง a และ b หารด้วย 3 ลงตัว

(เพราะกำลังสองของจำนวนเต็มใด ๆ เมื่อหารด้วย 3 แล้วย่อมเหลือเศษ 0 หรือ 1 เสมอ)

เขียน $a = 3m$ และ $b = 3n$ จะได้ว่า $a^2 + b^2 = 9m^2 + 9n^2 = 3(c^2 + d^2)$

ฉะนั้น $c^2 + d^2 = 3(m^2 + n^2)$

ดังนั้น (c, d, m, n) สอดคล้องกับสมการที่กำหนดให้ และมีผลรวม $c^2 + d^2 < a^2 + b^2$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับการที่เลือก (a, b, c, d) ให้มีผลรวม $a^2 + b^2$ น้อยที่สุด

สรุปว่าสมการที่กำหนดไม่มีชุดคำตอบที่เป็นจำนวนนับ ■

แบบฝึกหัด 7.3

- มีเหรียญกลมอยู่ 100 เหรียญบนโต๊ะราบ โดยที่เหรียญทุกเหรียญมีรัศมีแตกต่างกันหมด จงแสดงว่า มีอย่างน้อยหนึ่งเหรียญที่สัมผัสเหรียญอื่นอย่างมาก 5 เหรียญ
- ประเทศหนึ่ง มีสนามบินอยู่หลายแห่ง โดยที่ระยะห่างระหว่างแต่ละสนามบินมีค่าแตกต่างกันทั้งหมด เครื่องบินที่บินออกจากสนามบินหนึ่งจะบินไปลงยังสนามบินที่อยู่ใกล้ที่สุดเสมอ จงแสดงว่า เมื่อเครื่องบินลงจอดครบทุกลำ แต่ละสนามบินจะมีเครื่องบินจอดอยู่ไม่เกิน 5 ลำ
- มีรูป 100 เหลี่ยมอยู่หนึ่งรูป ต้องการเขียนตัวเลขที่จุดยอดของรูป 100 เหลี่ยมนี้ โดยที่ตัวเลขที่จุดยอดแต่ละจุดจะต้องเป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวเลขที่อยู่บนจุดยอดทั้งสองข้าง จงแสดงว่าตัวเลขทั้งหมดต้องมีค่าเท่ากัน
- มีจุดอยู่จำนวนหนึ่งบนระนาบ โดยที่เซตของจุดทั้งหมดเป็นเซตจำกัด และระยะห่างระหว่างสองจุดใด ๆ มีค่าแตกต่างกันหมด จากจุดแต่ละจุดลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมไปยังจุดที่อยู่ใกล้ที่สุด จงแสดงว่ารูปที่เกิดขึ้น ต้องไม่มีรูปสามเหลี่ยมประกอบอยู่
- มีเมืองอยู่จำนวนหนึ่งซึ่งมีถนนเชื่อมระหว่างเมืองเหล่านี้ ถนนแต่ละสายสามารถเดินรถได้ทางเดียว และระหว่างสองเมืองใด ๆ จะมีเมืองหนึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของถนนซึ่งไปสิ้นสุดที่อีกเมืองเสมอ จงแสดงว่ามีอย่างน้อยหนึ่งเมืองซึ่งเป็นจุดเริ่มต้นของถนน ซึ่งไปสิ้นสุดที่เมืองอื่น ๆ ครบทุกเมือง
- ในตารางหมากรุกที่มีขนาดอนันต์ แต่ละช่องจะมีหมายเลขซึ่งเป็นจำนวนนับกำกับอยู่ ถ้าตัวเลขในแต่ละช่องเป็นค่าเฉลี่ยของตัวเลขในช่องที่อยู่บน ล่าง ซ้าย ขวา ของช่องนั้น ๆ จงพิสูจน์ว่าตัวเลขในแต่ละช่องต้องมีค่าเท่ากันหมด
- ในลานกว้าง มีคน n คน ($n > 1$) ยืนถือปืนฉีดน้ำอยู่ ณ ตำแหน่งต่าง ๆ โดยที่สำหรับแต่ละคน ระยะทางจากเขาไปถึงคนอื่น ๆ มีค่าแตกต่างกันหมด เมื่อให้สัญญาณ แต่ละคนจะฉีดน้ำไปยังคนที่อยู่ใกล้เขาที่สุด ถ้า n เป็นจำนวนคี่ จงพิสูจน์ว่าต้องมีอย่างน้อยหนึ่งคนที่ไม่ถูกใครฉีดเลย และจงพิสูจน์ว่าข้อความนี้ไม่จริงเมื่อ n เป็นจำนวนคู่
- จงตรวจสอบว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่จะลากส่วนของเส้นตรงหลายเส้น โดยที่จุดปลายของแต่ละส่วนของเส้นตรงต้องอยู่ภายในส่วนของเส้นตรงอื่นเสมอ
- ในงานแต่งงาน มีผู้ชายและผู้หญิงจำนวนหนึ่งเข้าร่วม โดยที่ทราบว่า ไม่มีผู้ชายคนใดเต้นรำกับผู้หญิงครบทุกคน แต่ผู้หญิงแต่ละคนได้เต้นรำกับผู้ชายอย่างน้อยหนึ่งคน จงพิสูจน์ว่าจะต้องมีผู้ชาย 2 คน เรียกว่า b_1, b_2 และผู้หญิง 2 คน เรียกว่า g_1, g_2 ซึ่ง b_1 เต้นกับ g_1 และ b_2 เต้นกับ g_2 แต่ b_1 ไม่เต้นกับ g_2 และ b_2 ไม่เต้นกับ g_1

10. มีตัวหมากกรุกจำนวนหนึ่งบนตารางขนาด $n \times n$ โดยที่ช่องใดของตารางที่ไม่มีตัวหมากกรุกวางอยู่ ผลรวมของจำนวนหมากกรุกในช่องแนวนอน และช่องแนวตั้งทั้งหมดในแนวเดียวกับช่องนั้น ต้องมีค่าอย่างน้อย n จงแสดงว่ามีตัวหมากกรุกอย่างน้อย $\frac{n^2}{2}$ ตัวบนตารางนี้
11. จงพิสูจน์ว่าสมการ $x^2 + y^2 = 3z^2$ ไม่มีชุดคำตอบ (x, y, z) ที่เป็นจำนวนนับ
12. จงพิสูจน์ว่าสมการ $x^4 + y^4 = z^4$ ไม่มีชุดคำตอบ (x, y, z) ที่เป็นจำนวนนับ

7.4 ตัวนิยง

ในหัวข้อนี้ เราจะได้เห็นโจทย์ประเภทหนึ่ง ซึ่งเกี่ยวข้องกับการเปลี่ยนแปลง โดยที่ในแต่ละขั้นตอนของการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น จะมีค่าบางค่าที่มีค่าคงตัว หรือมีบางสิ่งที่ไม่แปรเปลี่ยนไป ค่าที่ไม่แปรเปลี่ยนนี้ จะเรียกว่า **ตัวนิยง (invariant)** ในทางวิทยาศาสตร์ เราได้พบเห็นตัวนิยงมากมาย เช่น ในการเคลื่อนที่ของวัตถุ ผลรวมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์มีค่าคงตัวเสมอ ดังนั้น ผลรวมของพลังงานศักย์และพลังงานจลน์เป็นตัวนิยงสำหรับการเคลื่อนที่ของวัตถุ

โจทย์ที่จะได้ศึกษาในหัวข้อนี้ จะเป็นลักษณะการเปลี่ยนแปลงเป็นขั้น ๆ แล้วถามว่าจะเปลี่ยนจากรูปหนึ่ง ไปเป็นอีกรูปหนึ่งได้หรือไม่ เราได้พบเห็นโจทย์ลักษณะนี้บ้างแล้วในเรื่องภาวะความเป็นคู่หรือคี่ ในหัวข้อนี้ เราจะได้ศึกษาตัวนิยงอื่น ๆ นอกจากความเป็นคู่หรือคี่ของจำนวนที่เกี่ยวข้อง

ตัวอย่าง 7.4.1 มีเครื่องหมาย $+$ อยู่ 10 เครื่องหมาย และเครื่องหมาย $-$ อยู่ 15 เครื่องหมาย อยู่บนกระดานดำ ในแต่ละครั้งจะเลือกเครื่องหมายออกมา 2 เครื่องหมาย ถ้าเป็นเครื่องหมายเดียวกันจะลบทิ้ง แล้วเขียนเครื่องหมาย $+$ แทน แต่ถ้าเป็นเครื่องหมายต่างกัน จะลบทิ้ง แล้วเขียนเครื่องหมาย $-$ แทน เมื่อทำไปทั้งหมด 24 ครั้ง จะเหลืออยู่เพียงเครื่องหมายเดียว คือเครื่องหมายอะไร

วิธีทำ ก่อนอื่น เปลี่ยนเครื่องหมาย $+$ ให้เป็นเลข 1

และเปลี่ยนเครื่องหมาย $-$ ให้เป็น -1

ในแต่ละขั้น จะเลือกตัวเลขมาสองตัว

ถ้าเป็นตัวเลขเดียวกัน จะลบทิ้งแล้วเขียนแทนด้วย 1

ถ้าเป็นคนละตัวกัน จะลบทิ้ง แล้วเขียนแทนด้วย -1

สังเกตว่า ในแต่ละขั้น ผลคูณของตัวเลขทั้งหมดมีค่าคงเดิมเสมอ

ฉะนั้น ผลคูณของตัวเลขทั้งหมดคือ ตัวนิยง

เมื่อเริ่มต้น ผลคูณทั้งหมดคือ -1

ฉะนั้น ค่าสุดท้ายที่เหลือย่อมมีค่าเท่ากับ -1 ด้วย

ดังนั้น เครื่องหมายสุดท้ายที่เหลือจึงเป็นเครื่องหมายลบ

■

ตัวอย่าง 7.4.2 ในการสร้างภาษาคอมพิวเตอร์ใหม่ ด้วยตัวอักษรสองตัว คือ A และ B มักคิดว่า ในคำที่สร้างขึ้น ถ้ามี AB เรียงติดกัน สามารถตัดทิ้งได้โดยไม่เสียความหมาย และสามารถแทรก BA หรือ $AABB$ ที่ใดก็ได้แล้วยังได้คำที่มีความหมายเดิมอยู่
จงพิจารณาว่าคำว่า ABB และ BAA เป็นคำที่มีความหมายเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ ก่อนอื่น ลองพิจารณาตัวอย่างการสร้างคำดังต่อไปนี้

$$B \rightarrow BBA \rightarrow BBAABBA \rightarrow BBABA$$

สังเกตว่า ในการลบ AB หรือแทรก BA และ $AABB$ นั้น ตัวอักษร A และตัวอักษร B

เปลี่ยนแปลงไปเป็นจำนวนเท่ากัน ดังนั้นคำที่มีความหมายเหมือนกันจะต้องมีผลต่างของจำนวนตัวอักษร A และจำนวนตัวอักษร B เท่ากันเสมอ

แสดงว่า ค่าผลต่างของจำนวนตัวอักษร A และจำนวนตัวอักษร B คือ ตัวยีนยงในปัญหานี้

ในคำว่า ABB มีตัวอักษร B มากกว่าตัวอักษร A อยู่หนึ่งตัว ขณะที่ในคำว่า BAA มีตัวอักษร B น้อยกว่าตัวอักษร A อยู่หนึ่งตัว ฉะนั้นคำทั้งสองจึงมีความหมายแตกต่างกัน ■

ตัวอย่าง 7.4.3 วงกลมวงหนึ่งถูกแบ่งออกเป็นช่องที่เป็นรูปเซกเตอร์ทั้งหมด 6 ช่อง แต่ละช่องจะมีหินวางไว้ช่องละหนึ่งก้อน ในแต่ละครั้ง จะสามารถหยิบหินพร้อมกันสองก้อน แล้วขยับหินแต่ละก้อนไปไว้ในช่องที่อยู่ติดกับช่องเดิมได้ จงหาว่าถ้าทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จะสามารถนำหินทั้งหมดมาอยู่ในช่องเดียวกันได้หรือไม่

วิธีทำ กำหนดให้แต่ละช่อง มีหมายเลขกำกับประจำช่องเรียงกันไปจาก 1 ถึง 6

ให้ S แทนผลบวกของเลขประจำช่องที่มีหินวางอยู่ ช่องใดมีหินวางมากกว่าหนึ่งก้อน ก็ให้นำเลขนั้นซ้ำเท่าจำนวนก้อนหินในช่องนั้น

สังเกตว่า ในการขยับหินหนึ่งก้อน ค่าความเป็นคู่หรือคี่ของ S จะเปลี่ยนไป ดังนั้นการขยับหินพร้อมกันสองตัว ค่าความเป็นคู่หรือคี่ของ S จะไม่เปลี่ยน

ดังนั้น ความเป็นคู่หรือคี่ของ S เป็น ตัวยีนยง

เมื่อเริ่มต้น มีหินช่องละหนึ่งก้อน ดังนั้น $S = 1 + 2 + \cdots + 6 = 21$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่

ถ้าสามารถขยับหินทุกก้อนมาอยู่ในช่องที่หมายเลขประจำช่องเป็น k จะได้ว่า $S = 6k$ ซึ่งเป็นจำนวนคู่ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ไม่สามารถขยับหินทั้งหมดให้มาอยู่ในช่องเดียวกันได้ ■

ตัวอย่าง 7.4.4 ในประเทศจีดแลนด์ และจาดแลนด์ หน่วยเงินตราที่ใช้เรียกว่า จีด และ จาด ตามลำดับ

ในประเทศจีดแลนด์ 10 จาด แลกได้ 1 จีด ในประเทศจาดแลนด์ 10 จีด แลกได้ 1 จาด นักธุรกิจคนหนึ่งสามารถเดินทางไปมาระหว่างสองประเทศนี้ เมื่อเริ่มต้น เขามีอยู่ 1 จีด และเขาสามารถแลกเปลี่ยนเงินตราระหว่าง จีด กับ จาด โดยไม่เสียค่าธรรมเนียม จงพิสูจน์ว่าถ้าไม่ใช้เงินเลย เขาจะไม่มีทางที่จะมีจำนวน จีด และ จาด เท่ากัน ณ ขณะเวลาใดๆ

วิธีทำ สมมติว่า ณ ขณะเวลาหนึ่ง เขามี x จีด และ y จาด

ถ้าเขาแลก 1 จีด เป็น 10 จาด เขาจะมีเงินอยู่ $x-1$ จีด และ $y+10$ จาด

ทำนองเดียวกัน ถ้าเขาแลก 1 จาด เป็น 10 จีด เขาจะมีเงินอยู่ $x+10$ จีด และ $y-1$ จาด

ดังนั้น ไม่ว่าจะแลกเปลี่ยนอย่างไรก็ตาม ผลต่างของจำนวนของจีด และ จาด เมื่อหารด้วย 11 แล้วจะต้องเหลือเศษเท่ากันเสมอ

ฉะนั้น เศษเหลือจากการหารผลต่างของ จีด และ จาด ด้วย 11 จึงเป็น ตัวยืนยง

เมื่อเริ่มต้น ผลต่างของ จีด และ จาด มีค่าเท่ากับ 1

ถ้าเขามีจำนวน จีด และ จาด เท่ากัน แสดงว่าผลต่างของ จีด และ จาด มีค่าเท่ากับ 0 เป็นไปไม่ได้

สรุปได้ว่า เป็นไปไม่ได้ที่เขาจะมีจำนวน จีด และ จาด เท่ากัน ณ ขณะเวลาใด ๆ ■

ในตัวอย่าง 7.4.3 ตัวยืนยงคือ ความเป็นคู่หรือคี่ ซึ่งก็คือ เศษเหลือจากการหารด้วย 2 ส่วนในตัวอย่าง 7.4.4 เราใช้เศษเหลือจากการหารด้วย 11 เป็นตัวยืนยง โจทย์หลาย ๆ ข้อ เราสามารถหาตัวยืนยงได้จากเศษเหลือที่เกิดจากการหารด้วยจำนวนเต็มบางจำนวน

ปัญหาต่อไปเป็นปัญหาในวิชาทฤษฎีจำนวน เราสามารถมองปัญหานี้เป็นปัญหาเกี่ยวกับตัวยืนยงได้ ดังนี้

ตัวอย่าง 7.4.5 เขียน 8^{1989} ให้อยู่ในรูปเลขทศนิยม จากนั้นเอาเลขโดดในแต่ละหลักมาบวกกัน เป็นจำนวนเต็มบวกตัวใหม่ แล้วนำเลขโดดประจำหลักบวกกัน เช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนได้จำนวนเต็มที่มีหลักเดียว จงหาว่าจำนวนนั้นคืออะไร

วิธีทำ สมมติว่าจำนวนสุดท้ายที่มีหลักเดียวคือ x

จากความรู้ในวิชาทฤษฎีจำนวน ที่ว่า เศษที่ได้จากการหารจำนวนเต็ม n ด้วย 9 จะเท่ากับเศษที่ได้จากการหารผลบวกของเลขโดดประจำหลักของ n ด้วย 9

ดังนั้น ในการนำเลขโดดประจำหลักมาบวกกัน เศษเหลือจากการหารด้วย 9 จะเป็น ตัวยืนยง

เนื่องจาก $8 \equiv -1 \pmod{9}$ ดังนั้น $8^{1989} \equiv (-1)^{1989} \equiv -1 \pmod{9}$

ฉะนั้น เศษเหลือที่ได้จากการหาร 8^{1989} ด้วย 9 คือ 8

ดังนั้น เมื่อ x หารด้วย 9 ย่อมเหลือเศษ 8 ด้วย

แต่ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีหลักเดียว ดังนั้น $x = 8$ ■

ในสองตัวอย่างถัดไป จะเห็นว่า ในบางครั้ง เราสามารถหาตัวยีนยงได้จากการเลือกบางสับเซตของสิ่งที่กำหนดให้

ตัวอย่าง 7.4.6 ตารางหมากกรุกขนาด $k \times k$ มีช่องมุมบนซ้ายที่ถูกระบายสีดำ ช่องอื่น ๆ ถูกระบายด้วยสีขาว จะอนุญาตให้เปลี่ยนสีทุกช่องในแถว (แนวนอน) เดียวกัน หรือในหลัก (แนวตั้ง) เดียวกัน ให้เป็นสีตรงข้ามได้ จงหาว่าจะใช้ขั้นตอนดังกล่าวเพื่อเปลี่ยนให้ทุกช่องเป็นสีขาวได้หรือไม่ เมื่อ

1. $k = 4$

2. $k = 5$

วิธีทำ พิจารณากรณี $k = 4$ ให้ S แทนจำนวนช่องทั้งหมดที่มีสีดำ

ในการเปลี่ยนสีทุกช่องในแถว (หรือหลัก) ซึ่งมี 4 ช่อง ถ้าแถวนั้นมีช่องสีดำอยู่ x ช่อง เมื่อสลับสีแล้ว จะมีช่องสีดำ $4 - x$ ช่อง

ดังนั้นผลรวมของจำนวนช่องสีดำหลังสลับสีแล้วจึงเท่ากับ $S - x + (4 - x) = S - 2x + 4$ ช่อง

ดังนั้น ความเป็นคู่หรือคี่ของ S จึงเป็น ตัวยีนยง

เมื่อเริ่มต้น $S = 1$ ถ้าสามารถเปลี่ยนทุกช่องให้เป็นสีขาวได้ แล้ว S ต้องมีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นในกรณีตารางขนาด 4×4 จึงไม่สามารถทำได้

ต่อไป พิจารณากรณี $k = 5$ ถ้าทำวิธีเดียวกับกรณี $k = 4$ จะเห็นว่า ความเป็นคู่หรือคี่ของ S ไม่ใช่ตัวยีนยง (เพราะ หลังการสลับสีในแถวหรือหลักหนึ่งแล้ว ผลรวมของจำนวนช่องสีดำมีค่าเท่ากับ $S - 2x + 5$) ดังนั้น เราจะเลือกตัวยีนยงเป็นตัวอื่น

แทนที่เราจะดูจำนวนช่องที่มีสีดำทั้งหมดในตาราง เราจะเลือกเฉพาะบางส่วนของตาราง

วิธีหนึ่งที่ทำได้คือ พิจารณาเฉพาะตารางขนาด 2×2 ที่อยู่มุมบนซ้ายของตาราง และให้ S แทนจำนวนช่องทั้งหมดที่มีสีดำในตารางขนาด 2×2 นี้

จากนั้นทำเช่นเดียวกับกรณี $k = 4$ จะเห็นว่า ค่าความเป็นคู่หรือคี่ของ S เป็น ตัวยีนยง

เห็นได้โดยง่ายว่าเมื่อเริ่มต้น $S = 1$ และถ้าสามารถเปลี่ยนทุกช่องให้เป็นสีขาวได้ S ต้องมีค่าเท่ากับ 0 ซึ่งเป็นไปไม่ได้เช่นเดียวกัน

สังเกตว่า ในกรณี $k = 5$ เราสามารถเลือกช่องของตารางเพื่อให้เกิดตัวยีนยงได้หลายวิธี เช่น เลือกตารางมุมซ้ายบนที่มีขนาด 4×4 หรือเลือก 4 ช่องที่อยู่มุมทั้งสี่ของตาราง ย่อมให้ผลเช่นเดียวกัน ■

มีโจทย์ประเภทหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับตาราง เช่น การเดินตัวหมากบนกระดานหมากรุก หรือ การปูตารางด้วยกระเบื้องที่มีลักษณะบางประการ เทคนิคในการแก้ปัญหาโจทย์ประเภทนี้คือ การระบายสีตาราง แล้วหาด้วยนัยลองศึกษาตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.4.7 จงพิสูจน์ว่าไม่สามารถคลุมตารางขนาด 8×8 ได้ด้วยกระเบื้องขนาด 1×4 จำนวน 15 แผ่น และกระเบื้องหนึ่งแผ่นที่เป็นรูปตัว L โดยไม่ซ้อนทับกัน และไม่มีส่วนของกระเบื้องที่อยู่นอกตาราง

วิธีทำ ระบายสีตารางดังนี้ แถวที่เป็นคี่ ให้ระบายทุกช่องในแถวนั้นด้วยสีดำ แถวที่เป็นคู่ ให้ระบายทุกช่องในแถวนั้นด้วยสีขาว

จะเห็นว่า กระเบื้องขนาด 1×4 แต่ละแผ่น ไม่ว่าจะวางอย่างไรก็ตาม จะคลุมช่องที่มีสีขาวเป็นจำนวนคู่เสมอ กล่าวคือ จะคลุม 0 ช่อง 2 ช่อง หรือ 4 ช่องเท่านั้น

กระเบื้องพิเศษดังรูป จะคลุมช่องสีขาวเป็นจำนวนคี่เสมอ คือ 1 ช่อง หรือ 3 ช่อง

ถ้าสามารถปูกระดานด้วยกระเบื้องได้ตามเงื่อนไขที่กำหนด แสดงว่ามีช่องสีขาวอยู่เป็นจำนวนคี่ แต่ตารางมีขนาด 8×8 และจากวิธีการระบายสี จะได้ว่ามีช่องสีขาวอยู่ 32 ช่อง เกิดข้อขัดแย้งสรุปได้ว่า ไม่สามารถปูกระดานด้วยกระเบื้องตามที่โจทย์กำหนดได้ ■

ตัวอย่าง 7.4.8 จงพิสูจน์ว่าไม่สามารถคลุมตารางขนาด 10×10 ด้วยกระเบื้องขนาด 1×4 จำนวน 25 แผ่น โดยไม่ซ้อนทับกัน

วิธีทำ สำหรับในตัวอย่างนี้ จะแสดงวิธีการระบายสีตารางสองวิธี

วิธีที่ 1 จะระบายสีตารางนี้ด้วยสี 4 สี ดังรูป

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1

จะเห็นว่ากระเบื้องขนาด 1×4 แต่ละแผ่น จะคลุมช่องที่มีสีต่างกันครบทั้ง 4 สี ดังนั้น ถ้าสามารถคลุมตารางด้วยกระเบื้องดังกล่าว 25 แผ่น แล้วแต่ละสีจะต้องถูกระบายใน 25 ช่องเท่ากัน

แต่จากการระบายข้างต้น จะมีสีที่ 1 อยู่ 26 ช่อง สีที่ 2 อยู่ 25 ช่อง สีที่ 3 อยู่ 24 ช่อง และสีที่ 4 อยู่ 25 ช่อง ฉะนั้น ไม่สามารถคลุมตารางขนาด 10×10 ด้วยกระเบื้อง ตามที่กำหนดได้

วิธีที่ 2 จะระบายสีตารางนี้ด้วยสี 4 สี ดังรูป

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

ถ้าวางกระเบื้องขนาด 1×4 ในแนวนอน จะคลุมช่องที่มีสีเดียวกัน 4 ช่อง แต่ถ้าวางในแนวตั้ง จะคลุมช่องที่มีสีต่างกันหมดสีละหนึ่งช่อง

สมมติว่าวางกระเบื้องในแนวตั้งไปทั้งหมดแล้ว ต่อไปจะวางกระเบื้องในแนวนอน

ถ้าขณะนี้ มีช่องที่มีสีที่ 3 ซึ่งยังไม่ถูกคลุมอยู่ n ช่อง จะได้ว่า มีช่องที่มีสีที่ 4 ซึ่งยังไม่ถูกคลุมอยู่ n ช่อง มีช่องที่มีสีที่ 1 และสีที่ 2 ซึ่งยังไม่ถูกคลุมอยู่ อย่างละ $n + 10$ ช่อง

เนื่องจากว่าการวางกระเบื้องในแนวนอนจะคลุมช่องที่มีสีเดียวกัน 4 ช่อง แสดงว่า 4 ทาร n และ $n + 10$ ลงตัว ซึ่งเป็นไปไม่ได้ที่ 4 จะหารทั้งสองจำนวนลงตัวพร้อมกัน

ฉะนั้น ไม่สามารถคลุมตารางขนาด 10×10 ด้วยกระเบื้อง ตามที่กำหนดได้ ■

แบบฝึกหัด 7.4

- มีตัวเลข $1, 2, \dots, 20$ บนกระดานดำ อนุญาตให้ลบตัวเลขสองตัว a และ b ใด ๆ แล้วเขียน $a + b - 1$ แทน เมื่อทำซ้ำเช่นนี้ 19 ครั้ง จะเหลือตัวเลขอะไรเพียงตัวเดียวบนกระดานดำ
- มีตัวเลข $1, 2, \dots, 20$ บนกระดานดำ อนุญาตให้ลบตัวเลขสองตัว a และ b ใด ๆ แล้วเขียน $a + b + ab$ แทน เมื่อทำซ้ำเช่นนี้ 19 ครั้ง จะเหลือตัวเลขอะไรเพียงตัวเดียวบนกระดานดำ
- มีนก 6 ตัวเกาะอยู่บนต้นไม้ 6 ต้น ๆ ละ 1 ตัว ต้นไม้ทั้งหกต้นเรียงในแถวเดียวกัน และอยู่ห่างจากต้นข้าง ๆ เป็นระยะทางเท่ากัน ถ้านกตัวหนึ่งบินจากต้นที่เกาะอยู่ไปยังอีกต้นหนึ่ง ณ ขณะเดียวกัน จะต้องมียกนกตัวหนึ่งที่บินในทิศทางตรงกันข้าม จากต้นหนึ่งไปอีกต้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ เป็นไปได้หรือไม่ที่เมื่อผ่านไประยะเวลาหนึ่ง นกทั้งหกตัวจะเกาะอยู่บนต้นไม้เดียวกัน
- จับแฉกจักรกระดาษจดหมายแผ่นหนึ่งออกเป็น 100 ชิ้น จากนั้นหยิบบางชิ้นมาฉีกออกเป็นอีก 100 ชิ้นเล็ก ๆ ถ้าทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ เป็นไปได้หรือไม่ที่จะมีเศษกระดาษทั้งหมด 2001 ชิ้น
- เจ้าชายน้อยต้องต่อสู้กับมังกรไฟหลายหัว เจ้าชายน้อยมีดาบวิเศษอยู่ 2 เล่ม เล่มหนึ่ง ตัดหัวมังกรได้คราวละ 21 หัว ส่วนอีกเล่มหนึ่ง ตัดได้คราวละ 4 หัว แต่ว่าหลังจากนั้น หัวจะงอกขึ้นมาใหม่ 1985 หัว จงหาว่าเจ้าชายน้อยจะตัดหัวมังกรไฟนี้ได้หรือไม่ ถ้าเริ่มต้น มังกรมี 100 หัว
หมายเหตุ สมมติว่าถ้ามังกรเหลือ 3 หัว เจ้าชายน้อยจะไม่สามารถตัดหัวที่เหลือด้วยกระบี่เล่มใดเล่มหนึ่งได้
- มีกิ้งก่าสีแดง 13 ตัว สีขาว 15 ตัว และสีเขียว 17 ตัว บนเกาะหนึ่ง เมื่อกิ้งก่าต่างสีคลานมาเจอกัน กิ้งก่าทั้งสองตัวจะเปลี่ยนเป็นสีที่สามทันที (เช่น ถ้ากิ้งก่าสีแดง และกิ้งก่าสีเขียวมาเจอกัน ทั้งสองตัวจะเปลี่ยนเป็นสีขาว) เป็นไปได้หรือไม่ที่เมื่อเวลาผ่านไประยะหนึ่ง กิ้งก่าทั้งหมดจะเปลี่ยนเป็นสีเดียวกัน
- เมื่อเริ่มต้นการทดลอง มีอะมีบาอยู่ 3 ชนิด คือ ชนิด A มีอยู่ 20 ตัว ชนิด B มีอยู่ 21 ตัว และ ชนิด C มีอยู่ 22 ตัว เมื่ออะมีบาต่างชนิดกันพบกัน มันจะผสมกันและกลายเป็นชนิดที่สาม หลังจากการผสมกันไปเรื่อย ๆ จะเหลืออะมีบาเพียงตัวเดียว จงหาว่าอะมีบาที่เหลือนี้เป็นชนิดใด
- ทุกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 1,00,000 จะถูกเขียนแทนด้วย ผลบวกของเลขโดดทุกหลักรวมกันของแต่ละจำนวน จากนั้น ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จนสุดท้ายเหลือเพียงจำนวนที่มีหลักเดียวทั้งหมด จงหาว่าในบรรดาจำนวนที่เหลือสุดท้ายนี้ มี 1 หรือ 2 มากกว่ากัน
- มีจำนวนที่มี 3 หลักอยู่หนึ่งจำนวน จากนั้น ลบออกด้วยผลบวกของเลขโดดทุกหลักรวมกัน แล้วทำเช่นเดียวกับจำนวนเต็มที่ได้ใหม่นี้ ไปเรื่อย ๆ 100 ครั้ง จงหาว่าจำนวนสุดท้ายที่ได้คืออะไร
- มีแก้วน้ำอยู่ 7 ใบวางคว่ำอยู่ จะอนุญาตให้หยิบแก้วได้ครั้งละสี่ใบ แล้วกลับทิศทางคว่ำเป็นหงาย หรือหงายเป็นคว่ำของแก้วทั้งสี่ใบได้ จงหาว่าจะสามารถกลับแก้วทั้ง 7 ใบให้หงายขึ้นทั้งหมดโดยใช้กระบวนการที่กำหนดได้หรือไม่

11. มีหินอยู่ 1001 ก้อนวางกองรวมกัน ในแต่ละขั้นตอน จะดำเนินการดังต่อไปนี้ เลือกกองหินที่มีหินมากกว่า 1 ก้อน โยนหินทิ้งไปก้อนหนึ่ง แล้วแบ่งหินที่เหลือในกองนั้นออกเป็นสองกอง ซึ่งแต่ละกองไม่จำเป็นต้องมีหินเท่ากัน เป็นไปได้หรือไม่ที่เมื่อดำเนินการตามขั้นตอนดังกล่าวไปเรื่อย ๆ จะเหลือหินเป็นกอง ๆ ละ 3 ก้อน
12. ตารางหมากรุกขนาด 4×4 มีช่องหนึ่งที่ถูกระบายด้วยสีดำ ดังรูป ช่องอื่น ๆ ถูกระบายด้วยสีขาว จะอนุญาตให้เปลี่ยนสีทุกช่องในแถวเดียวกัน หรือในหลักเดียวกัน หรือทุกช่องในแนวใด ๆ ที่ขนานกับแนวทแยงมุม (รวมถึงช่องมุมเพียงช่องเดียวด้วย) ให้เป็นสีตรงข้ามได้ จงหาว่าจะใช้ขั้นตอนดังกล่าวเพื่อเปลี่ยนให้ทุกช่องเป็นสีขาวได้หรือไม่

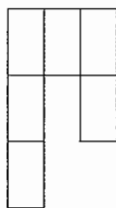
ขาว ขาว ดำ ขาว

ขาว ขาว ขาว ขาว

ขาว ขาว ขาว ขาว

ขาว ขาว ขาว ขาว

13. จงพิสูจน์ว่าไม่สามารถคลุมตารางขนาด 10×10 ได้ด้วยกระเบื้องรูปตัว T ดังรูปต่อไปนี้ โดยไม่ซ้อนทับกัน
14. จงขยายตัวอย่างที่ 9 ให้ไปสู่กรณีทั่วไป กล่าวคือ ตารางขนาด $a \times b$ จะสามารถคลุมได้ด้วยกระเบื้องขนาด $1 \times n$ ก็ต่อเมื่อ n หาร a ลงตัว และ n หาร b ลงตัว
15. (IMO 2004) นิยาม ตะขอ ว่าคือรูปซึ่งประกอบด้วยจัตุรัสยาวด้านละหนึ่งหน่วย 6 อันประกอบกัน ดังแผนภาพ



หรือเป็นรูปที่เกิดจากการหมุน หรือการสะท้อนรูปดังกล่าวในทิศทางใดก็ได้

จงหาว่ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาด $m \times n$ ทั้งหมดซึ่งสามารถคลุมได้ด้วยตะขอ โดยที่

- (1) รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าดังกล่าวถูกคลุมโดยไม่มีช่องว่าง และไม่มีตะขอวางซ้อนทับกัน
- (2) ไม่มีส่วนใดของตะขอซึ่งคลุมพื้นที่นอกกรอบสี่เหลี่ยมผืนผ้า

บรรณานุกรม

1. Titu Andreescu and Zuming Feng, *A Path to Combinatorics for Undergraduates*, Birkhäuser, 2004.
2. I.N. Bronshtein and K.A. Semendyayev, *Handbook of Mathematics*, Van Nostand Reinhold Company, 1985.
3. Chen Chuan-Chong and Koh Khee-Meng, *Principles and Techniques in Combinatorics*, World Scientific, Singapore, 1999.
4. Bradley W. Jackson and Dmitri Thoro, *Applied Combinatorics and Problem Solving*, Addison-Wesley Publishing, 1990.
5. J.H. Van Lint and R.M. Wilson, *A Course in Combinatorics*, Cambridge University Press, 1994.
6. George E. Martin, *Counting: The Art of Enumerative Combinatorics*, Springer, 2001.
7. Koh Khee Meng and Tay Eng Guan, *Counting*, World Scientific, Singapore, 2002.
8. Alan Tucker, *Applied Combinatorics*, 2nd Ed., John Wiley & Sons, 1984.
9. Herbert S. Wilf, *Generatingfunctionology*, Academic Press, 1990.

ก		จ	
การจัดหมู่	24	จำนวนเบลล์	140, 147
การจัดหมู่ที่มีของซ้ำ	42	จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง	54
การแจกของ	50	จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่หนึ่ง	31
การนับสองทาง	167	จุดตรึง	99
การเรียงย้ายตำแหน่ง	99	จุดแลตทิซ	120
การเรียงสับเปลี่ยน	8	เจมส์ สเตอร์ลิง	31
การเรียงสับเปลี่ยนของเซตซ้ำ	45	ซ	
การเรียงสับเปลี่ยนที่มีของซ้ำ	42	เซตซ้ำ	44
การเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลม	16	เซตซ้ำย่อย	46
เกมหอคอยฮานอย	144	เซอร์ ไอแซก นิวตัน	67
ข		ต	
ขั้นตอนวิธีการหาร	115	ตัวเรียง	184
ค		ตัวหารบวก	4
ความสัมพันธ์เวียนเกิด	141		
คอมพลิเมนต์	20		

ท		ล	
ทฤษฎีบททวินาม	67, 79, 83	ลำดับฟีโบนัชชี	142
ทฤษฎีบททอเนกนาม	78	เลขฐาน k	3
		เลออนฮาร์ด ออยเลอร์	123
บ		ส	
เบลล์ ปาสกาล	72	สมการลักษณะเฉพาะ	148
ป		สมการเวียนเกิดเชิงเส้น	148
ปีแยร์ ซีมง มาร์ก เดอ ลาปลาซ	123	สมการเวียนเกิดเชิงเส้นไม่เอกพันธ์	154
ผ		สมการเวียนเกิดเชิงเส้นเอกพันธ์	148
ผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็ม	53, 129	สมการเอกพันธ์	148
ฟ		สัมประสิทธิ์ทวินาม	24, 69, 82
ฟังก์ชันก่อกำเนิดสามัญ	123	สัมประสิทธิ์อเนกนาม	77
ฟังก์ชันก่อกำเนิดเอกซ์โพเนนเชียล	132	ห	
ฟังก์ชันทั่วถึง	36	หลักการคูณ	3
ฟังก์ชันฟิของออยเลอร์	101	หลักการบวก	1
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง	36	หลักการเพิ่มเข้าและตัดออก	94
ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง	36	หลักคอมพลีเมนต์	20
แฟกทอเรียล	9	หลักค่าสุดขีด	179
ภ		หลักภาวะคู่หรือคี่	173
ภาวะคู่หรือคี่	173	หลักรงนกพิราบทั่วไป	112
ร		หลักรงนกพิราบอย่างง่าย	107, 108
ระบบสมการเวียนเกิด	159	หลักหนึ่งต่อหนึ่ง	36
รูปสามเหลี่ยมปาสกาล	72	หลักหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง	36
รูปแบบปิด	141	อ	
		อนุกรมกำลัง	83, 123
		อาบราฮาม เดอ มัวฟว์	123

บัญชีสัญลักษณ์

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\mathbb{N}$	เซตของจำนวนนับ
$\mathbb{Z}$	เซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{R}$	เซตของจำนวนจริง
$\mathbb{C}$	เซตของจำนวนเชิงซ้อน
$ A $	จำนวนสมาชิกของเซต A
$P(A)$	เซตของเซตย่อยทั้งหมดของ A
$C_r^n, \binom{n}{r}$	จำนวนวิธีจัดหมู่ทีละ r จากของ n สิ่งที่แตกต่างกัน
P_r^n	จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นเส้นตรงทีละ r สิ่งจากของ n สิ่งที่แตกต่างกัน
H_r^n	จำนวนวิธีแจกของ r สิ่งที่เหมือนกันให้คน n คน โดยที่บางคนอาจไม่ได้ของ
Q_r^n	จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเป็นวงกลมทีละ r สิ่งจากของ n สิ่งที่แตกต่างกัน
$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_m}$	สัมประสิทธิ์อเนกนาม
$s(r, n)$	จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่หนึ่ง
$S(r, n)$	จำนวนสเตอร์ลิงชนิดที่สอง
B_n	จำนวนเบลล์
D_n	จำนวนวิธีการเรียงย้ายตำแหน่งของ $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยไม่มีของชิ้นใดอยู่ตำแหน่งเดิม
$D_n(k)$	จำนวนวิธีการเรียงย้ายตำแหน่งของ $\{1, 2, \dots, n\}$ โดยมีของ k ชิ้นอยู่ตำแหน่งเดิม
$\varphi(n)$	ฟังก์ชันฟีของออยเลอร์

คอมบินาทอริก
ISBN 974 - 93637 - 5 - 2



9 789749 363751

C 112
4000 240.00 บาท



มูลนิธิส่งเสริมโอลิมปิกวิชาการและพัฒนามาตรฐานวิทยาศาสตร์ศึกษา

ในพระอุปถัมภ์สมเด็จพระเจ้าพี่นางเธอ เจ้าฟ้ากัลยาณิวัฒนา กรมหลวงนราธิวาสราชนครินทร์

สำนักงานตั้งอยู่ในบริเวณ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท ปทุมวัน กทม. 10330

โทร. 0-2252-8916, 0-2252-8917, แฟกซ์. 0-2252-8917